А.П.Маркеев

ТОЧКИ ЛИБРАЦИЙ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ И КОСМОДИНАМИКЕ

М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит. 1978, 312 стр.

В книге излагаются аналитические и численные методы теории гамильтоновых систем и их приложения к исследованию движений, близких к точкам либрации ограниченной задачи трех тел. Основное внимание уделяется устойчивости положений равновесия и периодических движений нелинейных гамильтоновых систем в резонансных случаях, когда чисто мнимые характеристические показатели линеаризованной системы уравнений возмущенного движения связаны целочисленными соотношениями.

Подробно исследована задача об устойчивости треугольных точек либрации ограниченной задачи трех тел. Разработан способ построения и исследования устойчивости периодических движений, близких положениям равновесия автономных гамильтоновых систем. Этот способ применен в анализе периодических движений, близких треугольным точкам либрации. Построена приближенная аналитическая теория движения вблизи прямолинейной окололунной точки либрации.

Содержание

Предисловие 7
Введение 9
Глава 1. Точки либрации ограниченной задачи трех тел 17
§ 1. Уравнения движения ограниченной задачи трех тел 17
§ 2. Точки либрации — частные решения ограниченной задачи трех тел 20
§ 3. Об устойчивости точек либрации 24
Глава 2. Гамильтоновы системы линейных дифференциальных уравнений 30
§ 1. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами 30
§ 2. Нормальная форма автономной системы линейных гамильтоновых уравнений в случае простых чисто мнимых корней характеристического уравнения 32
§ 3. Общие сведения о линейных системах с периодическими коэффициентами 35
§ 4. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами 37
§ 5. Нормализация гамильтоновой системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами 39
§ 6. Задача о параметрическом резонансе. Линейные гамильтоновы системы, содержащие малый параметр 42
§ 7. Нахождение областей параметрического резонанса в первом приближении по малому параметру 46
Глава 3. Устойчивость положений равновесия гамильтоновых систем с одной степенью свободы 52

§ 1. Преобразование Биркгофа 52
§ 2. Теорема Мозера об инвариантных кривых 57
§ 3. Теорема Арнольда—Мозера об устойчивости гамильтоновой системы с одной степенью свободы в общем эллиптическом случае 58
§ 4. Линейная нормализация 59
§ 5. Неустойчивость в случае целого числа 3\lambda 62
§ 6. Исследование устойчивости в случае целого числа 4\lambda 64
§ 7. Устойчивость при резонансах произвольного порядка 67
Глава 4. Устойчивость автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы **69**
§ 1. Постановка задачи 69
§ 2. Исследование устойчивости при резонансе $\omega_1=2\ \omega_2$ 70
§ 3. Устойчивость при резонансе $\omega_1=3\ \omega_2$ 73
§ 4. Об устойчивости в случае равных частот 77
§ 5. Исследование устойчивости при $c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 = 0$ 85
Глава 5. Об устойчивости многомерных гамильтововых систем **87**
§ 1. Устойчивость многомерных гамильтоновых систем для большинства начальных условий. Результаты Арнольда 87
§ 2. Формальная устойчивость. Теорема Брюно 90
§ 3 Оценка скорости диффузии Арнольда. Результаты Нехорошева 94
§ 4. Неавтономная система с двумя степенями свободы. Случай резонанса третьего порядка 97
§ 5. Об устойчивости неавтономной системы с двумя степенями свободы при резонансе четвертого порядка 102
Глава 6. Метод точечных отображений в задачах нормализации и устойчивости нелинейных гамильтоновых систем **106**
§ 1. Необходимые понятия и определения 106
§ 2. Перенесение теоремы Четаева на точечные отображения 108
§ 3. Разложение отображения в ряд 109
§ 4. Нормализация точечного отображения в окрестности неподвижной точки 112
§ 5. Получение функции Гамильтона по отображению 115
§ 6. Об устойчивости неподвижных точек отображения в случае резонанса 117
Глава 7. Устойчивость точек либрации в плоской круговой задаче трех тел **122**
§ 1. Функция Гамильтона задачи трех тел 122
§ 2. Краткая предыстория решения задачи об устойчивости лагранжевых решений 123
§ 3. Гамильтониан возмущенного движения 125
§ 4. Решение задачи об устойчивости точек либрации для значений параметра \mu из области устойчивости в первом приближении 126

§ 5. Об устойчивости точек либрации при критическом отношении масс 130
Глава 8. Устойчивость точек либрации в пространственной круговой задаче трех тел **132**
§ 1. Нормальная форма функции Гамильтона 132
§ 2. Устойчивость для большинства начальных условий 134
§ 3. Формальная устойчивость 135
§ 4. Формальная устойчивость точек либрации при критическом отношении масс 143
§ 5. Выводы 145
Глава 9. Устойчивость точек либрации в плоской эллиптической задаче трех тел **147**
§ 1. Краткая история рассматриваемой задачи 147
§ 2. Линейная нормализация с точностью до первой степени эксцентриситета 149
§ 3. Резонансные кривые 155
§ 4. Резонансы третьего порядка 157
§ 5. Об устойчивости при резонансах четвертого порядка 159
§ 6. Исследование устойчивости при нерезонансных значениях параметров 160
§ 7. Численное исследование при произвольных e и μ 163
§ 8. Обсуждение полученных результатов 169
Глава 10. Об устойчивости точек либрации в пространственной эллиптической задаче трех тел **173**
§ 1. Тождественный резонанс 173
§ 2. Алгоритм линейной нормализации с точностью до второй степени эксцентриситета 174
§ 3. Нормальная форма функции Гамильтона 176
§ 4. Исследование устойчивости системы с функцией Гамильтона (3.4) 178
§ 5. Устойчивость точек либрации при малых e 180
§ 6. Неустойчивость точек либрации при малых μ и e 181
§ 7. Результаты численного исследования при произвольных e и μ. Устойчивость лагранжевых решений в системе Солнце—Юпитер 182
Глава 11. Основы метода Депри—Хори в теории возмущений гамильтоновых систем **186**
§ 1. Введение 186
§ 2. Ряды Ли как каноническое преобразование 188
§ 3. О теории возмущений Депри 191
§ 4. Упрощение алгоритма Депри 196
§ 5. Формальная техника применения преобразования Ли 199
§ 6. О теории возмущений, основанной на рядах Ли 202

Глава 12. Периодические движения, близкие к треугольным точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел **205**
§ 1. Введение 205
§ 2. Три типа периодических движений 206
§ 3. Схема исследования устойчивости 209
§ 4. Орбиты первого приближения 210
§ 5. Построение периодических движений 212
§ 6. Гамильтониан возмущенного движения 215
§ 7. Резонансы 217
§ 8. Линейная нормализация. Параметрический резонанс 221
§ 9. Резонансные кривые третьего и четвертого порядков 227
§ 10. Нелинейная нормализация. Условия устойчивости 228
§ 11. Результаты расчетов 231
Глава 13. О движении космического аппарата вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна с учетом солнечных возмущений **237**
§ 1. Влияние солнечных возмущений на движение космического аппарата, помещенного в точку либрации 237
§ 2. О периодических орбитах вблизи L_4. Гамильтониан движения КА в окрестности L_4 251
§ 3. О методе исследования. Предварительное преобразование функции Гамильтона 256
§ 4. Долгопериодическая часть гамильтониана и исключение независимой переменной 259
§ 5. Периодические орбиты и их устойчивость 261
Глава 14. Пассивное движение космического аппарата в окрестности прямолинейной точки либрации L_2 системы Земля—Луна **265**
§ 1. Введение 265
§ 2. О траекториях линейной задачи 266
§ 3. Уравнения движения КА вблизи L_2 с учетом солнечных возмущений 269
3.1. Постановка задачи 269
3.2. Вращающаяся система координат 270
3.3. Безразмерные координаты 271
3.4. Относительная система координат 272
3.5. Разложение функции Гамильтона 272
3.6. Уравнения движения Луны 274
3.7. "Подвижная точка либрации" 276
§ 4. Некоторые оценки 277
4.1. Оценки ускорений, действующих на КА 277
4.2. Вынужденные колебания КА вблизи "подвижной точки либрации", обусловленные гравитационными солнечными возмущениями 278

4.3. Вынужденные колебания КА, обусловленные силами светового давления 280
§ 5. Эллиптическая задача 281
5.1. Предварительное преобразование гамильтониана 281
5.2. Нормализация квадратичной части гамильтониана 284
5.3. Исключение членов третьей степени относительно координат и импульсов 287
5.4. Нормализация совокупности членов четвертого порядка 290
5.5. Общее решение нормализованной системы. Условно-периодические движения 292
§ 6. Оценка точности построенной теории движения 293
6.1. Общие замечания 293
6.2. Результаты численных экспериментов в эллиптической задаче 294
6.3. Ошибки теории в случае учета солнечных возмущений 296
Дополнение. Точки либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида 298
§ 1. Уравнения движения 298
§ 2. Точки либрации 300
§ 3. Линейный анализ устойчивости точек либрации 301
§ 4. Результаты нелинейного исследования устойчивости 302
Литература 304

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с успехами в исследовании и использовании космического пространства давно известные точные решения классической задачи трех тел — точки либрации привлекают к себе все большее и большее внимание.

Настоящая книга посвящена подробному исследованию устойчивости треугольных точек либрации ограниченной задачи трех тел и элементам теории движения вблизи точек либрации. Вспомогательную, хотя и значительную, часть книги составляет изложение теории устойчивости гамильтоновых систем.

В основу книги положен ряд опубликованных работ [53—67] автора. Использованы также некоторые результаты других авторов.

Многие научные вопросы, затронутые в книге, неоднократно обсуждались с В. А. Сарычевым, В. В. Белецким, А. Д. Брюно. Живое и доброжелательное участие В. В. Белецкого во многом способствовало самому появлению этой книги. Названным ученым автор глубоко благодарен.

А. Маркеев

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в связи с интенсивным изучением и освоением космического пространства значительно возрос интерес к знаменитой классической *задаче трех тел* (точек), движущихся под действием их взаимного гравитационного притяжения. Так как эта задача в общем виде неинтегрируема, то большой интерес преставляет изучение ее частных решений. В 1767 году Л. Эйлер [124] обратил внимание на то, что задача трех тел имеет три частных решения, для которых гравитирующие точки во все время движения расположены на одной прямой. Через пять лет, в 1772 г., Ж. Лагранж показал [148], что существуют еще два частных решения, соответствующие таким движениям, для которых три тела образуют равносторонний треугольник. Для пяти этих частных решений притягивающие тела движутся по подобным орбитам относительно своего барицентра, образуя во все время движения неизменную конфигурацию.

Задача трех тел в случае притяжения, определяемого ньютоновским законом, наиболее важна для космодинамики. Важнейшей разновидностью этой задачи является так называемая *ограниченная задача трех тел*, когда предполагается, что одно из тел имеет бесконечно малую массу m_3 и, следовательно, не оказывает влияния на движение двух других тел (с массами m_1 и m_2). В ограниченной задаче трех тел конечные массы m_1 и m_2 движутся по кеплеровским орбитам, определяемым задачей двух тел. Со многих точек зрения удобно изучать движение m_3 в системе координат, связанной с m_1 и m_2. В этой вращающейся системе координат упомянутым выше пяти точным решениям задачи трех тел соответствуют точки — положения равновесия. Точки, лежащие на прямой, проходящей через m_1 и m_2, обозначают L_1, L_2 и L_3, а точки, образующие равносторонние треугольники с телами m_1 и m_2, обозначают через L_4 и L_5.

Гравитационное и центробежное ускорения, воздействующие на тело, помещенное в L_i, уравновешиваются. Поэтому, если тело бесконечно малой массы m_3 поместить в L_i с нулевой (во вращающейся системе координат) скоростью, то оно останется неподвижным. Точки L_i часто называют *точками либрации* или *либрационными центрами*. Треугольные точки либрации, кроме того, иногда

называют *лагранжевыми точками либрации* или *лагранжевыми периодическими решениями задачи трех тел.*

Сначала, сразу после обнаружения точек либрации, казалось, что они представляют только теоретический интерес. Но открытие в 1906 году группы астероидов, движущихся в окрестности лагранжевых точек либрации системы Солнце — Юпитер, показало большую практическую ценность точек либрации для изучения движений космических тел в Солнечной системе. С тех пор точки либрации стали предметом пристального внимания в связи с необходимостью построения теории движения астероидов вблизи точек либрации L_4 и L_5.

В совсем недавнее время интерес к точкам либрации чрезвычайно возрос в связи с практическими потребностями космических исследований. Существуют проекты запуска искусственных спутников в окрестности точек либрации Солнечной системы и, в первую очередь, системы Земля — Луна. Все чаще подчеркивается важность необычных динамических свойств точек либрации с астродинамической, геофизической и эксплуатационной точек зрения. Точки либрации все больше привлекают внимание инженеров в связи с возможными интересными практическими их применениями: для связи с Луной, встречи в окрестности Луны и планет, межпланетных перевозок, исследований магнитосферы Земли и для многих других целей.

В проблеме происхождения и эволюции Земли, Солнца и планет точки либрации тоже имеют большое значение. Так называемые «малые тела», интересующие ученых в связи с решением космологических вопросов, могут накапливаться в точках либрации. Так, например, в 1961 году появилось сообщение [100], принадлежащее Кордылевскому, об открытии «тусклых облакоподобных спутников» в окрестности треугольной точки либрации L_5 системы Земля — Луна. Затем было опубликовано сообщение [101] об открытии такого же облака вблизи L_4.

Задача о точках либрации имеет и самостоятельный общемеханический и математический интерес. Многочисленные исследования показали, что сами точки либрации и характер движений в их окрестности очень тесно связаны с общим характером движения в задаче трех тел, что крайне важно, так как в общем виде задача трех тел не проинтегрирована. С общетеоретической точки зрения важность задачи о точках либрации ограниченной задачи трех тел подчеркивается еще тем, что при решении ряда труднейших принципиальных вопросов о точках либрации были созданы новые качественные, аналитические и численные методы исследования сложных нелинейных гамильтоновых систем, которые применимы и применяются во многих других задачах механики и математики.

По-видимому, самыми важными вопросами небесной механики в задаче о точках либрации являются вопросы об устойчивости

самих точек либрации и о существовании, устойчивости и методах построения периодических (и условно-периодических) орбит в их окрестности. Некоторые из этих вопросов и смежные с ними задачи рассмотрены в настоящей книге. Книга содержит 14 глав и Дополнение.

Глава 1 является вводной. Здесь выводятся уравнения движения ограниченной задачи трех тел, во вращающейся системе координат находятся точки либрации L_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$) и проводится анализ их устойчивости в линейном приближении. Изложение этих вопросов мало отличается от традиционного. В этой же главе даны таблицы, определяющие положение точек либрации в Солнечной системе, и приведены графики некоторых величин, характеризующих положение точек либрации при произвольных значениях параметра μ ($0 < \mu = m_2/(m_1 + m_2) \leqslant 1/2$).

Во второй — пятой главах рассмотрены задачи теории гамильтоновых систем и ее приложений. Вторая глава посвящена линейным гамильтоновым системам. Приводятся результаты Ляпунова об устойчивости линейных гамильтоновых систем с постоянными или периодическими коэффициентами. Для устойчивых систем в случае простых корней характеристического уравнения строятся конструктивные алгоритмы приведения системы к нормальным координатам. Тут же приводится теорема Ляпунова — Пуанкаре о характеристическом уравнении гамильтоновых систем и рассматривается задача о параметрическом резонансе в гамильтоновых системах, содержащих малые периодические возмущения. В последнем параграфе второй главы получены области параметрического резонанса в первом приближении по малому параметру и приведены необходимые расчетные формулы.

В главе 3 изучается устойчивость гамильтоновой системы с одной степенью свободы и 2π-периодической по времени функцией Гамильтона. К такой системе может быть, например, приведена задача об устойчивости периодических движений круговой ограниченной задачи трех тел, отличных от точек либрации. Предполагается, что линеаризованная система устойчива, а ее мультипликаторы различны. Частные случаи этой задачи рассматривались в классических исследованиях Леви-Чивита и в недавних работах Зигеля, Мермана, Каменкова и Мустахишева. В главе 3 рассматриваются как нерезонансный, так и резонансный случаи (когда характеристические показатели $\pm i\lambda$ таковы, что число $k\lambda$ будет целым при произвольном целом $k \geqslant 3$). Исследование основано на приведении функции Гамильтона к нормальной форме и последующем применении теоремы Ляпунова о неустойчивости и теоремы Мозера об инвариантных кривых [72]. Получены условия устойчивости и неустойчивости.

В главе 4 исследована устойчивость автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Здесь основное внимание

уделяется тем критическим случаям, когда неприменима известная теорема Арнольда — Мозера [72]. В случае разонансов третьего и четвертого порядков (когда частоты линеаризованной системы связаны соотношениями $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ соответственно) получены условия устойчивости и неустойчивости. При отсутствии резонансов до порядка $2k$ включительно получено утверждение об устойчивости, обобщающее теорему Арнольда — Мозера на случай, когда при учете в разложении функции Гамильтона членов до порядка $2k - 1$ в системе имеется вырождение, снимаемое учетом членов $2k$-го порядка. Здесь же в четвертой главе рассмотрена задача об устойчивости в случае кратных частот ($\omega_1 = \omega_2$). Получены условия неустойчивости и формальной устойчивости. В конце главы приведены расчетные формулы, необходимые для применения полученных результатов в конкретных механических задачах.

Глава 5 посвящена рассмотрению многомерных гамильтоновых систем. Здесь для 2π-периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при помощи теоремы Четаева о неустойчивости доказаны утверждения о неустойчивости при наличии резонансов третьего и четвертого порядков и рассмотрены различные аспекты задачи об устойчивости движения в многомерных гамильтоновых системах. Излагаются результаты Арнольда по устойчивости для большинства начальных данных, формулируется и доказывается теорема Брюно о формальной устойчивости гамильтоновых систем, рассматриваются основные результаты исследований Нехорошева об оценке скорости диффузии Арнольда [78—81] в многомерных гамильтоновых системах, близких к интегрируемым.

Для практического применения полученных результатов нужно иметь эффективные способы нахождения нормальной формы функции Гамильтона. Нахождение нормальной формы в неавтономном случае особенно затруднено. Если, например, воспользоваться классическим преобразованием Биркгофа, то для нахождения соответствующей производящей функции придется строить периодические решения некоторой системы дифференциальных уравнений. Необходимые при этом вычисления весьма громоздки.

В главе 6 предлагается способ нормализации, отличный от классического и основанный на применении к 2π-периодической по t гамильтоновой системе метода точечных отображений. При нахождении точечного отображения используется тот факт, что преобразование фазового пространства, осуществляемое движениями гамильтоновой системы, является каноническим и находится не само отображение, а его производящая функция S, удовлетворяющая уравнению Гамильтона — Якоби. При нахождении коэффициентов производящей функции, конечно, нужно проинтегрировать от $t = 0$ до $t = 2\pi$ некоторую систему обыкновенных дифференциаль-

ных уравнений, но с фиксированными (нулевыми) начальными условиями. После получения функции S вводятся такие координаты, в которых она записывается в простейшей (нормальной) форме. А затем по нормальной форме функции S находится нормальная форма соответствующей функции Гамильтона.

В главе 6 также рассмотрены резонансные случаи и для резонансов третьего и четвертого порядков доказаны утверждения о неустойчивости неподвижных точек точечных отображений, задаваемых периодическими по времени гамильтоновыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказательства основаны на перенесенной здесь на точечные отображения теореме Четаева о неустойчивости.

В главах седьмой — десятой решается задача об устойчивости треугольных точек либрации ограниченной задачи трех тел. В главе 7 рассмотрен случай плоской круговой задачи. Наиболее существенное исследование устойчивости в этом случае раньше было проведено Леонтовичем и Депри. В их работах [37, 111] для решения задачи устойчивости применялась теорема Арнольда — Мозера и не были исследованы те случаи, когда эта теорема неприменима. В главе 7 при помощи результатов главы 4 задача об устойчивости треугольных точек либрации решена полностью. Показано, что в области устойчивости в первом приближении точки либрации действительно устойчивы по Ляпунову, за исключением двух значений параметра μ, при которых имеет место неустойчивость. Эти значения μ_1 и μ_2 соответствуют резонансам $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ между частотами линейной системы.

В конце главы 7 рассмотрена устойчивость точек либрации при критическом отношении масс Рауса. Для этого отношения масс характеристическое уравнение линейной системы имеет чисто мнимые кратные корни, а точки либрации в линейном приближении неустойчивы. Строгий нелинейный анализ показал, что имеет место формальная устойчивость.

Глава 8 посвящена исследованию треугольных точек либрации в пространственной круговой задаче. Доказано, что при всех значениях μ из области устойчивости в линейном приближении имеет место устойчивость для большинства начальных условий, за исключением двух значений μ, для которых в главе 7 доказана неустойчивость. Кроме того, доказано, что для почти всех значений μ из области устойчивости в линейном приближении точки либрации в пространственной круговой задаче формально устойчивы. В заключение главы показана формальная устойчивость треугольных точек либрации при критическом отношении масс Рауса.

В главе 9 рассмотрена плоская эллиптическая задача. Здесь задача чрезвычайно усложняется, так как независимая переменная явно входит в уравнения движения. Первые исследования устойчивости треугольных точек либрации в эллиптической задаче

трех тел принадлежат Ляпунову [48]. Он рассматривал задачу в линейном приближении. Многочисленные позднейшие исследования многих авторов также связаны только с линейной задачей. В главе 9 задача устойчивости рассмотрена в строгой нелинейной постановке. Исследование проводится как аналитическими (при малых значениях эксцентриситета e), так и численными (при произвольных параметрах e и μ) методами. В области устойчивости в линейном приближении, полученной впервые Дэнби [110], выделены кривые, на которых выполнены резонансные соотношения третьего и четвертого порядков. Для значений параметров e и μ, принадлежащих этим кривым, показаны либо неустойчивость, либо устойчивость в конечном (но достаточно высоком) нелинейном приближении. При значениях параметров, не принадлежащих этим кривым (а иногда еще и кривым, на которых выполнены резонансные соотношения пятого и шестого порядков), доказаны устойчивость для большинства начальных условий и формальная устойчивость.

Самым сложным в задаче об устойчивости треугольных точек либрации является случай пространственной эллиптической задачи. Он исследуется в главе 10. Помимо увеличения числа степеней свободы изучаемой динамической системы, здесь возникает еще одна характерная только для этой задачи особенность: имеет место тождественный (при всех e и μ) резонанс из-за равенства периода кеплеровского движения основных притягивающих тел и периода линейных колебаний тела бесконечно малой массы по направлению, перпендикулярному плоскости их орбиты.

Полученные в главах 3—5 условия устойчивости и неустойчивости здесь неприменимы. Требуется особое исследование, которое в главе 10 проводится при помощи второго метода Ляпунова. Результаты этого исследования применяются при аналитическом и численном анализе устойчивости.

Для достаточно малых значений e и μ получена область неустойчивости. Она является очень узкой областью. В плоскости e, μ одной из ее границ является ось Oe, а другой — кривая, мало отличающая от параболы $e = 3953\sqrt{\mu}$. При произвольных e и μ проводится численное исследование. Новые области неустойчивости не обнаружены.

Глава 11 содержит изложение основ метода Депри — Хори в теории возмущений гамильтоновых систем. В настоящее время на русском языке нет еще достаточно подробного описания этого метода. Разработанный сравнительно недавно [113, 142], он имеет значительные преимущества перед широко известными классическими методами, такими как, например, преобразование Биркгофа [7] или метод Цейпеля [9]. Практическое построение канонических преобразований в методе Депри — Хори основано на использовании рядов Ли и преобразовании Ли. Для ясности изложения

в главе 11 сначала рассматриваются ряды Ли и их некоторые свойства, а затем излагается сам метод и его упрощение, осуществленное Кэмилом [143, 144]. В конце главы кратко описана формальная техника применения метода Депри — Хори.

В главе 12 подробно исследуются периодические движения, близкие к треугольным точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел. Существование рассматриваемых периодических движений следует из теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле [22, 49]. Во введении к главе 12 дана краткая история исследований, связанных с построением и анализом устойчивости периодических движений, близких к треугольным точкам либрации. Затем предлагается новый способ их построения и алгоритм исследования их орбитальной устойчивости. Подробно рассмотрены различные резонансные ситуации, возникающие в задаче об устойчивости. В последнем параграфе главы 12 приведены результаты численного исследования устойчивости периодических движений.

Глава 13 посвящена численному и аналитическому исследованию движения вблизи треугольных точек либрации системы Земля—Луна с учетом гравитационных солнечных возмущений. Сначала излагаются результаты численного анализа, проведенного в работах Тэпли, Льюэллена и Шульца [176, 177] и связанного с рассмотрением влияния солнечных возмущений на движение тела бесконечно малой массы, помещенного в точку L_4 или вблизи нее с нулевой или малой относительной скоростью. Оказывается, что солнечные возмущения приводят к значительным (доходящим до 190 000 *км*) отклонениям тела бесконечно малой массы от точки либрации. В главе 13 приведено большое количество графиков, наглядно иллюстрирующих влияние солнечных возмущений и их зависимость от начальных условий.

Остальная часть главы 13 посвящена рассмотрению задачи о существовании и устойчивости периодических движений вблизи L_4 с учетом солнечных возмущений. Изложение опирается в основном на аналитические исследования, проведенные Брэквилом и Принглем [106], Шехтером [170] и Кэмилом [144]. Показано, что во вращающейся системе координат существуют устойчивые периодические орбиты; их форма близка к эллипсу с полуосями 145 000 *км* и 71 000 *км*, а период движения приблизительно равен синодическому месяцу (29,53 *сут*).

В главе 14 изложены основы теории пассивного движения космического аппарата в окрестности прямолинейной точки либрации L_2 системы Земля—Луна. Сначала дается подробный вывод уравнений движения в виде, удобном для применения асимптотических методов исследования, приводятся оценки сил, действующих на космический аппарат, и находятся амплитуды вынужденных колебаний космического аппарата вблизи L_2, обусловленных гравита-

ционными солнечными возмущениями и силами светового давления. Затем в качестве модели для описания движения космического аппарата принимается пространственная эллиптическая ограниченная задача трех тел Земля — Луна — космический аппарат и при помощи преобразования Биркгофа с использованием метода малого параметра построена приближенная теория движения космического аппарата вблизи L_2. Формулы этой теории применены затем в задаче, учитывающей влияние Солнца. В последнем параграфе главы 14 даны оценки точности построенной теории.

В Дополнении на основе работ Ю. В. Батракова [6], В. К. Абалакина [1] и С. Г. Журавлева [25, 184, 185] рассмотрены точки либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида.

ГЛАВА 1

ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Уравнения движения ограниченной задачи трех тел

Пусть m_1, m_2 и m_3 — массы трех материальных точек S, J и P, движущихся под действием взаимного гравитационного притяжения, определяемого законом Ньютона. Будем считать, что m_1 и m_2 — конечные массы ($m_1 \geqslant m_2$), а массу m_3 предположим малой по сравнению с массами m_1 и m_2. Из-за малости массы тела P его влиянием на движение тел S и J можно пренебречь и, таким образом, мы придем к ограниченной задаче трех тел, которая заключается в исследовании движения тела P бесконечно малой массы под действием притяжения тел S и J, массы которых конечны.

Движение тела J относительно тела S определяется из задачи двух тел. Пусть r — расстояние между телами S и J, p и e — параметр и эксцентриситет их кеплеровской орбиты, ν — истинная аномалия, c — константа интеграла площадей и f — гравитационная постоянная. Тогда

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}, \quad c^2 = f(m_1 + m_2)\,p, \quad \frac{d\nu}{dt} = \frac{c}{r^2}. \tag{1.1}$$

В зависимости от величины эксцентриситета можно различать следующие варианты задачи трех тел: гиперболическую ограниченную задачу, когда орбита тела J — гипербола ($e > 1$); эллиптическую ограниченную задачу, когда орбита тела J — эллипс ($0 < e < 1$); круговую ограниченную задачу, в которой орбита тела J — окружность ($e = 0$). Можно также рассматривать параболическую ($e = 1$) и прямолинейную (когда тело J движется по прямой, проходящей через S) ограниченные задачи.

Если тело P бесконечно малой массы во все время движения находится в плоскости движения тел S и J, то говорят, что соответствующая ограниченная задача *плоская*; если же тело P в своем движении выходит из плоскости орбиты тел S и J, то говорят о *пространственной* ограниченной задаче.

Получим дифференциальные уравнения, определяющие движение тела P в ограниченной задаче трех тел. Введем (рис. 1) систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс тел S и J. Плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты тела J относительно S. Ось Ox направим по прямой SJ в сторону тела J.

Кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy совпадает с направлением вращения тела J относительно тела S. Ось Oz дополняет оси Ox и Oy до правой системы координат.

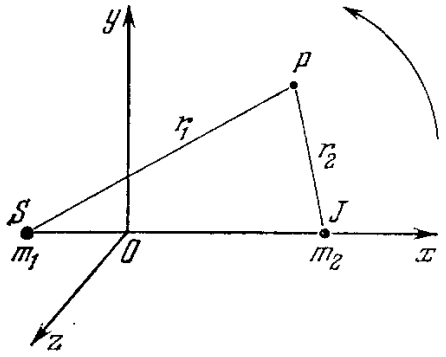

Рис. 1. К выводу уравнений движения.

Кинетическая энергия T тела P и силовая функция U вычисляются по формулам

$$T = \frac{1}{2} m_3 [(\dot{x} - \dot{\nu}y)^2 + (\dot{y} + \dot{\nu}x)^2 + \dot{z}^2], \tag{1.2}$$

$$U = fm_3 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right). \tag{1.3}$$

Точкой в (1.2) и далее обозначается дифференцирование по времени t. Величины r_1 и r_2 в (1.3) — расстояния тела P от тел S и J соответственно:

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r\right)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r\right)^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.4}$$

При помощи функции Лагранжа $L = T + U$ выписываем дифференциальные уравнения движения тела P

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{\nu}\dot{y} - \ddot{\nu}y - \dot{\nu}^2 x &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{\nu}\dot{x} + \ddot{\nu}x - \dot{\nu}^2 y &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь через W обозначена силовая функция (1.3), разделенная на m_3. Сделаем в уравнениях (1.5) замену переменных, введенную Нехвилом [22]:

$$x = r\xi, \quad y = r\eta, \quad z = r\zeta, \tag{1.6}$$

где r определяется формулами кеплеровского движения (1.1). Кроме того, перейдем к новой независимой переменной истинной аномалии ν. Производные по ν обозначим штрихами. Получаем такие соотношения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{c^2}{p^3} [(1 + e\cos\nu)\xi'' + e\cos\nu\xi](1 + e\cos\nu)^3, \\ \dot{y} &= \frac{c}{p} [(1 + e\cos\nu)\eta' + e\sin\nu\eta], \\ \dot{\nu} &= \frac{c}{p^2}(1 + e\cos\nu)^2, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\ddot{\nu} = -\frac{2c^2 e}{p^4}\sin\nu(1+e\cos\nu)^3,$$
$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{(1+e\cos\nu)^2}{p^2}\frac{\partial W}{\partial \xi}, \tag{1.7}$$

где в функции W, входящей в правую часть последнего равенства, величины r_1 и r_2 вычисляются по формулам

$$r_1 = \sqrt{\left(\xi + \frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$
$$r_2 = \sqrt{\left(\xi - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Подставив выражения (1.7) в первое уравнение системы (1.5), получим

$$\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1+e\cos\nu}\xi = \frac{p}{c^2}\frac{1}{1+e\cos\nu}\frac{\partial W}{\partial \xi}.$$

Аналогично преобразуются остальные уравнения системы (1.5). В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1+e\cos\nu}\xi = \frac{1}{1+e\cos\nu}\frac{\partial W}{\partial \xi},$$
$$\eta'' + 2\xi' - \frac{1}{1+e\cos\nu}\eta = \frac{1}{1+e\cos\nu}\frac{\partial W}{\partial \eta}, \tag{1.8}$$
$$\zeta'' + \frac{e\cos\nu}{1+e\cos\nu}\zeta = \frac{1}{1+e\cos\nu}\frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

где теперь

$$W = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2} \quad \left(0 < \mu \leqslant \frac{1}{2}\right), \tag{1.9}$$
$$r_1 = \sqrt{(\xi+\mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\xi+\mu-1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Если ввести функцию Ω по формуле

$$\Omega = \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) - \frac{1}{2}e\cos\nu\zeta^2 + W,$$

то уравнения движения (1.8) запишутся в более компактной форме:

$$\xi'' - 2\eta' = \frac{1}{1+e\cos\nu}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi},$$
$$\eta'' + 2\xi' = \frac{1}{1+e\cos\nu}\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \tag{1.10}$$
$$\zeta'' = \frac{1}{1+e\cos\nu}\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}.$$

§ 2. Точки либрации — частные решения ограниченной задачи трех тел

Покажем, что уравнения (1.10) удовлетворяются некоторыми постоянными значениями координат Нехвила ξ, η, ζ. Из (1.9) — (1.10) сразу следует, что постоянное решение

$$\xi = \xi^*, \quad \eta = \eta^*, \quad \zeta = \zeta^* \tag{2.1}$$

возможно только тогда, когда $\zeta^* = 0$, а ξ^* и η^* удовлетворяют системе уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} \frac{\xi+\mu}{r_1}\frac{\partial W}{\partial r_1} + \frac{\xi+\mu-1}{r_2}\frac{\partial W}{\partial r_2} &= -\xi, \\ \frac{\eta}{r_1}\frac{\partial W}{\partial r_1} + \frac{\eta}{r_2}\frac{\partial W}{\partial r_2} &= -\eta. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Система уравнений (2.2) эквивалентна совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{aligned} &\eta = 0, \\ &\frac{\xi+\mu}{r_1}\frac{\partial W}{\partial r_1} + \frac{\xi+\mu-1}{r_2}\frac{\partial W}{\partial r_2} = -\xi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial r_1} = -\frac{r_1}{r_2}\frac{\partial W}{\partial r_2} - r_1, \\ &\frac{\xi+\mu}{r_1}\frac{\partial W}{\partial r_1} + \frac{\xi+\mu-1}{r_2}\frac{\partial W}{\partial r_2} = -\xi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Каждому решению систем (2.3) — (2.4) соответствует в системе координат $O\xi\eta\zeta$ равновесное решение уравнений движения (1.10). В системе координат $O\xi\eta\zeta$ точки S и J неподвижны и равновесные решения соответствуют таким частным движениям тела P, когда они вместе с телами S и J образуют некоторую неизменную конфигурацию.

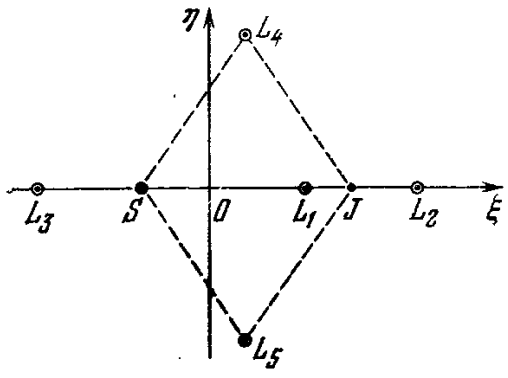

Рис. 2. Прямолинейные и треугольные точки либрации.

Равновесные решения уравнений Нехвила (1.10) часто называют точками либрации. Существуют только пять точек либрации. Три из них, L_1, L_2 и L_3, лежат на прямой, проходящей через S и J, а две остальные, L_4 и L_5, образуют с телами S и J равносторонние треугольники. Схематически расположение точек либрации ограниченной задачи трех тел показано на рис. 2. Точки либрации L_1, L_2, L_3, и L_4, L_5 называют *прямолинейными* и *треугольными* точками либрации соответственно.

В абсолютной системе координат точки либрации соответствуют таким частным движениям в задаче трех тел, для которых три тела S, J и P описывают подобные кеплеровские орбиты относительно их общего центра масс.

Найдем теперь точки либрации, т. е. решения систем уравнений (2.3) и (2.4). Рассмотрим сначала систему (2.4). Подставив выражение для $\partial W/\partial r_1$ из первого уравнения системы (2.4) во второе уравнение, получим

$$\frac{\partial W}{\partial r_2} = -\mu r_2, \tag{2.5}$$

и тогда из первого уравнения следует, что

$$\frac{\partial W}{\partial r_1} = -(1-\mu) r_1. \tag{2.6}$$

Воспользовавшись теперь выражением (1.9) для W, получим, что система уравнений (2.4) имеет единственное вещественное решение $r_1 = r_2 = 1$. Это решение соответствует треугольным точкам либрации L_4 и L_5 (см. рис. 2). Точка L_4 задается координатами $(1-2\mu)/2$, $\sqrt{3}/2$, 0, а точка L_5 имеет координаты $(1-2\mu)/2$, $-\sqrt{3}/2$, 0. Она расположена симметрично точке L_4 относительно оси $O\xi$.

Прямолинейные точки либрации найдутся из второго уравнения системы (2.3), которое при $\eta = \zeta = 0$ запишется в таком виде:

$$f(\xi) = \xi - (1-\mu)\frac{|\xi+\mu|}{(\xi+\mu)^3} - \mu\frac{|\xi+\mu-1|}{(\xi+\mu-1)^3} = 0. \tag{2.7}$$

Функция $f(\xi)$ непрерывна и конечна на всей вещественной оси, кроме значений ξ, равных $\pm\infty$, $-\mu$ и $1-\mu$, где она обращается в бесконечность. Вычислим производную функции $f(\xi)$. Имеем

$$\frac{df}{d\xi} = 1 + 2(1-\mu)\frac{|\xi+\mu|}{(\xi+\mu)^4} + 2\mu\frac{|\xi+\mu-1|}{(\xi+\mu-1)^4}. \tag{2.8}$$

В каждом из трех интервалов

$$(-\infty, -\mu), \quad (-\mu, 1-\mu), \quad (1-\mu, +\infty), \tag{2.9}$$

на которые числовая ось разбивается точками разрыва функции $f(\xi)$, последняя монотонно возрастает, как это видно из выражения для производной (2.8). Учитывая еще тот факт, что при положительном ε, стремящемся к нулю, имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim f\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\lim f(-\mu-\varepsilon) = \lim f(-\mu+\varepsilon) =$$

$$= -\lim f(1-\mu-\varepsilon) = \lim f(1-\mu+\varepsilon) = -\lim f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\infty,$$

получаем, что в каждом из интервалов (2.9) существует, и притом

только одно, решение $\xi = \xi^*$ уравнения (2.7). Эти решения и дают три прямолинейные точки либрации. По сложившейся традиции точка либрации, лежащая в интервале $(-\infty, -\mu)$, обозначается через L_3, точка либрации, лежащая в интервале $(-\mu, 1-\mu)$, обозначается через L_1 и, наконец, точка либрации L_2 лежит в интервале $(1-\mu, +\infty)$.

Покажем, что абсцисса каждой из прямолинейных точек либрации удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению пятой степени, которое для каждой из точек либрации записывается по-своему.

Получим сначала уравнение для точки L_3. Обозначим через ρ расстояние от точки L_3 до тела S. Тогда $\xi = -\mu - \rho$ и из уравнения (2.7) получаем алгебраическое уравнение пятой степени относительно ρ:

$$\rho^5 + (2+\mu)\rho^4 + (2\mu+1)\rho^3 + (\mu-1)\rho^2 + 2(\mu-1)\rho + \mu - 1 = 0. \quad (2.10)$$

Чтобы получить уравнение для точки L_1, положим $\xi = 1 - \mu - \rho$. Здесь теперь ρ есть расстояние от точки либрации до тела J. Из (2.7) получаем

$$\rho^5 - (3-\mu)\rho^4 + (3-2\mu)\rho^3 - \mu\rho^2 + 2\mu\rho - \mu = 0. \quad (2.11)$$

И, наконец, для получения уравнения, определяющего положение точки либрации L_2, положим $\xi = 1 - \mu + \rho$, где ρ — расстояние от точки L_2 до тела J. Уравнение, определяющее ρ, имеет вид

$$\rho^5 + (3-\mu)\rho^4 + (3-2\mu)\rho^3 - \mu\rho^2 - 2\mu\rho - \mu = 0. \quad (2.12)$$

Как следует из вышеизложенного, каждое из уравнений (2.10)—(2.12) имеет единственный положительный корень. При малых значениях μ значения корней можно найти в виде рядов. Значения координаты ξ_k, определяющей положение прямолинейной точки либрации L_k, может быть легко вычислено (см., например, [22]). Получаются следующие разложения:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{26}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} + \ldots, \\
\xi_2 &= 1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{28}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} + \ldots, \\
\xi_3 &= -1 - \frac{5}{12}\mu - \ldots
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (2.13) видно, как изменяется положение прямолинейных точек либрации, когда меньшая из двух конечных масс уменьшается. Точка L_1 перемещается слева направо, приближаясь к своему предельному положению, совпадающему с телом J меньшей массы m_2. Положение точки L_2 также стремится совпасть с положением

тела J, но это стремление происходит справа налево. Точка либрации L_3 при уменьшении μ перемещается слева направо, стремясь к своему предельному положению, находящемуся на единичном расстоянии слева от тела большей массы m_1.

Уравнения (2.10)—(2.12) позволяют также оценить расстояния от точек либрации до тел S и J при произвольных значениях μ. Обозначим через $F_k(\rho)$ левые части уравнений (2.10)—(2.12), определяющих положения точек либрации L_k относительно тел S и J. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &F_1(0) = -\mu < 0, && F_1(1-\mu) = (1-2\mu)(1-\mu+\mu^2) > 0, \\ &F_2(0) = -\mu < 0, && F_2(1) = 7(1-\mu) > 0, \\ &F_3(0) = \mu - 1 < 0, && F_3(1) = 7\mu > 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Соотношения (2.14) показывают, что расстояния точек либрации L_2 и L_3 соответственно от тел J и S при всех μ ($0 < \mu \leqslant 1/2$) лежат в интервале (0, 1). Точка либрации L_1 расположена между центром масс тел S и J и телом J меньшей массы. Отметим еще очевидный факт, что точка либрации L_1 совпадает с центром масс тел S и J в том случае, когда их массы равны ($\mu = 1/2$).

На рис. 3 представлены графики абсцисс ξ_k ($k = 1, 2, 3$), соответствующих точкам либрации L_k, в зависимости от μ. Эти графики получены с помощью численного решения уравнения (2.7) при произвольных μ из интервала $(0, 1/2)$.

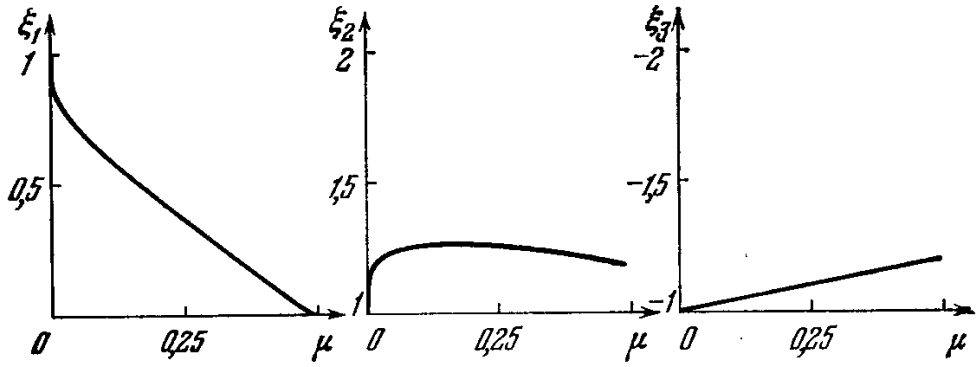

Рис. 3. Корни уравнения (2.7) как функции μ.

Если в Солнечной системе учитывать только притяжение Солнца и одной из планет, то каждой планете будут соответствовать три прямолинейных точки либрации. Таким образом, тело бесконечно малой массы, попав в любую из этих точек либрации с нулевой относительной скоростью, все время двигалось бы по эллипсу, подобному эллипсу соответствующей планеты, и оставалось бы на прямой, проходящей через эту планету и Солнце. В реальной ситуации надо, конечно, учитывать и малые возмущения от других планет.

Таблица 1

Притягивающие тела		$\mu \cdot 10^{+5}$	Расстояние точки L_k от тела S		
S	J		L_1	L_2	L_3
Солнце	Меркурий	0,0163399	0,996214	1,003795	1—0,0000001
Солнце	Венера	0,2447738	0,990684	1,009373	1—0,00000142
Солнце	Земля	0,3003433	0,99003	1,010037	1—0,00000175
Солнце	Земля + Луна	0,3040429	0,989989	1,010078	1—0,00000178
Солнце	Марс	0,0323834	0,995246	1,004769	1—0,00000019
Солнце	Юпитер	95,3843512	0,93332	1,069784	1—0,000556
Солнце	Сатурн	28,5632676	0,955039	1,04635	1—0,000167
Селнце	Уран	4,3725405	0,975773	1,024624	1—0,000026
Солнце	Нептун	5,2938063	0,974193	1,026258	1—0,000031
Солнце	Плутон	0,2499994	0,990619	1,00944	1—0,0000014
Земля	Луна	1215,06683	0,849065	1,167833	1—0,007088

Точки либрации для различных тел Солнечной системы представлены в табл. 1.

За единицу расстояния в табл. 1 принята длина соответствующего радиуса-вектора тела меньшей массы относительно тела S большей массы. Интересно отметить, что точки либрации L_1 и L_2 для всех планет расположены значительно дальше, чем орбиты спутников этих планет. Например, для системы Солнце — Земля точки либрации L_1 и L_2 лежат от Земли на расстоянии, превосходящем расстояние между Землей и Луной примерно в четыре раза.

§ 3. Об устойчивости точек либрации

В этом параграфе рассмотрим устойчивость точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. Полное исследование устойчивости будет проведено в главах 7 и 8, а здесь мы остановимся только на доказательстве давно известного утверждения [22]: в круговой ограниченной задаче трех тел прямолинейные точки либрации неустойчивы, а треугольные — устойчивы в первом приближении, если отношение масс тел S и J достаточно мало; более точно, если выполнено следующее неравенство:

$$0 < 27\mu\,(1 - \mu) < 1. \tag{3.1}$$

При $e = 0$ уравнения возмущенного движения, линеаризованные в окрестности прямолинейных точек либрации L_k ($k = 1, 2, 3$), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' - (1 + 2a_k)\xi &= 0, \\ \eta'' + 2\xi' - (1 - a_k)\eta &= 0, \\ \zeta'' + a_k\zeta &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$a_k = \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}, \qquad (3.3)$$

$$r_1 = |\xi_k + \mu|, \quad r_2 = |\xi_k + \mu - 1| \qquad (k = 1, 2, 3).$$

А линейные уравнения, соответствующие треугольным точкам либрации L_k, запишутся так:

$$\xi'' - 2\eta' - \frac{3}{4}\xi - (-1)^k \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\eta = 0, \qquad (k = 4, 5).$$

$$\eta'' + 2\xi' - \frac{9}{4}\eta - (-1)^k \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\xi = 0, \qquad (3.4)$$

$$\xi'' + \xi = 0$$

Будем пользоваться следующими теоремами Ляпунова об устойчивости по первому приближению [49], которые приводим здесь без доказательства.

Теорема 1. *Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво при любом выборе членов порядка выше первого в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.*

Теорема 2. *Если характеристическое уравнение системы первого приближения не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с вещественными частями, равными нулю, то члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения можно выбрать так, чтобы получить по желанию как устойчивость, так и неустойчивость.*

Характеристическое уравнение системы первого приближения (3.2) распадается на два уравнения: одно квадратное, соответствующее пространственной переменной ζ, а другое биквадратное, соответствующее переменным ξ, η.

Квадратное уравнение записывается в виде

$$\lambda^2 + a_k = 0 \qquad (3.5)$$

и имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\sqrt{a_k}$, так как величина a_k положительна (см. (3.3)).

Биквадратное уравнение записывается в виде равенства нулю определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - (1 + 2a_k) & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - (1 - a_k) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получаем

$$\lambda^4 + (2 - a_k)\lambda^2 + (1 - a_k)(1 + 2a_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \qquad (3.6)$$

Легко показать, что уравнение (3.6) для каждой точки либрации L_1, L_2 и L_3 имеет два вещественных и два чисто мнимых корня.

В самом деле, чтобы показать это, достаточно убедиться в том, что величина $1 - a_k$ для каждого $k = 1, 2$ и 3 отрицательна.

Для точки L_1 это сразу следует из (3.3), так как $0 < r_1 < 1$ и $0 < r_2 < 1$.

Для точки L_2 выразим, следуя [89], μ через r_2 из уравнения (2.12):

$$\mu = \frac{r_2^5 + 3r_2^4 + 3r_2^3}{r_2^4 + 2r_2^3 + r_2^2 + 2r_2 + 1}.$$

Подставив это выражение в разность $1 - a_k$ и учтя, что в рассматриваемом случае $r_1 = 1 + r_2$, получим

$$1 - a_2 = \frac{(r_2^3 - 1)(r_2^2 + 3r_2 + 3)}{(r_2 + 1)(r_2^4 + 2r_2^3 + r_2^2 + 2r_2 + 1)}. \tag{3.7}$$

Эта величина отрицательна, так как здесь $r_2 < 1$ (см. предыдущий параграф).

Для точки L_3 можно воспользоваться уравнением (2.10) и, учтя, что в этом случае $r_2 = 1 + r_1$, для разности $1 - a_3$ получим выражение, аналогичное (3.7), в котором надо только r_2 заменить на r_1. А так как здесь $r_1 < 1$, то величина $1 - a_3$ для точки L_3 будет отрицательна.

Таким образом, уравнение (3.6), рассматриваемое как квадратное относительно λ^2, имеет один положительный корень и один отрицательный. Следовательно, для каждой прямолинейной точки либрации L_k ($k = 1, 2, 3$) характеристическое уравнение (3.6) имеет четыре корня вида $\pm\alpha$, $\pm i\beta$, где α и β — вещественные величины, отличные от нуля. Отсюда, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению, следует неустойчивость прямолинейных точек либрации круговой ограниченной задачи трех тел.

Характеристическое уравнение системы первого приближения (3.4) для треугольных точек либрации L_4 и L_5 тоже распадается на квадратное, соответствующее переменной ζ и имеющее два чисто мнимых корня $\pm i$, и биквадратное

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0, \tag{3.8}$$

соответствующее переменным ξ, η.

Если

$$27\mu(1 - \mu) > 1, \tag{3.9}$$

то уравнение (3.8) имеет две пары комплексных корней и, следовательно, два из этих четырех корней заведомо будут иметь положи-

тельные вещественные части. Поэтому, согласно теореме Ляпунова, при выполнении условия (3.9) треугольные точки либрации неустойчивы.

Если же выполнено неравенство $0 < 27\mu\,(1-\mu) < 1$, то уравнение (3.8) имеет четыре различных чисто мнимых корня и точки либрации устойчивы в первом приближении. Полностью вопрос об устойчивости в этом случае не может быть решен рассмотрением линейной задачи. Согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению строгое решение возможно лишь при учете нелинейных членов в уравнениях возмущенного движения.

Если, наконец, $27\mu\,(1-\mu) = 1$, то уравнение (3.8) имеет две пары кратных чисто мнимых корней $\pm i\sqrt{2}/2$. И в этом случае уже нет устойчивости в линейном приближении, так как (см., например, [89]) общее решение системы (3.4) первого приближения содержит неограниченно растущие со временем слагаемые вида $\nu \sin \frac{\sqrt{2}}{2}\nu$ и $\nu \cos \frac{\sqrt{2}}{2}\nu$. В нелинейной задаче, однако, точки либрации могут стать устойчивыми.

Случаи, когда задача об устойчивости гамильтоновых систем не решается линейным приближением, будут исследованы в последующих главах. При исследовании мы часто будем использовать теоремы второго метода Ляпунова теории устойчивости движения. Приведем здесь некоторые определения и сформулируем необходимые в дальнейшем теоремы. Доказательство этих теорем можно найти, например, в [51, 95].

Пусть дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\,(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.10}$$

где функции X_i, например, аналитичны относительно $x_1, \ldots, x_n$ и непрерывны по t в области

$$t \geqslant t_0, \quad |x_i| \leqslant h. \tag{3.11}$$

Предположим, что $X_i\,(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$. Тогда система (3.10) допускает частное решение $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, которое будем называть *невозмущенным*. Пусть в момент времени t, равный t_0, $x_i = x_{i0}$, и будем рассматривать движение при $t > t_0$. Тогда $x_i\,(t)$ называется *возмущенным движением*, а уравнения (3.10) — *уравнениями возмущенного движения*.

Рассмотрим функцию $V\,(t, x_1, \ldots, x_n)$, определенную в области (3.11). Пусть функция V дифференцируема. Тогда ее полная производная по времени в силу уравнений возмущенного

движения запишется так:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i. \tag{3.12}$$

Определение. Если функция V и ее производная (3.12) непрерывны и однозначны в области (3.11) и если они тождественно равны нулю при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, то функцию V называют *функцией Ляпунова.*

Определение. Не зависящая от t функция Ляпунова V называется *знакоопределенной* (определенно-положительной или определенно-отрицательной), если она при

$$|x_i| \leqslant h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где h — достаточно малое положительное число, может принимать значения только одного знака и обращается в нуль только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Определение. Функция Ляпунова V, явно зависящая от t, называется *определенно-положительной*, если она в области (3.11) при t_0 достаточно большом и h достаточно малом удовлетворяет неравенству

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n),$$

где W — определенно-положительная функция.

Определение. Функция V называется *знакопостоянной*, если в области (3.11) при t_0 достаточно большом и h достаточно малом она принимает значения только одного определенного знака, но может обращаться в нуль и при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$.

Определение. Функция V, не являющаяся ни знакоопределенной, ни знакопостоянной, называется *знакопеременной.*

Определение. Говорят, что функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ допускает *бесконечно малый высший предел*, если для любого положительного числа ε можно найти другое положительное число δ такое, что при всех значениях $(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих неравенствам

$$t \geqslant t_0, \quad |x_i| \leqslant \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

будет выполняться неравенство

$$|V(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема (теорема Ляпунова об устойчивости). *Если существует знакоопределенная функция V, для которой производная в силу уравнений возмущенного движения есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с V, или тождественно обращается в нуль, то невозмущенное движение устойчиво.*

Теорема (теорема Ляпунова о неустойчивости). *Если существует допускающая бесконечно малый высший предел функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *производная которой в силу уравнений возмущенного движения есть функция знакоопределенная, а сама функция* V *в области* (3.11) *при* t_0 *достаточно больших и* h *достаточно малых может принимать значения того же знака, что и производная, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Определение. *Областью* $V > 0$ называется одна из областей окрестности начала координат

$$|x_i| \leqslant h,$$

которая ограничена поверхностью $V = 0$ и в которой функция V принимает только положительные значения.

Теорема (теорема Четаева о неустойчивости). *Если существует функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ *такая, что*

а) *при сколь угодно больших* t *в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область* $V > 0$;

б) *в области* $V > 0$ *функция* V *ограничена;*

в) *в области* $V > 0$ *производная* dV/dt *в силу уравнений возмущенного движения положительна, причем для всех значений* $t, x_1, \ldots, x_n$, *связанных соотношением* $V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \alpha$, *где* α *— какое-нибудь положительное число, выполняется неравенство* $dV/dt \geqslant \beta$, *где* β *— тоже некоторое положительное число, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Определение. Функцию V, удовлетворяющую последней теореме, называют *функцией Четаева.*

ГЛАВА 2

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами

Дифференциальные уравнения возмущенного движения, к рассмотрению которых приводит задача об устойчивости движения, как правило, нелинейны. Их исследование начинается обычно с анализа соответствующей системы уравнений первого приближения. Будем рассматривать только те случаи, когда дифференциальные уравнения первого приближения линейные.

Итак, пусть задана гамильтонова система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{IHx}, \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}). \tag{1.1}$$

Переменные x_k и x_{n+k} — канонически сопряженные (x_k — координаты, x_{n+k} — импульсы) в соответствующей механической задаче. Матрица $\mathbf{I}$ порядка $2n$ имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{Vmatrix} \quad (\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{I},\ \mathbf{I}^2 = -\mathbf{E}_{2n},\ \det \mathbf{I} = 1), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{E}_k$ — единичная матрица порядка k. Знаком «т» обозначена операция транспонирования матрицы. Через $\mathbf{H}$ в системе уравнений (1.1) обозначена вещественная симметрическая матрица порядка $2n$. Она либо постоянна, либо является непрерывной, 2π-периодической по t.

Пусть матрица $\mathbf{H}$ в системе уравнений (1.1) постоянна. Для решения вопроса об устойчивости рассмотрим характеристическое уравнение

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{IH} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = 0. \tag{1.3}$$

Покажем, что характеристический многочлен $p(\lambda)$ — четная функция λ. Для этого рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{IH} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{IH} - \lambda\mathbf{E}_{2n})^{\mathrm{T}} = \det(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}^{\mathrm{T}} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) =$$
$$= \det(-\mathbf{HI} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{I}^2\mathbf{HI} + \lambda\mathbf{IE}_{2n}\mathbf{I}) = \det\mathbf{I}\,(\mathbf{IH} + \lambda\mathbf{E}_{2n})\,\mathbf{I} =$$
$$= \det\mathbf{I}\det(\mathbf{IH} + \lambda\mathbf{E}_{2n})\det\mathbf{I} = 1 \cdot \det(\mathbf{IH} + \lambda\mathbf{E}_{2n}) \cdot 1 = p(-\lambda).$$

Таким образом, уравнение (1.3) содержит только четные степени λ. Поэтому, если у него есть корень $\lambda = a$, имеющий отрицательную вещественную часть, то обязательно будет и корень $\lambda = -a$ с положительной вещественной частью, а значит, система (1.1) (а вместе с ней и невозмущенное движение) неустойчива.

Мы получили, следовательно, такое условие устойчивости системы (1.1): для устойчивости системы (1.1) необходимо, чтобы корни характеристического уравнения были чисто мнимыми. Это условие будет и достаточным, если дополнительно потребовать, чтобы матрица $\mathbf{IH}$ приводилась к диагональной форме [51].

Но будет ли при выполнении этих условий устойчиво невозмущенное движение — зависит от членов более высокого порядка в нелинейных уравнениях возмущенного движения.

Выполнимость необходимых и достаточных условий устойчивости системы (1.1) гарантирована в том частном случае, когда соответствующая функция Гамильтона H знакоопределенна. Тогда, приняв ее за функцию Ляпунова V и учтя, что $H = \text{const}$, на основании теоремы Ляпунова получим вывод об устойчивости системы (1.1). В этом случае характеристическое уравнение всегда имеет только чисто мнимые корни и независимо от их кратности матрица $\mathbf{IH}$ обязательно приводится к диагональной форме.

В случае знакоопределенности H невозмущенное движение автономной гамильтоновой системы будет устойчивым и в строгой нелинейной постановке задачи. Поэтому для полного решения вопроса об устойчивости невозмущенного движения в этом случае достаточно рассмотрения линейной системы (1.1) или квадратичной части функции Гамильтона. Но уравнение (1.3) может иметь чисто мнимые корни и тогда, когда функция Гамильтона не будет знакоопределенной. Такой будет, например, следующая система дифференциальных уравнений первого приближения:

$$\frac{dx_k}{dt} = (-1)^{k+1}\sigma_k x_{2+k}, \quad \frac{dx_{2+k}}{dt} = (-1)^k \sigma_k x_k \qquad (k = 1, 2). \tag{1.4}$$

Характеристическое уравнение системы (1.4) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\sigma_1$ и $\pm i\sigma_2$. Соответствующая матрица $\mathbf{IH}$ приводима к диагональной форме, а функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sigma_1(x_1^2 + x_3^2) - \frac{1}{2}\sigma_2(x_2^2 + x_4^2) \qquad (\sigma_k > 0)$$

не является знакоопределенной. В этом случае для решения задачи об устойчивости невозмущенного движения недостаточно рассмотрения линейной системы (1.4) и необходимо проводить анализ полной нелинейной системы уравнений возмущенного движения.

§ 2. Нормальная форма автономной системы линейных гамильтоновых уравнений в случае простых чисто мнимых корней характеристического уравнения

Продолжим исследование линейной системы дифференциальных уравнений (1.1). Предположим, что соответствующее ей характеристическое уравнение (1.3) имеет только простые чисто мнимые корни. Обозначим их через $\lambda_k = i\sigma_k$, $\lambda_{n+k} = -i\sigma_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Знаки вещественных величин σ_k пока не фиксируем. Они будут определены ниже. Найдем вещественное линейное каноническое преобразование $x_j \to y_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 2n$), приводящее систему (1.1) к нормальной форме. *Нормальной формой* системы уравнений (1.1) мы называем такую систему дифференциальных уравнений, которой соответствует функция Гамильтона, равная алгебраической сумме гамильтонианов n линейных, не связанных между собой осцилляторов:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (y_k^2 + y_{n+k}^2). \tag{2.1}$$

Решение задачи о получении нормальной формы линейной системы (1.1) необходимо при исследовании устойчивости нелинейных уравнений возмущенного движения, при анализе нелинейных колебаний, при построении приближенных решений нелинейных гамильтоновых систем, где в качестве первого приближения берется обычно решение линейной задачи. Поэтому крайне желательно выбирать такие координаты, в которых решение линейной задачи записывалось бы наиболее просто. Простейшей вещественной формой уравнений (1.1) и будет нормальная форма.

Общая задача об алгебраических свойствах линейных систем гамильтоновых дифференциальных уравнений исследована достаточно подробно [15, 28, 49, 90, 98, 109, 145, 149, 154, 157, 179—183]. Для систем с постоянными коэффициентами в работах [15, 28, 98] получены конструктивные методы нормализации. Мы рассмотрим задачу получения нормальной формы иначе, чем в упомянутых работах [15, 28, 98], и получим алгоритм нормализации, который будет весьма простым, так как его применение сводится только к нахождению собственных векторов матрицы $\mathbf{IH}$.

Введем обозначение $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n})$. Тогда, учитывая (2.1), получим, что нормальная форма линейной системы (1.1) запишется в виде следующей гамильтоновой системы уравнений:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{IH}^*\mathbf{y}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{H}^*$ — вещественная диагональная матрица, диагональные

элементы которой определены равенствами $h^*_{kk} = h^*_{n+k,\,n+k} = \sigma_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Переход от переменных x к переменным y зададим с помощью матрицы A в виде равенства

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{2.3}$$

Из (1.1) и (2.2)—(2.3) получаем, что матрица A должна удовлетворять следующему матричному уравнению:

$$\mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{H}^* = \mathbf{I}\mathbf{H}\mathbf{A}. \tag{2.4}$$

Кроме того, для каноничности преобразования (2.3) матрицу A ищем симплектической [16], т. е. она должна удовлетворять еще одному матричному уравнению

$$\mathbf{A}^T\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{2.5}$$

Решение матричного уравнения (2.4) не единственно. Чтобы найти нормализующее преобразование, надо из бесчисленного множества решений матричного уравнения (2.4) выбрать хотя бы одно вещественное, удовлетворяющее уравнению (2.5).

Решение A уравнения (2.4) будем искать в виде $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, где матрица C определена равенством

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} i\mathbf{E}_n & \mathbf{E}_n \\ -i\mathbf{E}_n & \mathbf{E}_n \end{Vmatrix}. \tag{2.6}$$

Подставив в уравнение (2.4) вместо A его выражение через B и C, получим следующее уравнение для нахождения матрицы B:

$$\mathbf{B}\mathbf{D} = \mathbf{I}\mathbf{H}\mathbf{B}, \tag{2.7}$$

где D — диагональная форма матрицы IH. Для ее диагональных элементов имеют место равенства $d_{kk} = -d_{n+k,\,n+k} = i\sigma_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Таким образом, теперь надо найти матрицу B, приводящую матрицу IH исходной системы уравнений (1.1) к диагональной форме. Она строится следующим образом [17]. Ее столбцами должны быть собственные векторы матрицы IH. Именно, пусть m-й столбец матрицы B будет собственным вектором $\mathbf{e}_m$, соответствующим собственному числу $i\sigma_m$, а $(n + m)$-й столбец будет вектором $\mathbf{e}_{n+m}$, соответствующим собственному числу $\lambda_{m+n} = -i\sigma_m$ ($m = 1, 2, \ldots, n$).

Собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя. Примем этот множитель вещественным и одинаковым для векторов $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{e}_{n+m}$. Кроме того, соответствующие компоненты этих векторов выберем комплексно сопряженными. Такой выбор собственных векторов обеспечивает вещественность матрицы A. Произвольные множители собственных векторов определяются из условия их нормировки, которое ниже будет получено из условия (2.5) каноничности преобразования (2.3).

Подставив выражение $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ в уравнение (2.5), получим

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{IBC} = \mathbf{I}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим подробно матрицу $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{IB}$, которую для краткости обозначим через $\mathbf{F}$. Элемент f_{kl} этой матрицы, как нетрудно проверить, равняется скалярному произведению векторов $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{Ie}_l$:

$$f_{kl} = (\mathbf{e}_k, \mathbf{Ie}_l). \tag{2.9}$$

Но так как для любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{Ib}) = -(\mathbf{Ia}, \mathbf{b}), \tag{2.10}$$

то отсюда следует, что матрица $\mathbf{F}$ — кососимметрическая. Рассмотрим дальше структуру матрицы $\mathbf{F}$. Докажем, что $f_{kl} = 0$, если $|\, l - k \,| \neq n$.

Для доказательства рассмотрим очевидное равенство

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{I}^2\mathbf{He}_l) = (\mathbf{e}_k, \mathbf{HI}^2\mathbf{e}_l). \tag{2.11}$$

Перепишем это равенство, преобразуя его левую и правую части. Имеем

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{I}^2\mathbf{He}_l) = (\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_k, \mathbf{Ie}_l),$$
$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{IIHe}_l) = -(\mathbf{IHe}_k, \mathbf{Ie}_l),$$
$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{I}\lambda_l\mathbf{e}_l) = -(\lambda_k\mathbf{e}_k, \mathbf{Ie}_l).$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$(\lambda_k + \lambda_l)f_{kl} = 0. \tag{2.12}$$

Так как согласно упорядочению собственных чисел, введенному при построении матрицы $\mathbf{B}$, величина $\lambda_k + \lambda_l = 0$ только в случае $|\, l - k \,| = n$, то из (2.12) следует, что $f_{kl} = 0$, если $|\, l - k \,| \neq n$. Таким образом, матрица $\mathbf{F}$ имеет такую структуру:

$$\mathbf{F} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2.13}$$

где $\mathbf{G}$ — диагональная матрица порядка n с элементами $g_{kk} = (\mathbf{e}_k, \mathbf{Ie}_{n+k})$. Ни один из элементов g_{kk} не равняется нулю, так как в противном случае определитель матрицы $\mathbf{F}$ равнялся бы нулю. Но

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \det \mathbf{I} \det \mathbf{B} = (\det \mathbf{B})^2 \neq 0,$$

так как матрица $\mathbf{B}$ составлена из собственных векторов, соответствующих различным собственным числам матрицы $\mathbf{IH}$.

Пусть $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{s}_k$ — действительная и мнимая части собственного вектора $\mathbf{e}_k$, соответствующего собственному числу λ_k. Тогда, учитывая комплексную сопряженность соответствующих компонент

векторов $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{e}_{n+k}$, получим для элементов матрицы G такие выражения:

$$g_{kk} = -2i(\mathbf{r}_k, \mathbf{I}\mathbf{s}_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.14}$$

Теперь из равенства (2.8) получим такое условие, обеспечивающее симплектичность матрицы A:

$$4(\mathbf{r}_k, \mathbf{I}\mathbf{s}_k) = 1. \tag{2.15}$$

Равенство (2.15) является, с одной стороны, условием нормировки собственного вектора $\mathbf{e}_k$, а с другой — условием для выбора знака σ_k в функции Гамильтона (2.1). Действительно, приравняв в уравнении $\mathbf{I}\mathbf{H}\mathbf{e}_k = i\sigma_k\mathbf{e}_k$ действительную и мнимую части, получим такую систему уравнений для $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{s}_k$:

$$\mathbf{I}\mathbf{H}\mathbf{r}_k = -\sigma_k\mathbf{s}_k, \quad \mathbf{I}\mathbf{H}\mathbf{s}_k = \sigma_k\mathbf{r}_k. \tag{2.16}$$

При одновременном изменении знаков σ_k и компонент вектора $\mathbf{r}_k$ система уравнений (2.16) не изменяется. Знак же скалярного произведения $(\mathbf{r}_k, \mathbf{I}\mathbf{s}_k)$ изменяется на противоположный. Поэтому равенству (2.15) можно всегда удовлетворить выбором знака σ_k в гамильтониане (2.1) и соответствующей нормировкой собственного вектора $\mathbf{e}_k$.

Произведя некоторые вычисления, получим, что симплектическая матрица A нормализующего преобразования невырожденная, вещественная и k-м ее столбцом будет вектор $-2\mathbf{s}_k$, а $(n + k)$-м — вектор $2\mathbf{r}_k$.

§ 3. Общие сведения о линейных системах с периодическими коэффициентами

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n), \tag{3.1}$$

где $\mathbf{A}(t)$—непрерывная, 2π-периодическая по t матрица. Докажем, следуя [21], теорему о структуре общего решения системы (3.1).

Теорема (Флоке). *Для системы* (3.1) *фундаментальная матрица решений* $\mathbf{X}(t)$, *нормированная условием* $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_n$, *представима в виде*

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t)\,e^{\mathbf{B}t}, \tag{3.2}$$

где матрица B — *постоянная, а* Y — *непрерывно дифференцируемая,* 2π-*периодическая по* t.

Для доказательства заметим прежде всего, что так как $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнения (3.1), то в силу

2π-периодичности матрицы $\mathbf{A}(t)$ фундаментальной будет также матрица $\mathbf{X}(t+2\pi)$. А это значит, что справедливо равенство

$$\mathbf{X}(t+2\pi) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная матрица. Положив в (3.3) $t = 0$, получим, что $\mathbf{C} = \mathbf{X}(2\pi)$. Таким образом,

$$\mathbf{X}(t+2\pi) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(2\pi).$$

Очевидно, что $\det \mathbf{X}(2\pi) \neq 0$. Значит, $\mathbf{X}(2\pi)$, как всякая невырожденная матрица, представима [17] в виде

$$\mathbf{X}(2\pi) = e^{2\pi\mathbf{B}}. \tag{3.4}$$

Теперь положим

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)e^{-\mathbf{B}t} \tag{3.5}$$

и проверим, что $\mathbf{Y}(t)$ — 2π-периодическая матрица. Имеем

$$\mathbf{Y}(t+2\pi) = \mathbf{X}(t+2\pi)e^{-2\pi\mathbf{B}-\mathbf{B}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(2\pi)e^{-2\pi\mathbf{B}}e^{-\mathbf{B}t} =$$
$$= \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(2\pi)\mathbf{X}^{-1}(2\pi)e^{-\mathbf{B}t} = \mathbf{Y}(t).$$

Таким образом, $\mathbf{Y}(t)$ 2π-периодична, а из (3.5), кроме того, видно, что она непрерывно дифференцируема. Из (3.5) следует еще, что фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$ представима в виде (3.2). Это и доказывает теорему Флоке.

Следует отметить, что матрицы $\mathbf{Y}(t)$ и $\mathbf{B}$, вообще говоря, комплексные [32].

Для дальнейшего введем некоторые определения. Собственные числа λ_j матрицы $\mathbf{B}$, т. е. корни уравнения

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}_n) = 0, \tag{3.6}$$

называются *характеристическими показателями системы* (3.1). Собственные числа ρ_j матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, т. е. корни уравнения

$$\det(\mathbf{X}(2\pi) - \rho\mathbf{E}_n) = 0, \tag{3.7}$$

называются *мультипликаторами системы* (3.1).

Очевидно, что

$$\rho_j = e^{2\pi\lambda_j}, \tag{3.8}$$

или

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi}\ln\rho_j = \frac{1}{2\pi}[\ln|\rho_j| + i\arg\rho_j + i2k\pi] \tag{3.9}$$

$$(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Из последнего равенства видно, что значения характеристических показателей определяются по значениям мультипликаторов неоднозначно.

Приведем еще без доказательства следующие два утверждения [51] о характеристическом уравнении (3.7): 1) характеристическое уравнение не зависит от выбора фундаментальной матрицы решений, 2) характеристическое уравнение не изменится, если систему (3.1) подвергнуть невырожденному линейному преобразованию с 2π-периодическими коэффициентами.

Теперь рассмотрим задачу о приводимости системы (3.1). Система (3.1) называется *приводимой*, если существует замена переменных

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}(t)\,\mathbf{y} \tag{3.10}$$

такая, что система (3.1) преобразуется в систему с постоянными коэффициентами, а 2π-периодическая матрица $\mathbf{L}(t)$ — непрерывно дифференцируемая, ограниченная при всех t, и такими же свойствами обладает обратная матрица $\mathbf{L}^{-1}(t)$. Имеет место следующая теорема Ляпунова [49]: *линейная система* (3.1) *с непрерывной периодической матрицей* $\mathbf{A}(t)$ *приводима.*

Для доказательства теоремы Ляпунова примем за матрицу $\mathbf{L}(t)$ преобразования (3.10) матрицу $\mathbf{Y}(t)$, определенную равенством (3.5). Она непрерывно дифференцируема и ограничена при всех t вместе со своей обратной. Остается только показать, что преобразованная система будет системой с постоянными коэффициентами. В этом легко убедиться, подставив

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)\,e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{y} \tag{3.11}$$

в (3.1). Произведя выкладки, получим

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{y}. \tag{3.12}$$

Таким образом, характеристические показатели λ_j суть корни характеристического уравнения преобразованной системы (3.12).

Ясно, что задачи об устойчивости систем (3.1) и (3.12) эквивалентны. Поэтому из проведенных рассмотрений следует, что система (3.1) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы принадлежат замкнутому единичному кругу $|\rho| \leqslant 1$, причем в случае существования кратных мультипликаторов, лежащих на окружности $|\rho| = 1$, матрица $\mathbf{X}(2\pi)$ приводится к диагональной форме.

§ 4. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами

Рассмотрим задачу об устойчивости гамильтоновой системы (1.1). Считаем, что $\mathbf{H}$ — непрерывная, 2π-периодическая по t, вещественная симметрическая матрица. Задача об устойчивости линейных гамильтоновых систем обладает рядом специфи-

ческих особенностей по сравнению с задачей об устойчивости общих линейных систем, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе. Эти особенности вытекают из теоремы Ляпунова — Пуанкаре о характеристическом уравнении гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами. Несколько ниже мы сформулируем и докажем эту теорему, а предварительно рассмотрим так называемые возвратные уравнения.

Уравнение

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0, \quad z = x + iy) \tag{4.1}$$

называется *возвратным*, если его коэффициенты, равноотстоящие от крайних членов, равны между собой, т. е. в записи (4.1) $a_k = a_{n-k}$.

Для возвратного уравнения справедливо тождество

$$f\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{1}{z^n} f(z) \quad (z \neq 0), \tag{4.2}$$

и, наоборот, если выполнено (4.2), то уравнение (4.1) возвратное. Из (4.2) следует, что возвратное уравнение нечетной степени обязательно имеет своим корнем число $z = -1$. Если n — четное число, то при помощи подстановки

$$w = z + \frac{1}{z}$$

возвратное уравнение сводится к уравнению степени $\frac{n}{2}$ относительно w.

Имеют место следующие легко проверяемые [21] свойства корней возвратного уравнения: если у уравнения есть корень $z = 1$, то кратность его четная; если есть корень $z = -1$, то его кратность четная при четном n и нечетная при нечетном n; если уравнение имеет корень $z_k \neq \pm 1$, то оно имеет также и взаимно обратный корень $z_l = 1/z_k$ той же кратности.

Теорема Ляпунова—Пуанкаре. *Если матрица* $\mathbf{H}(t)$ *линейной гамильтоновой системы* (1.1) — 2π*-периодическая по* t, *то характеристическое уравнение*

$$f(\rho) = \det(\mathbf{X}(2\pi) - \rho \mathbf{E}_{2n}) = 0 \tag{4.3}$$

— *возвратное.*

Доказательство. Во-первых, докажем, что матрица фундаментальных решений $\mathbf{X}(t)$ — симплектическая, т. е. справедливо тождество

$$\mathbf{X}^T \mathbf{I} \mathbf{X} = \mathbf{I}. \tag{4.4}$$

В самом деле, при $t = 0$ равенство (4.4), очевидно, справедливо,

а вычислив производную правой его части, получим

$$\frac{d(\mathbf{X}^T\mathbf{I}\mathbf{X})}{dt} = \frac{d\mathbf{X}^T}{dt}\mathbf{I}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{I}\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{X}^T\mathbf{H}^T\mathbf{I}^T\mathbf{I}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{I}^2\mathbf{H}\mathbf{X} =$$

$$= \mathbf{X}^T\mathbf{H}(-\mathbf{I}^2)\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{I}^2\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X} - \mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X} \equiv 0.$$

Поэтому равенство (4.4) справедливо при всех t.

Во-вторых, отметим, что из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема [16] следует, что $\det \mathbf{X}(2\pi) = 1$.

Теперь можно проверить, что уравнение (4.3) — возвратное. Имеем

$$f(\rho) = \det(\mathbf{X} - \rho\mathbf{E}) = \det \mathbf{X}(\mathbf{E} - \rho\mathbf{X}^{-1}) = \det(\mathbf{E} - \rho\mathbf{I}^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{I}) =$$

$$= \det \mathbf{I}^{-1} \det(\mathbf{E} - \rho\mathbf{X}^T) \det \mathbf{I} = \det(\mathbf{E} - \rho\mathbf{X})^T =$$

$$= \det(\mathbf{E} - \rho\mathbf{X}) = \rho^{2n} \det\left(\mathbf{X} - \frac{1}{\rho}\mathbf{E}\right) = \rho^{2n} f\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Значит, характеристическое уравнение (4.3) — возвратное, и теорема Ляпунова — Пуанкаре доказана.

Укажем важнейшие следствия этой теоремы:

1) линейная гамильтонова система (1.1) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ_j расположены на единичной окружности $|\rho| = 1$ и матрица $\mathbf{X}(2\pi)$ приводится к диагональной форме;

2) мультипликаторы ρ_j и $1/\rho_j$ имеют одинаковую кратность;

3) если характеристическое уравнение (4.3) имеет корень $\rho = 1$ или $\rho = -1$, то эти корни имеют четную кратность.

§ 5. Нормализация гамильтоновой системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами

Рассмотрим снова систему (1.1) с непрерывной периодической матрицей $\mathbf{H}(t)$. Согласно теореме Ляпунова система (1.1) приводима. Соответствующая замена переменных может быть записана в виде (3.11). Но замена переменных, приводящая систему (1.1) к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами, определяется матрицей $\mathbf{H}(t)$ неоднозначно. В этом параграфе построен алгоритм отыскания линейного вещественного, 2π-периодического по t, канонического преобразования, приводящего систему дифференциальных уравнений (1.1) к нормальной форме. Будем предполагать, что характеристические показатели λ_j системы (1.1) — чисто мнимые, $\lambda_k = i\sigma_k$, а все мультипликаторы $\rho_k = \exp(i2\pi\sigma_k)$, $\rho_{n+k} = \bar{\rho}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ различны. Черта обозначает комплексно сопряженную величину.

Как и в случае, когда в системе (1.1) матрица $\mathbf{H}(t)$ постоянна, мы называем нормальной формой системы (1.1) такую систему уравнений с постоянными коэффициентами, которой соответствует

функция Гамильтона вида (2.1). Задача нормализации линейных канонических систем с периодическими коэффициентами исчерпывающе изучена в работах [109, 157, 179—182]. Показано, что нормализующее преобразование можно выбрать вещественным и 2π-периодическим по t. Для $n = 1$ в [53] показано, как практически получить такое преобразование. Теперь рассмотрим, следуя [54], задачу нормализации для произвольного n. Результаты представим так, чтобы их было удобно применять при решении конкретных механических задач.

Пусть $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица — решение системы (1.1). Нормализующее преобразование

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{y} \tag{5.1}$$

представим как последовательность двух замен переменных

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{A}e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{z}, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{y}; \tag{5.3}$$

здесь $\mathbf{B}$ — диагональная матрица, у которой элементы определены равенствами $b_{kk} = -b_{n+k,\,n+k} = i\sigma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Матрица $\mathbf{C}$ имеет вид (2.6).

Преобразование (5.2) приводит систему (1.1) к диагональной форме

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{z}. \tag{5.4}$$

После применения преобразования (5.3) система уравнений (5.4) приобретает нормальную форму с функцией Гамильтона (2.1). Постоянную матрицу $\mathbf{A}$ в формуле (5.2) подберем так, чтобы преобразование (5.1) было вещественным, унивалентным, каноническим 2π-периодическим по t.

Преобразование (5.3), как нетрудно проверить, является каноническим с валентностью $2i$. Кроме того, матрицы $\mathbf{X}(t)$ и $e^{-\mathbf{B}t}$ — симплектические. Для $\mathbf{X}(t)$ это показано в § 4, а симплектичность $e^{-\mathbf{B}t}$ очевидна. Таким образом, чтобы преобразование (5.1) было кононическим и унивалентным, необходимо и достаточно [16], чтобы матрица $\mathbf{A}$ была обобщенно-симплектической с валентностью $1/2i$, т. е. должно выполняться равенство

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}\mathbf{A} = \frac{1}{2i}\mathbf{I}. \tag{5.5}$$

Далее, из условия 2π-периодичности нормализующего преобразования (5.1):

$$\mathbf{X}(2\pi)\,\mathbf{A}e^{-2\pi\mathbf{B}}\mathbf{C} = \mathbf{X}(0)\,\mathbf{A}\mathbf{E}_{2n}\mathbf{C}$$

получаем матричное уравнение для определения A

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}(2\pi)\,\mathbf{A} = e^{2\pi\mathbf{B}}, \quad e^{2\pi\mathbf{B}} = \begin{Vmatrix} \rho_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \rho_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \bar{\rho}_n \end{Vmatrix}. \qquad (5.6)$$

Матрица $e^{2\pi\mathbf{B}}$ является диагональной формой матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$. У матрицы A, приводящей $\mathbf{X}(2\pi)$ к диагональной форме, j-й столбец есть собственный вектор $\mathbf{e}_j$, соответствующий мультипликатору ρ_j ($j = 1, 2, \ldots, 2n$). Ее можно представить в виде $\mathbf{A} = \mathbf{LD}$, где L — какое-либо решение уравнения (5.6), а D — диагональная матрица порядка $2n$, элементы которой подберем так, чтобы удовлетворить условию (5.5).

Кроме того, будем считать, что элементы матрицы D — вещественные числа и $d_{n+k,n+k} = d_{kk}$, а собственные векторы $\mathbf{e}_{n+k}$ и $\mathbf{e}_k$ — комплексно сопряженные ($k = 1, 2, \ldots, n$). Это обеспечивает вещественность нормализующего преобразования.

Покажем, как найти матрицу D. Подставляя $\mathbf{A} = \mathbf{LD}$ в равенство (5.5) и учитывая, что $\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \mathbf{D}$, получаем

$$\mathbf{DL}^{\mathrm{T}}\mathbf{ILD} = \frac{1}{2i}\mathbf{I}. \qquad (5.7)$$

Теперь обозначим матрицу $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{IL}$ через F. Ее элементы f_{kl} вычисляются по формуле (2.9). Аналогично § 2 получаем, что матрица F — кососимметрическая.

Для дальнейшего анализа ее структуры докажем следующее утверждение: если произведение собственных чисел ρ_k и ρ_l симплектической матрицы X не равно единице, то соответствующие собственные векторы $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{e}_l$ удовлетворяют равенству $(\mathbf{e}_k, \mathbf{Ie}_l) = 0$.

Для доказательства сначала заметим, что по определению симметрической матрицы для любых векторов a и b имеет место равенство

$$(\mathbf{IXa}, \mathbf{Xb}) = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{IXa}, \mathbf{b}).$$

Далее, используя симплектичность матрицы X, получаем $(\mathbf{IXa}, \mathbf{Xb}) = (\mathbf{Ia}, \mathbf{b})$. Подставив в последнее равенство $\mathbf{a} = \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_l$, получим

$$(\mathbf{IXe}_k, \mathbf{Xe}_l) = (\mathbf{Ie}_k, \mathbf{e}_l). \qquad (5.8)$$

Но $\mathbf{Xe}_j = \rho_j\mathbf{e}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 2n$), поэтому равенство (5.8) можно переписать так:

$$(\rho_k\rho_l - 1)\,(\mathbf{e}_k, \mathbf{Ie}_l) = 0,$$

и если $\rho_k\rho_l \neq 1$, то необходимо, чтобы скалярное произведение $(\mathbf{e}_k, \mathbf{Ie}_l)$ равнялось нулю.

Таким образом, матрица $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}\mathbf{L}$ записывается в виде (2.13), и элементы g_{kk} матрицы G, входящей в (2.13), вычисляются по формулам (2.14). Из равенства (5.7) получаем теперь уравнение для нахождения элементов матрицы D

$$4d_{kk}^2 (\mathbf{r}_k, \mathbf{I}\mathbf{s}_k) = 1. \tag{5.9}$$

Последнее уравнение имеет действительное решение, если величина $(\mathbf{r}_k, \mathbf{I}\mathbf{s}_k)$ положительна, чего всегда можно добиться соответствующим выбором знака σ_k в функции Гамильтона (2.1). В самом деле, из уравнения $\mathbf{X}\mathbf{e}_k = \rho_k \mathbf{e}_k$ имеем систему уравнений относительно действительной $\mathbf{r}_k$ и мнимой $\mathbf{s}_k$ частей вектора $\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} - \cos 2\pi\sigma_k \mathbf{E}_{2n})\,\mathbf{r}_k + \sin 2\pi\sigma_k \mathbf{s}_k = 0, \\ -\sin 2\pi\sigma_k \mathbf{r}_k + (\mathbf{X} - \cos 2\pi\sigma_k \mathbf{E}_{2n})\,\mathbf{s}_k = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Система уравнений (5.10) не изменяется при одновременном изменении знака σ_k и знака компонент вектора $\mathbf{r}_k$. Знак же скалярного произведения $(\mathbf{r}_k, \mathbf{I}\mathbf{s}_k)$ изменяется на противоположный.

Таким образом, мы нашли матрицу D. Матрица нормализующего преобразования (5.1) имеет вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{L}\mathbf{D}e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{C}.$$

После некоторых преобразований ее можно представить в виде произведения трех вещественных матриц

$$\mathbf{N} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{P}\mathbf{Q}(t). \tag{5.11}$$

В последней формуле через P обозначена постоянная матрица, у которой k-й столбец есть вектор $-2d_{kk}\mathbf{s}_k$, а $(n+k)$-й столбец — вектор $2d_{kk}\mathbf{r}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Матрица $\mathbf{Q}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{Vmatrix} \cos \mathbf{K}t & -\sin \mathbf{K}t \\ \sin \mathbf{K}t & \cos \mathbf{K}t \end{Vmatrix},$$

$$\sin \mathbf{K}t = \begin{Vmatrix} \sin \sigma_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \sin \sigma_n t \end{Vmatrix}, \quad \cos \mathbf{K}t = \begin{Vmatrix} \cos \sigma_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \cos \sigma_n t \end{Vmatrix}.$$

§ 6. Задача о параметрическом резонансе. Линейные гамильтоновы системы, содержащие малый параметр

В конкретных механических задачах матрица $\mathbf{H}(t)$ системы (1.1) обычно зависит от одного или нескольких параметров. Задача о параметрическом резонансе для системы (1.1) состоит в определении тех значений параметров, при которых характеристическое уравнение системы (1.1) имеет корни с модулями, большими единицы.

Эта задача подробно изучена в работах А. М. Ляпунова, М. Г. Крейна, В. А. Якубовича, В. М. Старжинского, И. М. Гельфанда и В. Б. Лидского, Ю. Мозера и др. Полученные результаты изложены в монографии [97], где приведена и обширная библиография по устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами. Здесь мы ограничимся рассмотрением задачи о параметрическом резонансе для тех частных случаев, которые типичны для рассматриваемых далее конкретных задач небесной механики. Будем предполагать, что функция Гамильтона H, соответствующая системе (1.1), имеет вид

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots, \tag{6.1}$$

где H_0, H_1 . . . — квадратичные формы переменных x_1, x_2, ..., x_{2n}, причем коэффициенты формы H_0 постоянны, а коэффициенты форм H_1, H_2, . . . — непрерывные, вещественные функции t с общим периодом 2π.

Прежде чем переходить к задаче о параметрическом резонансе, рассмотрим зависимость мультипликаторов (и характеристических показателей) от параметра ε. Так как функция Гамильтона (6.1) предполагается аналитической относительно ε, то правые части системы (1.1) также аналитичны. Тогда, как известно, любое решение $x(t; \varepsilon)$ системы (1.1), для которого начальное значение не зависит от ε, будет аналитическим относительно ε. В частности, аналитическими будут элементы $x_{ij}(t; \varepsilon)$ фундаментальной матрицы решений $X(t; \varepsilon)$. Отсюда получаем следующую теорему А. М. Ляпунова: *если правые части системы* (1.1) *аналитичны относительно* ε, *то коэффициенты характеристического уравнения* (4.3) *будут аналитическими функциями* ε, *причем область их аналитичности совпадает с областью аналитичности правых частей системы* (1.1).

Но при этом мультипликаторы (и характеристические показатели) не обязательно аналитичны. В самом деле, рассмотрим характеристическое уравнение (4.3):

$$f(\rho) = \rho^{2n} + a_1\rho^{2n-1} + \ldots + a_1\rho + 1 = 0, \tag{6.2}$$

где коэффициенты a_k — аналитические функции ε. И пусть ρ^* — какой-либо корень уравнения (6.2) при $\varepsilon = 0$. Если он не является кратным и, следовательно, $df(\rho^*)/d\rho^* \neq 0$, то на основании теоремы о неявной функции при достаточно малом ε, отличном от нуля, существует единственный корень $\rho(\varepsilon)$, для которого $\rho(0) = \rho^*$. При этом $\rho(\varepsilon)$ — аналитическая функция ε и аналитичен соответствующий характеристический показатель. В том же случае, когда ρ^* — кратный корень и, следовательно, $df(\rho^*)/d\rho^* = 0$, задача о зависимости корней уравнения от ε при $\varepsilon \neq 0$ становится более сложной. Если корень ρ^* имеет кратность, равную m, то уравнение (6.2) при $\varepsilon \neq 0$ имеет [20] m корней, обращающихся при $\varepsilon = 0$ в ρ^*. И эти корни аналитичны относительно

$\varepsilon^{1/k}$, где $1 \leqslant k \leqslant m$. Аналогичная зависимость от ε будет иметь место и для характеристических показателей. Отметим, что независимо от кратности корня ρ^* при $\varepsilon = 0$ корни уравнения (6.2) при $\varepsilon \neq 0$, во всяком случае, непрерывны по ε.

Теперь рассмотрим систему (1.1) при $\varepsilon = 0$. Это будет система с постоянными коэффициентами. Пусть λ — корень ее характеристического уравнения. Получим условия аналитичности мультипликаторов системы (1.1) при $\varepsilon \neq 0$.

Мультипликатор ρ характеристического уравнения (4.3) системы (1.1) с 2π-периодическими коэффициентами при $\varepsilon = 0$ имеет вид $\rho = \exp(2\pi\lambda)$. Согласно теореме Ляпунова — Пуанкаре (см. § 4), вместе с мультипликатором $\rho = \exp(2\pi\lambda)$ существует мультипликатор $\rho = \exp(-2\pi\lambda)$. Отсюда получаем, что характеристическое уравнение (4.3) при $\varepsilon = 0$ имеет кратные корни в том и только в том случае когда выполняется соотношение

$$\lambda_k \pm \lambda_l = iN \qquad (k,\ l = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6.3}$$

Таким образом, если корни λ_j $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$ характеристического уравнения системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ не связаны соотношениями (6.3), то ее мультипликаторы при $\varepsilon \neq 0$ аналитичны относительно ε.

Отметим, что при некоторых дополнительных условиях С. Н. Шимановым показана [52] аналитичность мультипликаторов и при выполнении равенств (6.3).

Допустим, что характеристическое уравнение системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ имеет корень λ_j с отличной от нуля вещественной частью. Тогда, согласно § 1, оно имеет корень $-\lambda_j$ и, следовательно, у характеристического уравнения обязательно есть хотя бы один корень с положительной вещественной частью. А значит, при малых значениях ε, отличных от нуля, характеристическое уравнение (4.3) имеет корни с модулями, большими единицы. В этом случае задача о параметрическом резонансе, как видим, проста и неинтересна.

Пусть теперь при $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение системы (1.1) имеет только чисто мнимые корни $\pm i\sigma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда уравнение (4.3) при $\varepsilon = 0$ имеет только такие корни, модули которых равны единице. Изучим поведение мультипликаторов при малых ε, отличных от нуля.

Сначала рассмотрим простейший случай, когда при $\varepsilon = 0$ нет кратных мультипликаторов, т. е. когда, согласно (6.3), выполняются неравенства

$$\sigma_k \pm \sigma_l \neq N \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n;\ N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6.4}$$

Ясно, что в этом случае, в силу непрерывности мультипликаторов, они останутся некратными и при достаточно малых ε.

Кроме того, при достаточно малых ε мультипликаторы не могут иметь модули, большие единицы. Этот вывод является простым следствием из теоремы Ляпунова — Пуанкаре о характеристическом уравнении (4.3). Согласно этой теореме, мультипликаторы расположены симметрично относительно единичной окружности. При малых значениях ε они не могут сойти с окружности, не нарушив указанной симметрии.

Действительно, рассмотрим для наглядности случай $n = 2$. Характеристическое уравнение (4.3) будет уравнением четвертого порядка. Пусть ρ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ — его корни при $\varepsilon = 0$. Будем изображать их на комплексной плоскости ρ (рис. 4). Пусть при малых ε один из корней, например ρ_1, сошел с окружности и стал по модулю больше единицы. Из-за вещественности матрицы $\mathbf{X}(2\pi; \varepsilon)$ комплексно сопряженный корень ρ_1^{-1} необходимо сместился бы в точку, симметричную относительно вещественной оси. А так как число всех корней равно четырем, то у корня ρ_1 не оказалось бы обратного по величине, что противоречит теореме Ляпунова — Пуанкаре.

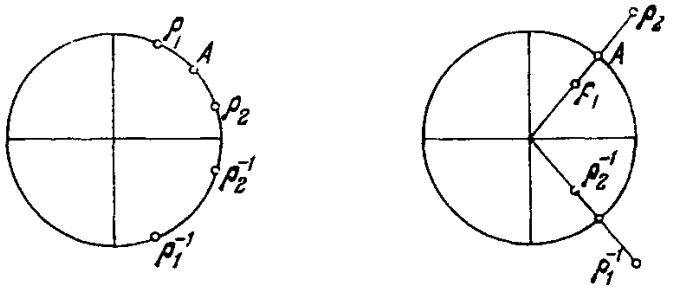

Рис. 4. Простые и кратные мультипликаторы на единичной окружности.

Таким образом, если при $\varepsilon = 0$ отсутствуют кратные мультипликаторы или, что то же, выполняются условия (6.4), то гамильтонова система (1.1) при $\varepsilon \neq 0$ устойчива, если величина $|\varepsilon|$ достаточно мала.

Если же при $\varepsilon = 0$ существуют кратные мультипликаторы, расположенные в некоторой точке A единичной окружности (рис. 4), то при $\varepsilon \neq 0$ они могут, вообще говоря, сойти с окружности. При этом они могут расположиться, как изображено на рис. 4, и симметрия мультипликаторов относительно единичной окружности не будет нарушена. Но смещение мультипликаторов с единичной окружности происходит не всегда [33], и, следовательно, в случае кратных мультипликаторов система (1.1) не обязательно неустойчива при $\varepsilon \neq 0$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что характеристические показатели $i\sigma_k$ при $\varepsilon = 0$ таковы, что среди величин σ_k нет кратных. Тогда функцию H_0 в (6.1) при помощи линейной канонической замены переменных можно привести (см. § 2) к сумме гамильтонианов не связанных друг с другом осцилляторов, и функция Гамильтона (6.1) запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k (y_k^2 + y_{k+n}^2) + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots, \qquad (6.5)$$

где H_1, H_2, . . . — квадратичные формы новых переменных y_1, y_2, . . . , y_{2n} с непрерывными, 2π-периодическими по t коэффициентами. Очевидно, что задачи о параметрическом резонансе в старых и новых переменных эквивалентны. Но теперь для нас существенно, что величины σ_k в (6.4) имеют вполне определенный знак, полученный в процессе нормализации H_0.

Имеет место теорема Крейна — Гельфанда — Лидского [97], которая в наших обозначениях формулируется так.

Теорема. *Для достаточно малых ε линейная система с гамильтонианом* (6.5) *устойчива тогда и только тогда, когда величины σ_k не связаны соотношениями*

$$\sigma_k + \sigma_l = N \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n; \quad N = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6.6}$$

Иными словами, знак минус в соотношении (6.4) можно опустить, а при выполнении хотя бы одного из равенств (6.6) всегда можно так подобрать H_1, H_2, . . . в (6.5), что соответствующая линейная система будет неустойчива. Число N в (6.6) отлично от нуля, так как среди величин σ_k нет кратных.

§ 7. Нахождение областей параметрического резонанса в первом приближении по малому параметру

Пусть величины σ_k в гамильтониане (6.5) зависят он некоторого параметра α. И пусть при значении α, равном α_0, в изучаемой механической системе возникает *параметрический резонанс*, т. е. выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\sigma_k(\alpha_0) + \sigma_l(\alpha_0) = N \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n; N = \pm 1 \pm 2, \ldots). \tag{7.1}$$

Когда соотношение (7.1) выполняется для $k = l$, т. е. когда

$$2\sigma_k = N, \tag{7.2}$$

говорят о *простом резонансе*; параметрический резонанс, для которого в (7.1) $k \neq l$, называют *комбинационным*. В этом параграфе мы покажем, что, как при простом, так и при комбинационном резонансах, при любом сколь угодно малом значении ε может существовать область неустойчивости, и в плоскости α, ε найдем ее границы с точностью до первой степени параметра ε.

Будем предполагать, что выполняется только одно из резонансных соотношений (7.1). И так как в этом соотношении участвуют не более двух частот, то, без ограничения общности, задачу о параметрическом резонансе будем рассматривать для механических систем с двумя степенями свободы. Если бы число степеней свободы было больше двух, то переменные y_j ($j \neq k, l, n + k, n + l$) могли быть исключены из H_1 при помощи канонической замены переменных. Это будет видно из проводимого ниже анализа (число (7.13) для одночленов, содержащих y_j ($j \neq k, l, n + k, n + l$), не будет

целым, так как существует только одно резонансное соотношение (7.1) и оно связывает только частоты σ_k и σ_l).

Пусть в (6.5) квадратичная форма H_1 записана в виде

$$H_1 = \sum_{\nu=2} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)\, y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} y_3^{\mu_1} y_4^{\mu_2} \qquad (\nu = \nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2). \tag{7.3}$$

В (7.3) ν_k, μ_k — целые неотрицательные числа. Будем считать, что функции $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$ в их представлении в виде рядов Фурье не содержат нулевых гармоник. В противном случае часть H_1, не зависящую от t, мы включили бы в H_0. Найдем область изменения параметра α вблизи его резонансного значения α_0, для которой линейная система

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_{2+k}}, \quad \frac{dy_{2+k}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_k} \qquad (k = 1, 2),$$

соответствующая функции Гамильтона (6.5), неустойчива. Будем считать, что при $\alpha = \alpha_0$ выполнены неравенства

$$\frac{d(\sigma_k + \sigma_l)}{d\alpha} \neq 0 \qquad (k, l = 1, 2).$$

Введем комплексно сопряженные канонические переменные q_k, p_k соотношениями

$$\begin{aligned} q_1 &= y_3 + iy_1, \quad & q_2 &= y_4 + iy_2, \\ p_1 &= y_3 - iy_1, \quad & p_2 &= y_4 - iy_2. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Валентность канонического преобразования (7.4) равна $2i$. Новый гамильтониан равен $2iH$, где H есть функция Гамильтона (6.5), выраженная через q_k, p_k по формулам (7.4). Разлагая еще $\sigma_k(\alpha)$ в ряд в окрестности α_0, получим

$$2iH = i\sigma_1(\alpha_0)\, q_1p_1 + i\sigma_2(\alpha_0)\, q_2p_2 + i(\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0} q_1p_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0} q_2p_2\right) + \\ + \varepsilon \sum_{\nu=2} a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} + \ldots \tag{7.5}$$

Точками в (7.5) обозначены члены не ниже второго порядка относительно величин ε и $\alpha - \alpha_0$. Коэффициенты $a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ связаны соотношениями

$$a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = -\bar{a}_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}.$$

Явные выражения коэффициентов $a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ через коэффициенты гамильтониана (6.4) таковы:

$$a_{2000} = \frac{1}{2}[h_{1010} + i(h_{0020} - h_{2000})], \quad a_{0200} = \frac{1}{2}[h_{0101} + i(h_{0002} - h_{0200})],$$

$$a_{1100} = \frac{1}{2}[(h_{1001} + h_{0110}) + i(h_{0011} - h_{1100})],$$

$$a_{1001} = \frac{1}{2}[(h_{1001} - h_{0110}) + i(h_{1100} + h_{0011})], \tag{7.6}$$

$$a_{1010} = i(h_{2000} + h_{0020}), \quad a_{0101} = i(h_{0200} + h_{0002}).$$

Сделаем каноническую замену переменных q_k, $p_k \to q_k'$, p_k' по формулам

$$q_k' = \frac{\partial S}{\partial p_k'}, \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \tag{7.7}$$

где производящая функция S имеет вид

$$S = q_1 p_1' + q_2 p_2' + \varepsilon W \equiv q_1 p_1' + q_2 p_2' + \varepsilon \sum_{\nu=2} w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)\, q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1'^{\mu_1} p_2'^{\mu_2}.$$

Функции $w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ подберем 2π-периодическими и такими, чтобы в новом гамильтониане члены порядка ε приняли по возможности наиболее простой вид. Из (7.7) получаем явный вид преобразования q_k, $p_k \to q_k'$, p_k' с точностью до членов порядка ε:

$$q_k = q_k' - \varepsilon \frac{\partial W}{\partial p_k'}, \quad p_k = p_k' + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial q_k'}, \tag{7.8}$$

где в функции W переменные q_1, q_2 заменены на q_1', q_2'. В переменных q_k', p_k' новая функция Гамильтона H' вычисляется по формуле [16]

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{7.9}$$

где H есть функция (7.5), выраженная через q_k', p_k' по формулам (7.8). Из (7.5) и (7.8) — (7.9) получаем такое выражение для совокупности членов H', пропорциональных первой степени ε:

$$\sum_{\nu=2} a'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)\, q_1'^{\nu_1} q_2'^{\nu_2} p_1'^{\mu_1} p_2'^{\mu_2} \equiv DW + \sum_{\nu=2} a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)\, q_1'^{\nu_1} q_2'^{\nu_2} p_1'^{\mu_1} p_2'^{\mu_2}, \tag{7.10}$$

где через D обозначен оператор

$$D = i\sigma_1\left(q_1'\frac{\partial}{\partial q_1'} - p_1'\frac{\partial}{\partial p_1'}\right) + i\sigma_2\left(q_2'\frac{\partial}{\partial q_2'} - p_2'\frac{\partial}{\partial p_2'}\right) + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{7.11}$$

Приравняв в тождестве (7.10) коэффициенты при $q_1'^{\nu_1} q_2'^{\nu_2} p_1'^{\mu_1} p_2'^{\mu_2}$, получим дифференциальное уравнение для $w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$

$$\frac{dw_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}}{dt} + i[\sigma_1(\nu_1 - \mu_1) + \sigma_2(\nu_2 - \mu_2)]\, w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = a'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} - a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}. \tag{7.12}$$

Рассмотрим это уравнение подробно. Для простоты записи у функций $w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$, $a'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ и $a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ не будем писать индексы и введем

обозначение

$$b = \sigma_1 (\nu_1 - \mu_1) + \sigma_2 (\nu_2 - \mu_2). \tag{7.13}$$

Из общего решения уравнения (7.12):

$$w(t) = w(0)\, e^{-ibt} + e^{-ibt} \int_0^t e^{ibx} (a' - a)\, dx$$

следует, что если число b не будет целым, то при любой функции a' решение $w(t)$ будет 2π-периодическим, если

$$w(0) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{ibx} (a - a')\, dx}{1 - e^{i2\pi b}}.$$

В этом случае, следовательно, можно положить $a' \equiv 0$. Если же число b — целое, то при $a' \equiv 0$ периодическое решение уравнения (7.12), вообще говоря, не существует. Чтобы оно существовало, следует положить

$$a' = ce^{-ibt},$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ibt} a(t)\, dt, \tag{7.14}$$

и периодическое решение уравнения (7.13) будет иметь вид

$$w(t) = w(0)\, e^{-ibt} + e^{-ibt} \int_0^t (c - ae^{ibx})\, dx$$

при произвольном значении $w(0)$. В любом случае коэффициенты производящей функции S связаны соотношением

$$w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = -\overline{w}_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2},$$

а потому новые переменные q'_k, p'_k, как это легко проверить при помощи (7.8), будут комплексно сопряженными.

Проведя такое исследование уравнения (7.12), рассмотрим случай комбинационного резонанса $\sigma_1(\alpha_0) + \sigma_2(\alpha_0) = N$. Функция Гамильтона (7.9) в этом случае может быть приведена описанным выше способом к виду

$$H' = i\sigma_1(\alpha_0)\, q'_1 p'_1 + i\sigma_2(\alpha_0)\, q'_2 p'_2 + i(\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0} q'_1 p'_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0} q'_2 p'_2\right) +$$
$$+ \varepsilon (c_{1100} e^{-iNt} q'_1 q'_2 + c_{0011} e^{iNt} p'_1 p'_2) + \ldots, \tag{7.15}$$

где

$$c_{1100} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iNt} a_{1100}(t)\,dt, \qquad c_{0011} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iNt} a_{0011}(t)\,dt \quad (7.16)$$

$$(c_{1100} = -\bar{c}_{0011}).$$

Теперь введем вещественные переменные r_k, φ_k соотношениями

$$q_k' = \sqrt{2r_k}\,e^{i\varphi_k}, \qquad p_k' = \sqrt{2r_k}\,e^{-i\varphi_k}. \quad (7.17)$$

Преобразование (7.17) является каноническим с валентностью $\frac{1}{2i}$. В переменных r_k, φ_k функция Гамильтона будет иметь вид

$$H = \sigma_1(\alpha_0) r_1 + \sigma_2(\alpha_0) r_2 + (\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0} r_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0} r_2\right) +$$
$$+ \varepsilon\sqrt{r_1 r_2}\,[\alpha_{1100}\cos(\varphi_1 + \varphi_2 - Nt) + \beta_{1100}\sin(\varphi_1 + \varphi_2 - Nt)] + \ldots \quad (7.18)$$

Величины α_{1100} и β_{1100} выражаются через коэффициенты Фурье, соответствующие N-й гармонике некоторой линейной комбинации функций $h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(t)$, входящих в исходный гамильтониан (6.4). Используя (7.6), получаем для них такие выражения:

$$\alpha_{1100} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(h_{0011} - h_{1100})\cos Nt + (h_{1001} + h_{0110})\sin Nt]\,dt,$$
$$\beta_{1100} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(h_{1001} + h_{0110})\cos Nt - (h_{0011} - h_{1100})\sin Nt]\,dt. \quad (7.19)$$

Сделаем еще одну каноническую замену переменных r_k, $\varphi_k \to R_k$, ψ_k:

$$r_1 = R_1, \qquad r_2 = R_2,$$
$$\varphi_1 = \sigma_1(\alpha_0)t + \psi_1, \qquad \varphi_2 = \sigma_2(\alpha_0)t + \psi_2 + \theta, \quad (7.20)$$

где

$$\sin\theta = -\alpha_{1100}/\delta, \quad \cos\theta = \beta_{1100}/\delta, \quad \delta = \sqrt{\alpha_{1100}^2 + \beta_{1100}^2}.$$

Тогда изменение переменных R_k, ψ_k будет описываться дифференциальными уравнениями, задаваемыми функцией Гамильтона

$$H = (\alpha - \alpha_0)\left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0} R_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0} R_2\right) + \varepsilon\delta\sqrt{R_1 R_2}\sin(\psi_1 + \psi_2) + \ldots \quad (7.21)$$

Выпишем соответствующие дифференциальные уравнения, пренебрегая членами выше первого порядка относительно ε и $(\alpha - \alpha_0)$:

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{dR_2}{dt} = -\varepsilon\delta\sqrt{R_1 R_2}\cos(\psi_1 + \psi_2),$$
$$\frac{d(\psi_1 + \psi_2)}{dt} = (\alpha - \alpha_0)\frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{d\alpha_0} + \frac{1}{2}\varepsilon\delta\frac{R_1 + R_2}{\sqrt{R_1 R_2}}\sin(\psi_1 + \psi_2). \quad (7.22)$$

Очевидно, что в первом приближении по ε задача об устойчивости относительно y_k в исходной системе с функцией Гамильтона (6.4) эквивалентна задаче об устойчивости относительно R_1 и R_2 в системе (7.22). Покажем, что в первом приближении по ε область параметрического резонанса задается неравенствами

$$-\frac{\varepsilon\delta}{\left|\frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0}\right|}+\alpha_0<\alpha<\alpha_0+\frac{\varepsilon\delta}{\left|\frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0}\right|} \tag{7.23}$$

и что если эти неравенства не выполняются, то система (7.22) устойчива.

Действительно, второе утверждение следует из того, что функция

$$V=(R_1-R_2)^2+H^2$$

является интегралом системы (7.22), который как легко проверить, будет знакоопределенным, если неравенства (7.23) не выполняются. Следовательно, согласно теореме Ляпунова, система (7.22) устойчива. Утверждение о неустойчивости следует из существования при выполнении неравенств (7.23) экспоненциально растущего со временем решения системы (7.22):

$$\psi_1+\psi_2=\pi+\arcsin b,\quad R_1(t)=R_2(t)=R_1(0)\,e^{\varepsilon\delta\sqrt{1-b^2}t} \tag{7.24}$$

$$\left(b=\frac{\alpha-\alpha_0}{\varepsilon\delta}\frac{d(\sigma_1+\sigma_2)}{d\alpha_0}\right).$$

Случай простого параметрического резонанса рассматривается аналогично. Пусть, например, выполняется соотношение $2\sigma_1(\alpha_0)=N$. Тогда область параметрического резонанса в первом приближении по ε задается неравенствами

$$-\frac{\varepsilon\delta}{\left|\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0}\right|}+\alpha_0<\alpha<\alpha_0+\frac{\varepsilon\delta}{\left|\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0}\right|}, \tag{7.25}$$

где теперь $\delta=\sqrt{\alpha_{2000}^2+\beta_{2000}^2}$, а величны α_{2000} и β_{2000} выражаются через коэффициенты исходного гамильтониана по формулам

$$\begin{aligned}\alpha_{2000}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(h_{0020}-h_{2000})\cos Nt+h_{1010}\sin Nt]\,dt,\\ \beta_{2000}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h_{1010}\cos Nt-(h_{0020}-h_{2000})\sin Nt]\,dt.\end{aligned} \tag{7.26}$$

ГЛАВА 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 1. Преобразование Биркгофа

В этой главе изучается устойчивость положений равновесия гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Предполагается, что функция Гамильтона H аналитична относительно координат и импульсов в достаточно малой окрестности положения равновесия (совпадающего с началом координат) и 2π-периодична по независимой переменной — времени t. Рассматривается только тот случай, когда линеаризованная система устойчива (так называемый *эллиптический случай*).

При исследовании функции Гамильтона с помощью канонической замены переменных, носящей название *преобразования Биркгофа* [7], будет приводиться в окрестности начала координат к некоторому простейшему виду (к нормальной форме) и в зависимости от соотношений между коэффициентами нормальной формы будут сделаны выводы об устойчивости или неустойчивости положения равновесия. Рассмотрим преобразование Биркгофа подробно, предполагая, что изучаемая динамическая система имеет n степеней свободы. Итак, пусть изучается каноническая система дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где H — аналитическая функция относительно q_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Предполагается, что она либо непрерывна и 2π-периодична по t, либо от t не зависит. Начало координат $q_i = p_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ является положением равновесия, так что разложение H начинается с квадратичных членов

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{1.2}$$

где H_k — однородный многочлен степени k относительно координат q_i и импульсов p_i.

Если предположить, что линеаризованная система (1.1) устойчива, а ее мультипликаторы различны, то без ограничения общности (см. §§ 2 и 5 главы 2) можно считать, что H_2 имеет нормальную форму

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j (q_j^2 + p_j^2). \tag{1.3}$$

Тот факт, что мультипликаторы линейной системы различны, означает, что характеристические показатели $\pm i\sigma_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ таковы, что в системе отсутствуют резонансы до второго порядка включительно, т. е. число

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \ldots + m_n\sigma_n \not\equiv 0 \pmod 1 \qquad (1.4)$$

при целых числах m_i, удовлетворяющих неравенствам

$$|m_1| + |m_2| + \ldots + |m_n| = k \qquad (k = 1, 2). \qquad (1.5)$$

В случае автономной системы знак $\not\equiv 0 \pmod 1$ в (1.4) надо заменить на знак $\neq 0$.

В системе (1.1) сделаем каноническую замену переменных q_i, $p_i \to q_i' p_i'$ при помощи формул

$$q_i' = q_i + \frac{\partial S_3}{\partial p_i'}, \quad p_i = p_i' + \frac{\partial S_3}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.6)$$

где вещественную однородную третьей степени по q_i, p_i' функцию $S_3(q_i, p_i', t)$ попытаемся подобрать так, чтобы она была 2π-периодической по t, а в новых переменных q_i', p_i' функция Гамильтона не содержала бы членов третьего порядка относительно q_i', p_i'.

Функция H_3 может быть записана в виде

$$H_3 = \sum_{\nu_1 + \ldots + \mu_n = 3} h_{\nu_1, \ldots, \mu_n} q_1^{\nu_1} \ldots q_n^{\nu_n} p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n}, \qquad (1.7)$$

где коэффициенты $h_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ либо постоянны, либо 2π-периодичны по t. Величины $\nu_1, \ldots, \mu_n$ — целые неотрицательные числа. Функцию S_3 ищем в виде, аналогичном (1.7):

$$S_3 = \sum_{\nu_1 + \ldots + \mu_n = 3} s_{\nu_1, \ldots, \mu_n} q_1^{\nu_1} \ldots q_n^{\nu_n} p_1'^{\mu_1} \ldots p_n'^{\mu_n}, \qquad (1.8)$$

где подлежащие выбору коэффициенты $s_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ либо постоянны (если постоянны коэффициенты $h_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$), либо 2π-периодичны по t (если 2π-периодичны по t коэффициенты $h_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$).

Соотношения (1.6), рассматриваемые как уравнения относительно q_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, показывают, что величины q_1, p_i (на основании теоремы о неявной функции) при достаточно малых q_i', p_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будут аналитическими функциями в окрестности начала координат $q_i' = p_i' = 0$. Отсюда следует, что

$$q_i = q_i' - \frac{\partial S_3(q_i', p_i', t)}{\partial p_i'} + \ldots, \quad p_i = p_i' + \frac{\partial S_3(q_i', p_i', t)}{\partial q_i'} + \ldots, \qquad (1.9)$$

где невыписанные члены имеют порядок выше второго относительно q'_i, p'_i.

Новый гамильтониан $H'(q_i', p_i', t)$ вычисляется по формуле [16]

$$H' = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S_3(q_i, p_i', t)}{\partial t}, \tag{1.10}$$

где правая часть формулы (1.10) выражается через q_i', p_i' по формулам канонической замены переменных (1.9). Подставив (1.2), (1.3) и (1.9) в правую часть (1.10), получим

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(q_j'^2 + p_j'^2) + \sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left(p_j'\frac{\partial S_3}{\partial q_j'} - q_j'\frac{\partial S_3}{\partial p_j'}\right) + \\ + H_3(q_i', p_i', t) + \frac{\partial S_3}{\partial t} + \ldots \tag{1.11}$$

В (1.11) $S_3 = S_3(q_i', p_i', t)$, а невыписанные члены имеют порядок, не меньший четвертого относительно q_i', p_i'.

Чтобы в функции Гамильтона H' не содержалось членов третьего порядка q_i', p_i', нужно потребовать выполнения следующего тождества:

$$H_3' \equiv \sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left(p_j'\frac{\partial S_3}{\partial q_j'} - q_j'\frac{\partial S_3}{\partial p_j'}\right) + H_3(q_i', p_i', t) + \frac{\partial S_3(q_i', p_i', t)}{\partial t} \equiv 0. \tag{1.12}$$

Чтобы из (1.12) найти коэффициенты $s_{\nu_1,\ldots,\mu_n}$ функции S_3, удобно перейти к комплексным переменным. Положим

$$u_j = q_j' + ip_j', \quad v_j = q_j' - ip_j' \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.13}$$

Здесь через i обозначена мнимая единица ($i^2 = -1$).

Нетрудно проверить, что тождество (1.12) в комплексно сопряженных переменных u_j, v_j перепишется в виде

$$i\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\left(v_j\frac{\partial S_3}{\partial v_j} - u_j\frac{\partial S_3}{\partial u_j}\right) + H_3\left(\frac{u_j+v_j}{2}, \frac{u_j-v_j}{2i}; t\right) + \frac{\partial S_3}{\partial t} \equiv 0, \tag{1.14}$$

где

$$S_3 = S_3\left(\frac{u_j+v_j}{2}, \frac{u_j-v_j}{2i}; t\right).$$

Введем обозначения

$$H_3\left(\frac{u_j+v_j}{2}, \frac{u_j-v_j}{2i}; t\right) = \sum_{\nu_1+\ldots+\mu_n=3} g_{\nu_1,\ldots,\mu_n} u_1^{\nu_1}\ldots u_n^{\nu_n} v_1^{\mu_1}\ldots v_n^{\mu_n}, \tag{1.15}$$

$$S_3\left(\frac{u_j+v_j}{2}, \frac{u_j-v_j}{2i}; t\right) = \sum_{\nu_1+\ldots+\mu_n=3} f_{\nu_1,\ldots,\mu_n} u_1^{\nu_1}\ldots u_n^{\nu_n} v_1^{\mu_1}\ldots v_n^{\mu_n}. \tag{1.16}$$

Здесь $g_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ и $f_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ — комплексные коэффициенты, которые связаны с коэффициентами $h_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ и $s_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ при помощи линейной системы алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. Приравнивая в тождестве (1.14) нулю коэффициент при $u_1^{\nu_1} \ldots u_n^{\nu_n} v_1^{\mu_1} \ldots v_n^{\mu_n}$, получим линейное дифференциальное уравнение для нахождения $f_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$

$$\frac{df_{\nu_1, \ldots, \mu_n}}{dt} + i[\sigma_1(\mu_1 - \nu_1) + \ldots + \sigma_n(\mu_n - \nu_n)] f_{\nu_1, \ldots, \mu_n} = -g_{\nu_1, \ldots, \mu_n}. \tag{1.17}$$

Пусть исходная функция Гамильтона (1.2) не зависит от времени. Тогда вместо дифференциального уравнения (1.17), для нахождения $f_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ получим алгебраическое уравнение

$$[\sigma_1(\mu_1 - \nu_1) + \ldots + \sigma_n(\mu_n - \nu_n)] f_{\nu_1, \ldots, \mu_n} = i g_{\nu_1, \ldots, \mu_n}. \tag{1.18}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$|\mu_1 - \nu_1| + \ldots + |\mu_n - \nu_n| \leqslant \mu_1 + \nu_1 + \ldots + \mu_n + \nu_n = 3. \tag{1.19}$$

Таким образом, если величины $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ не связаны резонансными соотношениями до третьего порядка включительно, т. е. если

$$m_1\sigma_1 + \ldots + m_n\sigma_n \neq 0 \text{ при } 0 < |m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant 3, \tag{1.20}$$

то, выбрав величины $f_{\nu_1, \ldots, \mu_n}$ согласно формулам

$$f_{\nu_1, \ldots, \mu_n} = \frac{i g_{\nu_1, \ldots, \mu_n}}{\sigma_1(\mu_1 - \nu_1) + \ldots + \sigma_n(\mu_n - \nu_n)},$$

получим новую функцию Гамильтона H' такой, что в ней будут отсутствовать члены третьего порядка по q_i', p_i'.

Если в (1.16) будет сделана замена переменных, обратная (1.13), то придем к вещественной замене переменных (1.9).

Можно было бы попытаться аналогичным образом при помощи канонической замены переменных уничтожить члены четвертой степени в гамильтониане. Это, однако, не удастся сделать, и в новом гамильтониане останутся некоторые члены, имеющие вполне определенную структуру.

Если величины $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ не удовлетворяют ни одному из резонансных соотношений до четвертого порядка включительно, т. е.

$$m_1\sigma_1 + \ldots + m_n\sigma_n \neq 0 \text{ при } 0 < |m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant 4, \tag{1.21}$$

то в гамильтониане H_4 можно уничтожить все одночлены четвертого порядка, кроме тех, которые содержат u_j и v_j в одина-

ковых степенях. Действительно, уравнение (1.18) неразрешимо, если $\mu_k = \nu_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Тогда в

$$H_4'\left(\frac{u_j + v_j}{2}, \frac{u_j - v_j}{2i}\right)$$

останется совокупность одночленов вида

$$\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=2} g_{\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu_1,\ldots,\nu_n}(u_1v_1)^{\nu_1}\ldots(u_nv_n)^{\nu_n}. \qquad (1.22)$$

В переменных q_j', p_j' эта совокупность одночленов в H_4' имеет вид

$$\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(q_1'^2 + p_1'^2)^{\alpha_1}\ldots(q_n'^2 + p_n'^2)^{\alpha_n}, \qquad (1.23)$$

где $a_{\alpha 1}, \ldots, {}_{\alpha_n}$ — вещественные величины.

И, вообще, для автономной гамильтоновой системы справедливо следующее утверждение. Если частоты колебаний σ_j линейной системы не связаны резонансными соотношениями до порядка N включительно, т. е.

$$m_1\sigma_1 + \ldots + m_n\sigma_n \neq 0 \text{ при } 0 < |m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant N, \qquad (1.24)$$

то существует вещественное каноническое преобразование $q_i = q_i' + \ldots, p_i = p_i' + \ldots$, задаваемое сходящимися в окрестности начала координат рядами, такое, что функция Гамильтона (1.2), выраженная через q'_i, p'_i, имеет нормальную форму

$$H(q_i', p_i') = \overline{H}(r_1, \ldots, r_n) + \hat{H}(q_i', p_i'), \qquad (1.25)$$

где $\overline{H}$ — многочлен степени $[N/2]$ относительно $r_1, \ldots, r_n$ и $\hat{H}$ — сходящийся ряд по степеням q_i', p_i', начинающийся с членов порядка $N + 1$:

$$q_i' = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i, \; p_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.26)$$

Это утверждение нетрудно доказать методом математической индукции. Отметим, что постоянные коэффициенты многочлена $\overline{H}(r_1, \ldots, r_n)$ не зависят от порядка N нормализованных членов и от способа приведения функции (1.2) к нормальной форме (1.25): они являются инвариантами гамильтониана (1.2) относительно канонических преобразований [11, 12, 29].

Для случая 2π-периодической по t функции Гамильтона (1.2) результаты аналогичны. Существование 2π-периодического решения уравнения вида (1.17) было нами уже подробно исследовано (см. уравнение (7.12) второй главы). Выводы, которые получаются в этом случае, аналогичны только что сформулированным для случая автономной системы. Только в (1.24) знак $\neq 0$ надо заменить

на знак $\not\equiv 0 \pmod 1$, а нормализующее преобразование и функция $\mathcal{H}$ будут 2π-периодическими по t.

Если величины σ_j таковы, что условия (1.24) выполняются при любых сколь угодно больших N, то преобразование Биркгофа можно применить для нормализации функции Гамильтона во всех порядках. И тогда нормализованный гамильтониан будет зависеть только от переменных r_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), которые будут интегралами преобразованной системы. Но каноническое преобразование Биркгофа, нормализующее гамильтониан во всех порядках, будет, как правило, расходящимся [11, 12, 29, 30]. Поэтому и интегралы r_j будут формальными, т. е. они представляются в виде расходящихся рядов по q_i, p_i.

В дальнейшем мы обычно будем проводить нормализацию функции Гамильтона лишь до конечного (и даже сравнительно невысокого) порядка. Так что, как правило, применяемое нами преобразование Биркгофа будет аналитическим.

§ 2. Теорема Мозера об инвариантных кривых

В этом параграфе рассмотрим одну геометрическую теорему Мозера [72, 73], существенную для дальнейшего. Эта теорема относится к отображениям плоского кольца, сохраняющим площадь. Приведем формулировку теоремы Мозера. Пусть задано преобразование действительных переменных θ, $\rho \to \theta_1$, ρ_1:

$$\theta_1 = \theta + \gamma [\alpha(\rho) + F(\rho, \theta)], \qquad \rho_1 = \rho + \gamma G(\rho, \theta). \tag{2.1}$$

Это преобразование определено в кольце $0 < a \leqslant \rho \leqslant b$ ($b - a \geqslant 1$), но не обязательно отображает его в себя. В отображении (2.1) γ — постоянный положительный параметр, не превосходящий единицы. Пусть отображение (2.1) обладает свойствами:

1) любая замкнутая кривая $\rho = f(\theta) \equiv f(\theta + 2\pi)$, близкая к окружности (т. е. $f'(\theta)$ мала), пересекается со своим образом;

2) для некоторой постоянной $c_0 > 1$

$$0 < c_0^{-1} \leqslant \frac{d\alpha(\rho)}{d\rho} \leqslant c_0;$$

3) функции F и G, имеющие непрерывные производные до порядка l ($l = 333$) включительно, удовлетворяют для некоторого положительного $\delta = \delta(\varepsilon, c_0)$ ($\delta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$) неравенствам

$$|F|_0 + |G|_0 < \delta, \quad |\alpha|_l + |F|_l + |G|_l < c_0,$$

где норма $|F|_k$ определяется равенством

$$|F|_k = \sup \left| \frac{\partial^{m_1+m_2} F(\rho, \theta)}{\partial \rho^{m_1} \partial \theta^{m_2}} \right|, \quad m_1 + m_2 \leqslant k$$

(переменные ρ, θ изменяются в области определения $F(\rho, \theta)$).

В теореме Мозера утверждается, что при выполнении условий 1) — 3) для каждого ω такого, что

$$\alpha(a)+\varepsilon<\frac{\omega}{\gamma}<\alpha(b)-\varepsilon,$$

$|n\omega-2\pi m|\geqslant\gamma\varepsilon n^{-5/2}$ (m, n — целые числа, $n\neq 0$), существует инвариантная при отображении (2.1) кривая $c(\omega)$, которая в параметрической форме имеет вид

$$\theta=\theta'+p(\theta'),\quad \rho=\rho_0+q(\theta'),$$

где $|p|_1+|q|_1<\varepsilon$. Преобразование, индуцированное на инвариантной кривой, задается равенством $\theta_1'=\theta'+\gamma\alpha(\rho_0)$, где $\gamma\alpha(\rho_0)=\omega$. Функции F, G, p, q имеют период 2π по угловым переменным.

Таким образом, теорема Мозера об отображении (2.1) устанавливает существование бесконечного числа инвариантных кривых, лежащих в кольце $0<a\leqslant\rho\leqslant b$. Этими инвариантными кривыми кольцо $0<a\leqslant\rho\leqslant b$ разбивается на бесконечное число колец, отображающихся при помощи (2.1) на себя, и, следовательно, образы всех точек, лежащих внутри этих колец, ограничиваются при всех итерациях отображения (2.1). Для дальнейшего полезно отметить, что условие теоремы Мозера о пересечении кривой и ее образа, очевидно, выполнено, если отображение (2.1) сохраняет площадь.

§ 3. Теорема Арнольда—Мозера об устойчивости гамильтоновой системы с одной степенью свободы в общем эллиптическом случае

Рассмотрим гамильтонову систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Пусть начало координат $x=y=0$ является положением равновесия этой системы, а функция Гамильтона H — аналитическая в окрестности $x=y=0$ и 2π-периодична по t:

$$H=\sum_{k=2}^{\infty}H_k(x,y,t),\quad H_k=\sum_{\nu_1+\nu_2=k}a_{\nu_1,\nu_2}(t)x^{\nu_1}y^{\nu_2},$$
$$a_{\nu_1,\nu_2}(t+2\pi)\equiv a_{\nu_1,\nu_2}(t). \tag{3.2}$$

В (3.2) ν_1 и ν_2 — целые неотрицательные числа, $a_{\nu_1,\nu_2}(t)$ — непрерывные функции t.

Рассмотрим задачу об устойчивости положения равновесия $x=y=0$. Предположим, что линеаризованная система устойчива,

а ее характеристические показатели $\pm i\lambda$ таковы, что величина $k\lambda$ не будет целым числом при $k = 1, 2, \ldots, 2n$ (n — произвольное целое число). Тогда при помощи преобразования Биркгофа можно выбрать такие координаты и импульсы x, y, что функция Гамильтона (3.2) запишется в виде

$$H = \lambda r + c_2 r^2 + \ldots + c_n r^n + H'(x, y, t) \quad (2r = x^2 + y^2). \tag{3.3}$$

Здесь H' — аналитическая относительно x, y функция, имеющая по x, y порядок, не меньший, чем $2n+1$. Кроме того, H' 2π-периодична по t.

Общим эллиптическим случаем называют случай, когда среди постоянных $c_2, \ldots, c_n$ есть отличная от нуля. Согласно Арнольду и Мозеру [2, 3, 72], в общем эллиптическом случае положение равновесия $x = y = 0$ системы (3.1) устойчиво по Ляпунову.

Если число $k\lambda$ будет целым, то, вообще говоря, функцию Гамильтона (3.2) в виде (3.3) записать нельзя, а положение равновесия может быть неустойчивым. Ниже будет исследована задача об устойчивости в резонансных случаях, когда число $k\lambda$ — целое при $k \geqslant 3$. Многие частные случаи неустойчивости в этой задаче рассмотрены в работах Леви-Чивита [151], Зигеля [28], Мермана [71], Каменкова [31], Мустахишева [74]. Основной результат проведенного в этой главе исследования состоит в утверждении об устойчивости (при выполнении некоторого неравенства) в случае резонансов четного порядка (число k — четное). Кроме того, при помощи второго метода Ляпунова получены критерии неустойчивости при резонансах произвольного порядка. При изложении мы в основном следуем работе [53].

§ 4. Линейная нормализация

Будем исследовать устойчивость положения равновесия системы (3.1) внутри области устойчивости системы ее первого (линейного) приближения. Это означает, что число 2λ — нецелое. Для дальнейшего потребуется вещественное, каноническое, 2π-периодическое по t, линейное по x, y преобразование $x, y \to q, p$ гамильтониана (3.2) к такой форме, когда его квадратичная часть имеет вид

$$H_2 = \frac{1}{2}\lambda(q^2 + p^2).$$

Задача нормализации линейной гамильтоновой системы с n степенями свободы рассмотрены в главе 2. Нормализация системы с одной степенью свободы особенно проста и будет здесь проведена способом, отличным от изложенного во второй главе.

Линеаризованная система (3.1) имеет два линейно независимых решения

$$\alpha_j = \varphi_j(t)\, e^{i\lambda_j t}, \quad \beta_j = \psi_j(t)\, e^{i\lambda_j t} \quad (j = 1, 2), \tag{4.1}$$

где $\lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda$, а периодические функции φ_j, ψ_j удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_j}{dt} &= -i\lambda_j\varphi_j + a_{11}\varphi_j + 2a_{02}\psi_j, \\ \frac{d\psi_j}{dt} &= -i\lambda_j\psi_j - 2a_{20}\varphi_j - a_{11}\psi_j. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Очевидно, что если начальные значения φ_1, ψ_1 будут комплексно сопряженными соответственно с начальными значениями φ_2, ψ_2, то в силу однородности системы (4.2) эти функции будут комплексно сопряженными и при всех t. Тогда можно положить

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= z_1 + iz_2, \quad \psi_1 = z_3 + iz_4, \\ \varphi_2 &= \bar{\varphi}_1, \qquad \psi_2 = \bar{\psi}_1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где z_k — вещественные периодические функции t. Согласно (4.2), они удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= -\lambda z_2 + a_{11}z_1 + 2a_{02}z_3, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \lambda z_1 + a_{11}z_2 + 2a_{02}z_4, \\ \frac{dz_3}{dt} &= -\lambda z_4 - 2a_{20}z_1 - a_{11}z_3, \\ \frac{dz_4}{dt} &= \lambda z_3 - 2a_{20}z_2 - a_{11}z_4. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Далее, нетрудно проверить, что линеаризованная система (3.1) имеет два независимых интеграла

$$\begin{gathered} (u + iv)e^{-i\lambda t}, \quad (u - iv)e^{i\lambda t} \\ (u = z_3x - z_1y, \; v = z_4x - z_2y). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Введем новые переменные q, p формулами

$$q = v, \; p = u. \tag{4.6}$$

Это преобразование будет каноническим (но не обязательно унивалентным), так как функции z_k удовлетворяют соотношению

$$z_2z_3 - z_1z_4 = \text{const}, \tag{4.7}$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Выберем начальные значения функций z_k так, чтобы начальные значения функций φ_1, ψ_1 и φ_2, ψ_2 были комплексно сопряженными, а постоянная в правой части (4.7) равнялась единице (для унивалентности канонического преобразования (4.6)).

Обозначим через $x_j(t)$, $y_j(t)$ $(j = 1, 2)$ решения линеаризованной системы (3.1), удовлетворяющие условиям

$$x_1(0) = y_2(0) = 1, \quad x_2(0) = y_1(0) = 0.$$

Тогда начальные значения функций φ_j, ψ_j найдутся из следующих систем уравнений:

$$\begin{gathered}[x_1(2\pi) - e^{i2\pi\lambda_j}]\,\varphi_j(0) + x_2(2\pi)\,\psi_j(0) = 0,\\ y_1(2\pi)\,\varphi_j(0) + [y_2(2\pi) - e^{i2\pi\lambda_j}]\,\psi_j(0) = 0\\ (j = 1,\ 2).\end{gathered} \tag{4.8}$$

Определители этих систем равны нулю, так как $e^{i2\pi\lambda_j}$ — мультипликаторы линеаризованной системы (3.1). Решения систем (4.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varphi_j(0) &= -x_2(2\pi)c_j,\\ \psi_j(0) &= [x_1(2\pi) - e^{i2\pi\lambda_j}]c_j,\end{aligned} \tag{4.9}$$

где c_j — произвольные постоянные. Возьмем их вещественными и равными c. Тогда $\varphi_1(0) = \overline{\varphi}_2(0)$, $\psi_1(0) = \overline{\psi}_2(0)$. Из (4.3) и (4.9) получаем начальные значения функций z_j

$$\begin{aligned}z_1(0) &= -x_2(2\pi)c, & z_2(0) &= 0,\\ z_3(0) &= [x_1(2\pi) - \cos 2\pi\lambda]c, & z_4(0) &= \sin 2\pi\lambda \cdot c.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Полагая постоянную в (4.7) равной единице, получаем уравнение для определения c

$$\sin 2\pi\lambda \cdot x_2(2\pi)c^2 = 1. \tag{4.11}$$

Легко проверить, рассмотрев характеристическое уравнение, что величина $\sin 2\pi\lambda \cdot x_2(2\pi) \neq 0$, так как устойчивость исследуется внутри области устойчивости линеаризованной системы (3.1). Выбором знака λ (который до сих пор был не определенным) эту величину можно получить положительной. Поэтому уравнение (4.11) всегда имеет вещественное решение относительно c.

Таким образом, искомое каноническое преобразование найдено, и в переменных q, p функция Гамильтона такова:

$$H = \frac{1}{2}\lambda(q^2 + p^2) + \sum_{k=3}^{\infty} H_k(q, p, t), \tag{4.12}$$

где

$$H_k = \sum_{\nu_1+\nu_2=k} h_{\nu_1\nu_2}(t)\,q^{\nu_1}p^{\nu_2} \equiv \sum_{\nu_1+\nu_2=k} a_{\nu_1\nu_2}(t)\,(z_2p - z_1q)^{\nu_1}(z_4p - z_3q)^{\nu_2}.$$

§ 5. Неустойчивость в случае целого числа 3λ

К функции Гамильтона (4.12) теперь легко применить преобразование Биркгофа. Введем канонические переменные q^*, p^* при помощи 2π-периодической по t, производящей функции

$$S = qp^* + S^{(3)} \equiv qp^* + \sum_{\nu_1+\nu_2=3} s_{\nu_1\nu_2}(t)\, q^{\nu_1} p^{*\nu_2}. \tag{5.1}$$

Связь новых и старых переменных получается из формул

$$q^* = \frac{\partial S}{\partial p^*} = q + \frac{\partial S^{(3)}}{\partial p^*}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q} = p^* + \frac{\partial S^{(3)}}{\partial q}. \tag{5.2}$$

Новая функция Гамильтона $H^*(q^*, p^*, t)$, старая функция Гамильтона $H(q, p, t)$ и производящая функция $S(q, p^*, t)$ связаны тождеством относительно q, p^*;

$$H^*\left(\frac{\partial S}{\partial p^*}, p^*, t\right) \equiv H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S(q, p^*, t)}{\partial t}. \tag{5.3}$$

Если число 3λ не будет целым, то в новой функции Гамильтона можно полностью уничтожить члены третьей степени. Проведя несложные выкладки, получим, что для этого 2π-периодические функции $s_{\nu_1\nu_2}(t)$ следует взять такими:

$$\begin{aligned} s_{30} &= 2(u'_{30} + u'_{21}), \quad s_{03} = 2(v'_{30} - v'_{21}), \\ s_{12} &= 2(u'_{21} - 3u'_{30}), \quad s_{21} = -2(3v'_{30} + v'_{21}); \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} u'_{\nu_1\nu_2} &= f_{\nu_1\nu_2}(t)\sin\lambda(\nu_2-\nu_1)t + g_{\nu_1\nu_2}(t)\cos\lambda(\nu_2-\nu_1)t, \\ v'_{\nu_1\nu_2} &= f_{\nu_1\nu_2}(t)\cos\lambda(\nu_2-\nu_1)t - g_{\nu_1\nu_2}(t)\sin\lambda(\nu_2-\nu_1)t; \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$f_{\nu_1\nu_2}(t) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\pi\lambda(\nu_2-\nu_1)J_1(2\pi) + \frac{1}{2}J_2(2\pi) - J_2(t),$$

$$g_{\nu_1\nu_2}(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\pi\lambda(\nu_2-\nu_1)J_2(2\pi) + \frac{1}{2}J_1(2\pi) - J_1(t),$$

$$J_1(t) = \int_0^t [u''_{\nu_1\nu_2}(x)\cos\lambda(\nu_2-\nu_1)x - v''_{\nu_1\nu_2}(x)\sin\lambda(\nu_2-\nu_1)x]\,dx,$$

$$J_2(t) = \int_0^t [u''_{\nu_1\nu_2}(x)\sin\lambda(\nu_2-\nu_1)x + v''_{\nu_1\nu_2}(x)\cos\lambda(\nu_2-\nu_1)x]\,dx;$$

$$\begin{aligned} u''_{30} &= \frac{1}{8}(h_{30} - h_{12}), \quad v''_{30} = \frac{1}{8}(h_{03} - h_{21}), \\ u''_{21} &= \frac{1}{8}(3h_{30} + h_{12}), \quad v''_{21} = -\frac{1}{8}(3h_{03} + h_{21}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Из тождества (5.3) при таком выборе $S^{(3)}$ получаем члены четвертой

степени в виде

$$H_4^*(q, p^*, t) \equiv H_4(q, p^*, t) + \frac{1}{2}\lambda\left[\left(\frac{\partial S^{(3)}}{\partial q}\right)^2 - \left(\frac{\partial S^{(3)}}{\partial p^*}\right)^2\right] + \frac{\partial H_3}{\partial p^*}\frac{\partial S^{(3)}}{\partial q}. \tag{5.7}$$

Если $3\lambda = m$ (m — целое число), то полностью H_3^* уничтожить нельзя. Как показывают простые вычисления, гамильтониан H^* в этом случае при помощи преобразования Биркгофа можно привести к виду

$$H^* = \frac{1}{2}\lambda(q^{*2} + p^{*2}) + 2u_{30}^*(q^{*3} - 3q^*p^{*2}) + 2v_{30}^*(p^{*3} - 3p^*q^{*2}) + \\ + H'(q^*, p^*, t), \tag{5.8}$$

где

$$u_{30}^* = x_{30}\cos mt - y_{30}\sin mt, \quad v_{30}^* = x_{30}\sin mt + y_{30}\cos mt,$$

$$x_{30} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_{30}''\cos mt + v_{30}''\sin mt)\,dt,$$

$$y_{30} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(v_{30}''\cos mt - u_{30}''\sin mt)\,dt,$$

функция H' в (5.8) 2π-периодична по t и $H' = O((|q| + |p|)^4)$.

Теорема. *Если* $x_{30}^2 + y_{30}^2 \neq 0$, *то положение равновесия* $x = y = 0$ *системы* (3.1) *неустойчиво по Ляпунову.*

Для доказательства отметим сначала тот очевидный факт, что задачи об устойчивости относительно x, y в системе (3.1) и относительно q^*, p^* в системе с гамильтонианом (5.8) эквивалентны. Далее, сделаем такую замену переменных:

$$q^* = \sqrt{2r}\sin(\lambda t + \varphi - \theta), \quad p^* = \sqrt{2r}\cos(\lambda t + \varphi - \theta),$$
$$\sin 3\theta = \frac{x_{30}}{\sqrt{x_{30}^2 + y_{30}^2}}, \qquad \cos 3\theta = \frac{y_{30}}{\sqrt{x_{30}^2 + y_{30}^2}}. \tag{5.9}$$

Изменение переменных r, φ будет описываться дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона (r — импульс, φ — координата)

$$H = 4\sqrt{2(x_{30}^2 + y_{30}^2)}\,r\sqrt{r}\cos 3\varphi + O(r^2). \tag{5.10}$$

Возьмем функцию Ляпунова

$$V = r\sqrt{r}\sin 3\varphi. \tag{5.11}$$

Ее производная в силу уравнений движения с функцией Гамильтона (5.10) будет такой:

$$\frac{dV}{dt} = 18\sqrt{2(x_{30}^2 + y_{30}^2)}\,r^2 + O(r^{5/2}). \tag{5.12}$$

Так как функция V — знакопеременная, а ее производная (5.12) — определенно-положительная в окрестности начала координат, то, согласно теореме Ляпунова о неустойчивости, положение равновесия неустойчиво.

§ 6. Исследование устойчивости в случае целого числа 4λ

Если число 3λ не будет целым, то в переменных q^*, p^* гамильтониан запишется в виде

$$H = H_2^* + H_4^* + \ldots,$$

где H_4^* вычисляется по формулам (5.4) — (5.7). Пусть $4\lambda = m$. Делая замену переменных q^*, $p^* \to \tilde{q}, \tilde{p}$ с производящей функцией

$$S = q^*\tilde{p} + S^{(4)},$$

можно упростить члены четвертой степени в новой функции Гамильтона $\tilde{H}$, которая, как показывают выкладки, будет при этом иметь вид

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\lambda(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2) + \frac{1}{4}c_2(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2)^2 + \tilde{u}_{40}(\tilde{q}^4 - 6\tilde{q}^2\tilde{p}^2 + \tilde{p}^4) - \\ - 4\tilde{v}_{40}\tilde{q}\tilde{p}(\tilde{q}^2 - \tilde{p}^2) + H''(\tilde{q}, \tilde{p}, t), \quad (6.1)$$

где $H'' = O((|\tilde{q}| + |\tilde{p}|)^5)$ и имеет период 2π по t. В (6.1) введены следующие обозначения:

$$c_2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(3h_{40}^* + h_{22}^* + 3h_{04}^*)\,dt,$$

$$\tilde{u}_{40} = x_{40}\cos mt - y_{40}\sin mt, \quad \tilde{v}_{40} = y_{40}\cos mt + x_{40}\sin mt, \quad (6.2)$$

$$x_{40} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u''_{40}\cos mt + v''_{40}\sin mt)\,dt,$$

$$y_{40} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(v''_{40}\cos mt - u''_{40}\sin mt)\,dt,$$

$$u''_{40} = \frac{1}{8}(h_{40}^* - h_{22}^* + h_{04}^*), \quad v''_{40} = \frac{1}{8}(h_{13}^* - h_{31}^*).$$

Если $x_{40}^2 + y_{40}^2 \neq 0$, то можно перейти к переменным r, φ по формулам, аналогичным формулам (5.9). Получим

$$\tilde{H} = r^2(c_2 + b_2\cos 4\varphi) + \tilde{K}(r, \varphi, t), \quad (6.3)$$

где $b_2 = 4\sqrt{x_{40}^2 + y_{40}^2}$, а функция $\tilde{K} = O(r^{5/2})$ и периодична по φ и t с периодами 2π и 8π соответственно.

Теорема. *Если* $|c_2| < b_2$, *то положение равновесия неустойчиво; если же* $|c_2| > b_2$, *то имеет место устойчивость по Ляпунову.*

Для доказательства первого утверждения этой теоремы возьмем функцию Ляпунова

$$V = r^2 \sin 4\varphi; \tag{6.4}$$

функция V будет знакопеременной в окрестности начала координат. Для ее производной получаем такое выражение:

$$\frac{dV}{dt} = 8r^3 (b_2 + c_2 \cos 4\varphi) + O(r^{7/2}). \tag{6.5}$$

При выполнении неравенства $|c_2| < b_2$ функция (6.5) будет определенно-положительной в достаточно малой окрестности начала координат. Следовательно, положение равновесия неустойчиво.

Докажем теперь устойчивость при выполнении неравенства $|c_2| < b_2$. Нетрудно проверить, что в этом случае в системе с «укороченным» гамильтонианом

$$h = r^2 (c_2 + b_2 \cos 4\varphi) \tag{6.6}$$

переменная r будет периодической, а φ — монотонной функциями t. Сделаем каноническое преобразование, приводящее h к переменным действие I — угол W [8, 36]. Переменные действие — угол связаны с r и φ соотношениями

$$r = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad W = \frac{\partial S}{\partial I}, \quad S(I, \varphi) = \int_0^{\varphi} r\, d\varphi. \tag{6.7}$$

Здесь S — производящая функция канонического преобразования $r, \varphi \to I, W$. Интеграл в (6.7) вычисляется при условии

$$r^2 (c_2 + b_2 \cos 4\varphi) = h, \tag{6.8}$$

где $h = h(I)$ — функция обратная к

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r\, d\varphi; \tag{6.9}$$

при этом r в (6.9) означает функцию $r(\varphi, h)$, получаемую из (6.8)

Заметим, что знаки коэффициентов c_2 и b_2 в гамильтониане (6.3) можно считать одинаковыми. Если это не так, то, вводя вместо переменной φ угол $\varphi - \pi/4$, получим гамильтониан, у которого эти коэффициенты будут иметь одинаковые знаки. Введем обозначение $k^2 = 2b_2/(b_2 + c_2)$. В силу условий доказываемой теоремы выполняются неравенства $0 \leqslant k^2 < 1$. После несложных вычислений, использующих различные формулы для эллиптических функций и интегралов из [18, 26, 91], получим из (6.7) — (6.9)

явное выражение для производящей функции

$$S = \frac{\pi I}{4K(k^2)} F(2\varphi, k^2), \tag{6.10}$$

где K и F — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода, k — их модуль. Из (6.7) и (6.10) находим выражение старых переменных через переменные действие — угол:

$$r = \frac{\pi I}{2K(k^2)\,\mathrm{dn}\,\frac{4K(k^2)}{\pi} W}, \quad \varphi = \frac{1}{2}\mathrm{am}\frac{4K(k^2)}{\pi} W. \tag{6.11}$$

В переменных I, W функция Гамильтона (6.3) имеет вид

$$\bar{H} = \frac{\pi^2 (b_2 + c_2)}{4K^2(k^2)} I^2 + \Phi(I, W, t), \tag{6.12}$$

где функция Φ при достаточно малых I аналитична относительно $\sqrt{I}$, $\Phi = O(I^{5/2})$.

Сделаем еще одну каноническую замену переменных I, $W \to R$, Ψ:

$$I = \sigma \frac{2K^2(k^2)}{\pi^2 |\, b_2 + c_2 \,|} R, \quad W = \mathrm{sign}\,(b_2 + c_2)\,\Psi, \tag{6.13}$$

где σ — малый положительный параметр ($0 < \sigma \ll 1$). В переменных R и Ψ уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sigma R + O(\sigma^{3/2}), \quad \frac{dR}{dt} = O(\sigma^{3/2}). \tag{6.14}$$

Величины порядка $\sigma^{3/2}$ в (6.14) 2π-периодичны по Ψ, 8π-периодичны по t и при достаточно малых σ аналитичны по R в кольце $1 \leqslant R \leqslant 2$. Пусть θ и ρ — начальные значения Ψ и R, лежащие в этом кольце. Проинтегрировав систему (6.14) от $t = \theta$ до $t = 8\pi$, получим отображение кольца, которое сохраняет площадь, так как система (6.14) гамильтонова (теорема Лиувилля о сохранении фазового объема [16]). При малых σ это отображение имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi &= \theta + \sigma\,[8\pi\rho + \sqrt{\sigma} f(\rho, \theta, \sigma)], \\ R &= \rho + \sigma\sqrt{\sigma}\, g(\rho, \theta, \sigma), \end{aligned} \tag{6.15}$$

где f и g 2π-периодичны по θ и аналитичны по ρ в кольце $1 \leqslant \rho \leqslant 2$.

Отображение (6.15) удовлетворяет всем условиям теоремы Мозера об инвариантных кривых. Поэтому в кольце $1 < \rho < 2$ существуют кривые, инвариантные при отображении (6.15). Следовательно, траектория системы (6.14), начинающаяся между инвариантными кривыми, при всех t остается в кольце $1 < R < 2$.

Учитывая связь переменной R и исходных переменных, получаем отсюда устойчивость положения равновесия $x = y = 0$ системы (3.1). Теорема доказана.

Сделаем в заключение параграфа два замечания. Во-первых, отметим, что при выполнении неравенства $|c_2| > b_2$ существует степенной ряд (возможно, расходящийся), который формально является знакоопределенным интегралом системы (3.1) [158]. Согласно только что доказанной теореме, из существования формального интеграла в нашей задаче следует устойчивость по Ляпунову.

Второе замечание касается «критического» случая $|c_2| = b_2$. В этом случае члены четвертого порядка по x, y в гамильтониане (3.2) не решают вопроса об устойчивости. Система с «укороченным» гамильтонианом (6.6) неустойчива. Но члены более высокого порядка могут либо сделать ее устойчивой, либо оставить неустойчивой. Первый случай реализуется, например, в системе с гамильтонианом

$$H = r^2(1 + \cos 4\varphi) + r^3,$$

а второй — в системе, имеющей функцию Гамильтона

$$H = r^2(1 + \cos 4\varphi) - r^4 \sin 8\varphi.$$

В первом случае устойчивость очевидна из-за существования знакоопределенного интеграла $H = \text{const}$; неустойчивость во втором случае следует, например, из существования частного решения

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad r(t) = \frac{r(0)}{\sqrt[3]{1 - 24r^3(0)\,t}},$$

которое неограниченно возрастает при $t \to \frac{1}{24r^3(0)}$, как бы ни были малы начальные значения $r(0)$.

§ 7. Устойчивость при резонансах произвольного порядка

Пусть функция Гамильтона (3.2) такова, что величина λk не будет целым числом при $k = 1, 2, \ldots, 2n$, а коэффициенты $c_2, c_3, \ldots, c_n$ в (3.3) равны нулю. Тогда вопрос об устойчивости не решается членами до порядка $2n$ в разложении гамильтониана.

Допустим теперь, что число $\lambda(2n + 1)$ будет целым. Тогда функция Гамильтона (3.2) может быть приведена к виду

$$H = ar^n \sqrt{r} \cos(2n + 1)\varphi + O(r^{n+1}) \qquad (a = \text{const}). \tag{7.1}$$

При помощи функции Ляпунова

$$V = r^n \sqrt{r} \sin(2n + 1)\varphi \tag{7.2}$$

легко показать, что при $a \neq 0$ положение равновесия $x = y = 0$ неустойчиво.

Пусть, далее, либо $a = 0$, либо число λk не будет целым при $k = 1, 2, \ldots, 2n, 2n + 1$, а число $\lambda(2n + 2)$ — целое. Тогда гамильтониан приводится к виду

$$H = r^{n+1}[c + b\cos 2(n + 1)\varphi] + O(r^{n+3/2}), \tag{7.3}$$

где b и c — постоянные коэффициенты. При выполнении неравенства $|b| > |c|$ положение равновесия неустойчиво. Это доказывается при помощи функции Ляпунова

$$V = r^{n+1}\sin 2(n + 1)\varphi. \tag{7.4}$$

Если же $|b| < |c|$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову. Для доказательства этого утверждения сделаем каноническое преобразование $r, \varphi \to I, W$ при помощи производящей функции

$$S(I, \varphi) = \frac{\pi I}{2(n+1)G_{n+1}} \cdot \int_0^{(n+1)\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt[n+1]{1 - k^2\sin^2\alpha}} \quad \left(k^2 = \frac{2b}{b + c}\right). \tag{7.5}$$

Знаки b и c можно считать одинаковыми, поэтому $0 \leqslant k^2 < 1$. В (7.5) введено обозначение

$$G_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt[n+1]{1 - k^2\sin^2\alpha}}.$$

В новых переменных функция Гамильтона запишется в виде

$$H = \left(\frac{\pi I}{2G_{n+1}}\right)^{n+1}(b + c) + \Gamma(I, W, t),$$

где функция $\Gamma = O(I^{n+3/2})$ и периодична по W и t. Дальнейшее доказательство сводится к применению теоремы Мозера об инвариантных кривых, как это сделано в предыдущем параграфе.

ГЛАВА 4

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим автономную каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2). \tag{1.1}$$

Пусть начало координат является положением равновесия системы и гамильтониан H есть аналитическая функция обобщенных координат и импульсов q_i, p_i, разлагающаяся в ряд

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{1.2}$$

где H_m — однородная функция степени m относительно q_i, p_i.

Если H_2 — знакоопределенная функция, то, согласно теореме Ляпунова, положение равновесия устойчиво (для применения теоремы Ляпунова об устойчивости в качестве функции Ляпунова V можно взять в этом случае функцию Гамильтона H). Пусть, однако, H_2 не является знакоопределенной квадратичной формой, но система (1.1) устойчива в первом (линейном) приближении. Тогда при некоторых ограничениях на частоты ω_1, ω_2 линейной системы и на коэффициенты форм H_3 и H_4 вопрос об устойчивости можно решить при помощи следующей теоремы Арнольда — Мозера [2, 3, 72].

Теорема. *Если функция Гамильтона* (1.2) *такова, что*

1) *характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет чисто мнимые корни* $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$;

2) $$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \neq 0; \tag{1.3}$$

где n_1, n_2 — *целые числа, удовлетворяющие условию* $0 < |n_1| + |n_2| \leqslant 4$;

3) $$c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0, \tag{1.4}$$

то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

В формулировке теоремы предполагается, что функция Гамильтона (1.2) записана в виде

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}), \tag{1.5}$$

где $2r_i = q_i^2 + p_i^2$. Выбор координат и импульсов q_i, p_i, в которых гамильтониан (1.2) представляется в виде (1.5), осуществляется при помощи преобразования Биркгофа, которое в нашем случае возможно при выполнении условия (1.3). Коэффициенты c_{ij} являются инвариантами функции Гамильтона (1.2) относительно канонических преобразований.

Во многих приложениях при решении задачи об устойчивости теоремы Арнольда — Мозера недостаточно. Необходимо более полное исследование, когда условия (1.3), (1.4) не выполнены.

Случай нулевых частот линеаризованной системы в рассматриваемых ниже задачах небесной механики не встретится. (Отметим, однако, что задача об устойчивости автономной гамильтоновой системы в случае двух нулевых частот тщательно исследована в работе Сокольского [85].) Предположим поэтому, что $\omega_1 \geqslant \omega_2 > 0$. Тогда условие (1.3) не выполняется при $\omega_1 = k\omega_2$ ($k = 1, 2, 3$). Исследование устойчивости в этих трех резонансных случаях проведено в § 2—4. Устойчивость при невыполнении условия (1.4) рассмотрена в § 5.

§ 2. Исследование устойчивости при резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$

Пусть частоты линеаризованной системы (1.1) связаны резонансным соотношением третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$. Проведем, следуя [55], подробное исследование устойчивости. Будем считать, что гамильтониан (1.2) имеет вид, соответствующий нормальным колебаниям линейной системы (соответствующую вещественную линейную нормализацию можно провести согласно, например, главе 2):

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) + \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=3} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}. \tag{2.1}$$

Для приведения гамильтониана (2.1) к виду, удобному для применения преобразования Биркгофа, сделаем каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2} q_1' + \frac{i}{\omega_1} p_1', & p_1 &= \frac{1}{2} i\omega_1 q_1' + p_1', \\ q_2 &= -\frac{i}{2} q_2' + \frac{1}{\omega_2} p_2', & p_2 &= -\frac{1}{2}\omega_2 q_2' + i p_2' \end{aligned} \qquad (i^2 = -1). \tag{2.2}$$

В новых переменных функция Гамильтона запишется в виде

$$H = i\omega_1 q_1' p_1' + i\omega_2 q_2' p_2' + \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=3} h'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1'^{\nu_1} q_2'^{\nu_2} p_1'^{\mu_1} p_2'^{\mu_2}. \tag{2.3}$$

Коэффициенты формы третьего порядка в (2.3) выражаются через коэффициенты функции Гамильтона (2.1) по следующим формулам. Обозначим через $x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ и $y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ следующие десять пар вещественных величин:

$$x_{0030}=h_{0030}-\frac{1}{\omega_1^2}h_{2010}, \qquad y_{0030}=\frac{1}{\omega_1}h_{1020}-\frac{1}{\omega_1^3}h_{3000},$$

$$x_{1020}=-\frac{1}{2}h_{1020}-\frac{3}{2\omega_1^2}h_{3000}, \qquad y_{1020}=\frac{3\omega_1}{2}h_{0030}+\frac{1}{2\omega_1}h_{2010},$$

$$x_{0120}=-\frac{\omega_2}{2}h_{0021}+\frac{1}{2\omega_1}h_{1110}+\frac{\omega_2}{2\omega_1^2}h_{2001}, \quad y_{0120}=-\frac{1}{2}h_{0120}-\frac{\omega_2}{2\omega_1}h_{1011}+\frac{1}{2\omega_1^2}h_{2100},$$

$$x_{1011}=-\omega_1 h_{0021}-\frac{1}{\omega_1}h_{2001}, \qquad y_{1011}=\frac{\omega_1}{\omega_2}h_{0120}+\frac{1}{\omega_1\omega_2}h_{2100},$$

$$x_{0021}=\frac{1}{\omega_2}h_{0120}-\frac{1}{\omega_1}h_{1011}-\frac{1}{\omega_2\omega_1^2}h_{2100}, \quad y_{0021}=h_{0021}+\frac{1}{\omega_1\omega_2}h_{1110}-\frac{1}{\omega_1^2}h_{2001},$$

$$x_{1002}=-\frac{\omega_1}{2\omega_2}h_{0111}-\frac{1}{2}h_{1002}+\frac{1}{2\omega_2^2}h_{1200}, \quad y_{1002}=-\frac{\omega_1}{2}h_{0012}+$$

$$+\frac{\omega_1}{2\omega_2^2}h_{0210}+\frac{1}{2\omega_2}h_{1101},$$

$$x_{0012}=-h_{0012}+\frac{1}{\omega_2^2}h_{0210}-\frac{1}{\omega_1\omega_2}h_{1101}, \quad y_{0012}=\frac{1}{\omega_2}h_{0111}-\frac{1}{\omega_1}h_{1002}+\frac{1}{\omega_1\omega_2^2}h_{1200},$$

$$x_{0111}=\frac{\omega_2}{\omega_1}h_{1002}+\frac{1}{\omega_1\omega_2}h_{1200}, \qquad y_{0111}=-\omega_2 h_{0012}-\frac{1}{\omega_2}h_{0210},$$

$$x_{0201}=-\frac{\omega_2}{4}h_{0102}-\frac{3}{4\omega_2}h_{0300}, \qquad y_{0201}=\frac{3\omega_2^2}{4}h_{0003}+\frac{1}{4}h_{0201},$$

$$x_{0003}=-\frac{1}{\omega_2}h_{0102}+\frac{1}{\omega_2^3}h_{0300}, \qquad y_{0003}=-h_{0003}+\frac{1}{\omega_2^2}h_{0201}. \qquad (2.4)$$

По этим десяти парам $x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$, $y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ вычисляются соответствующие коэффициенты $h'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ из (2.3):

$$h'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}=x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}+iy_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}. \qquad (2.5)$$

Остальные десять коэффициентов $h'_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}$ формы третьей степени в (2.3) вычисляются по формулам

$$h'_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}=(y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}+ix_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2})\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)^{\mu_1-\nu_1}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)^{\mu_2-\nu_2} \qquad (2.6)$$

Применив преобразование Биркгофа $q'_j, p'_j \to q''_j, p''_j$, уничтожим в функции Гамильтона все члены третьей степени, кроме резонансных. В новых переменных гамильтониан станет таким:

$$H=i\omega_1 q''_1 p''_1+i\omega_2 q''_2 p''_2+h'_{1002}q''_1 p''^2_2+h'_{0210}q''^2_2 p''_1+\ldots \qquad (2.7)$$

Будем считать, что $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \neq 0$. Выполним еще несколько канонических преобразований. Во-первых, вернемся к вещественным переменным, сделав каноническое преобразование $q_j'' p_j'' \to \tilde{q}_j \tilde{p}_j$:

$$q_1'' = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}(\tilde{q}_1 - i\tilde{p}_1), \qquad q_2'' = \frac{1}{\sqrt{\omega_2}}(i\tilde{q}_2 - \tilde{p}_2),$$
$$p_1'' = \frac{\sqrt{\omega_1}}{2}(-i\tilde{q}_1 + \tilde{p}_1), \qquad p_2'' = \frac{\sqrt{\omega_2}}{2}(\tilde{q}_2 - i\tilde{p}_2). \tag{2.8}$$

Во-вторых, введем полярные координаты r_i, φ_i при помощи канонической замены переменных

$$\tilde{q}_j = \sqrt{2r_j}\sin(\varphi_j - \theta_j), \qquad \tilde{p}_j = \sqrt{2r_j}\cos(\varphi_j - \theta_j) \qquad (j = 1, 2), \tag{2.9}$$

где $\theta_2 = 0$, а θ_1 определяется из соотношений

$$\sin\theta_1 = \frac{y_{1002}}{\sqrt{x_{1002}^2 + y_{1002}^2}}, \quad \cos\theta_1 = \frac{x_{1002}}{\sqrt{x_{1002}^2 + y_{1002}^2}}.$$

В полярных координатах функция Гамильтона имеет вид

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_1 - \sqrt{\omega_2 (x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}\, r_2 \sqrt{r_1}\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + \\ + \mathcal{H}(r_j, \varphi_j), \tag{2.10}$$

где $\mathcal{H}$ имеет период 2π по φ_j и $\mathcal{H} = O((r_1 + r_2)^2)$.

Теорема. *Если гамильтониан возмущенного движения таков, что* $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \neq 0$, *то положение равновесия неустойчиво. Если же* $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 = 0$, а $c_{20} + 2c_{11} + 4c_{02} \neq 0$, *то имеет место устойчивость по Ляпунову.*

Для доказательства неустойчивости сначала при помощи интеграла $H = \text{const}$ понизим порядок системы на две единицы [90]. Для доказательства неустойчивости положения равновесия достаточно показать его неустойчивость хотя бы на одном уровне энергии $H = \text{const}$. Рассмотрим уровень $H = 0$. Из уравнения $H = 0$ при достаточно малых r_1 и r_2 получаем

$$r_1 = -K = \frac{1}{2} r_2 + \frac{1}{4\omega_2}\sqrt{2\omega_2 (x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}\, r_2 \sqrt{r_2}\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + \\ + O(r_2^2). \tag{2.11}$$

Мы получили, таким образом, каноническую систему с одной степенью свободы и с функцией Гамильтона K. Новой независимой переменной является угловая переменная φ_1.

Введем вместо переменных r_2, φ_2 новые переменные r, φ по формулам

$$r = r_2, \quad \varphi = \varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_1.$$

Тогда получаем систему с такой функцией Гамильтона:

$$K = -\frac{1}{4\omega_2}\sqrt{2\omega_2(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}\, r\sqrt{r}\sin 2\varphi + O(r^2). \qquad (2.12)$$

Из уравнений движения системы с гамильтонианом (2.10) следует, что при малых r_1 и r_2 угловая переменная φ_1 будет монотонно возрастающей функцией времени t. Поэтому в задаче об устойчивости переменная φ_1 может играть ту же роль, что и время.

Чтобы показать неустойчивость, воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости. Функцию Ляпунова V возьмем в виде

$$V = r\sqrt{r}\cos 2\varphi. \qquad (2.13)$$

Ясно, что V является знакопеременной функцией. Для ее производной получаем такое выражение:

$$\frac{dV}{d\varphi_1} = \frac{3}{4\omega_2}\sqrt{2\omega_2(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}\, r^2 + O(r^{5/2}). \qquad (2.14)$$

Функция (2.14) определенно-положительная в окрестности начала координат. Следовательно, согласно теореме Ляпунова, имеет место неустойчивость.

Пусть теперь $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 = 0$. Тогда в гамильтониане (2.7) отсутствуют резонансные члены $h'_{1002}q''_1 p''^2_2$ и $h'_{0210}q''^2_2 p''_1$, а функцию Гамильтона, несмотря на наличие соизмеримости $\omega_1 = 2\omega_2$, при помощи преобразования Биркгофа можно привести к виду (1.5). И тогда выполнение условия (1.4) теоремы Арнольда — Мозера гарантирует устойчивость. Таким образом, при условии $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 = 0$ и $c_{20} + 2c_{11} + 4c_{02} \neq 0$ положение равновесия устойчиво. Теорема доказана.

§ 3. Устойчивость при резонансе $\omega_1 = 3\omega_2$

Теперь рассмотрим задачу об устойчивости положения равновесия системы (1.1) при наличии резонанса четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$. Эта задача изучена в работах [53, 55].

Выпишем сначала нужные для решения задачи об устойчивости коэффициенты $h'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ при членах четвертого порядка в гамильтониане (2.3):

$$h'_{2020} = -\frac{3}{2}\omega_1^2 h_{0040} - \frac{3}{2\omega_1^2}h_{4000} - \frac{1}{2}h_{2020},$$

$$h'_{1111} = \omega_1\omega_2 h_{0022} + \frac{1}{\omega_1\omega_2}h_{2200} + \frac{\omega_1}{\omega_2}h_{0220} + \frac{\omega_2}{\omega_1}h_{2002}, \qquad (3.1)$$

$$h'_{0202} = -\frac{3}{2}\omega_2^2 h_{0004} - \frac{3}{2\omega_2^2}h_{0400} - \frac{1}{2}h_{0202},$$

$$h'_{1003} = u_{1003} + iv_{1003},$$
$$h'_{0310} = -\frac{\omega_2^3}{4\omega_1}(u_{1003} - iv_{1003}), \tag{3.1}$$

где

$$u_{1003} = \frac{1}{2}\omega_1 h_{0013} + \frac{1}{2\omega_2^3} h_{1300} - \frac{1}{2\omega_2} h_{1102} - \frac{\omega_1}{2\omega_2^2} h_{0211},$$
$$v_{1003} = -\frac{\omega_1}{2\omega_2} h_{0112} - \frac{1}{2} h_{1003} + \frac{1}{2\omega_2^2} h_{1201} + \frac{\omega_1}{2\omega_2^3} h_{0310}. \tag{3.2}$$

При помощи преобразования Биркгофа в гамильтониане (2.3) можно уничтожить все члены третьей степени, а из членов четвертой степени останутся резонансные и содержащие только произведения $q_j p_j$. Нормализованная до членов четвертого порядка функция Гамильтона будет иметь следующий вид:

$$H = i\omega_1 q_1'' p_1'' + i\omega_2 q_2'' p_2'' - c_{20}(q_1'' p_1'')^2 + c_{11}(q_1'' p_1'')(q_2'' p_2'') -$$
$$- c_{02}(q_2'' p_2'')^2 + l_{1003} q_1'' p_2''^3 + l_{0310} q_2''^3 p_1'' + \ldots \tag{3.3}$$

Величины c_{20}, c_{11}, c_{02} вещественны, а l_{1003} и l_{0310} можно записать в виде

$$l_{1003} = x_{1003} + iy_{1003}, \quad l_{0310} = -\frac{\omega_2^2}{12}(x_{1003} - iy_{1003}). \tag{3.4}$$

Формулы для расчета коэффициентов нормальной формы (3.3) через коэффициенты исходного гамильтониана (2.1) таковы:

$$c_{20} = -h'_{2020} - \frac{27}{8}\omega_2^2(x_{0030}^2 + y_{0030}^2) - \frac{3}{2}(x_{1020}^2 + y_{1020}^2) -$$
$$- \frac{9}{10}(x_{0120}^2 + y_{0120}^2) + \frac{1}{2}(x_{1011}^2 + y_{1011}^2) + \frac{9}{56}\omega_2^2(x_{0021}^2 + y_{0021}^2),$$
$$c_{11} = h'_{1111} - \frac{2}{3}(x_{1002}^2 + y_{1002}^2) + \frac{3}{10}\omega_2^2(x_{0012}^2 + y_{0012}^2) -$$
$$- \frac{9}{14}\omega_2^2(x_{0021}^2 + y_{0021}^2) - \frac{18}{5}(x_{0120}^2 + y_{0120}^2) + 2(x_{0111}x_{1020} + y_{0111}y_{1020})$$
$$- \frac{4}{\omega_2}(x_{0201}y_{1011} + x_{1011}y_{0201}), \tag{3.5}$$
$$c_{02} = -h'_{0202} + \frac{3}{8}\omega_2^2(x_{0003}^2 + y_{0003}^2) + \frac{6}{\omega_2^2}(x_{0201}^2 + y_{0201}^2) -$$
$$- \frac{1}{6}(x_{1002}^2 + y_{1002}^2) - \frac{1}{2}(x_{0111}^2 + y_{0111}^2) - \frac{3}{40}\omega_2^2(x_{0012}^2 + y_{0012}^2),$$
$$x_{1003} = u_{1003} - \frac{9}{5}(x_{0120}x_{0012} + y_{0120}y_{0012}) - \frac{1}{\omega_2}(x_{1002}y_{1011} + x_{1011}y_{1002}) +$$
$$+ \frac{4}{\omega_2^2}(x_{1002}x_{0201} + y_{1002}y_{0201}) + \frac{3}{2}(x_{0003}x_{0111} + y_{0003}y_{0111}), \tag{3.6}$$

$$y_{1003} = v_{1003} - \frac{9}{5}(x_{0120}y_{0012} - x_{0012}y_{0120}) - \frac{1}{\omega_2}(y_{1011}y_{1002} - x_{1011}x_{1002}) + \\ + \frac{4}{\omega_2^2}(x_{0201}y_{1002} - x_{1002}y_{0201}) + \frac{3}{2}(x_{0111}y_{0003} - x_{0003}y_{0111}). \qquad (3.6)$$

Выражения для $x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ и $y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ приведены в предыдущем параграфе. Отметим, что формулы (3.5) выписаны специально для случая резонанса $\omega_1 = 3\omega_2$. Выражения для c_{ij} при произвольных ω_1 и ω_2 можно найти, например, в [37] или [55].

Пусть $x_{1003}^2 + y_{1003}^2 \neq 0$. Произведя тогда канонические преобразования (2.8) и (2.9), где теперь

$$\sin\theta_1 = -\frac{y_{1003}}{\sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2}}, \quad \cos\theta_1 = -\frac{x_{1003}}{\sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2}},$$

получим нормализованный гамильтониан в полярных координатах

$$H = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ + \frac{1}{3}\omega_2\sqrt{3(x_{1003}^2 + y_{1003}^2)r_2}\sqrt{r_1r_2}\cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^{5/2}). \qquad (3.7)$$

Введем обозначения

$$a = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}, \qquad b = 3\omega_2\sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2}. \qquad (3.8)$$

Теорема. *Если гамильтониан возмущенного движения таков, что* $|a| < b$, *то положение равновесия неустойчиво; если же* $|a| > b$, *то имеет место устойчивость по Ляпунову.*

Для доказательства неустойчивости, как и в предыдущем параграфе, рассмотрим движение на уровне $H = 0$. При достаточно малых r_1 и r_2 из уравнения $H = 0$ получаем

$$r_1 = \frac{1}{3}r_2 - \frac{1}{27\omega_2}r_2^2[a + b\cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)] + R(r_2, \varphi_2, \varphi_1),$$

где функция R имеет период 2π по φ_1 и φ_2, $R = O(r_2^{5/2})$.

Уравнения движения на уровне $H = 0$ имеют вид

$$\frac{dr_2}{d\varphi_1} = -\frac{\partial K}{\partial\varphi_2}, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_1} = \frac{\partial K}{\partial r_2},$$

где

$$K = -\frac{1}{3}r_2 + \frac{1}{27\omega_2}r_2^2[a + b\cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)] - R(r_2, \varphi_2, \varphi_1).$$

В переменных $\varphi = \varphi_2 + {}^1/_3\varphi_1$, $r_2 = r$ гамильтониан K имеет вид

$$K = \frac{1}{27\omega_2}r^2(a + b\cos 3\varphi) + K_1(r, \varphi, \varphi_1), \qquad (3.9)$$

где K_1 имеет период 2π по φ и φ_1, $K_1 = O(r^{5/2})$. Чтобы показать неустойчивость при выполнении неравенства $|a| < b$, воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости. В рассматриваемом случае вопрос разрешается функцией

$$V = r^2 \sin 3\varphi. \tag{3.10}$$

Вычисляя производную этой функции в силу уравнений движения с гамильтонианом (3.9), получаем

$$\frac{dV}{d\varphi_1} = \frac{2r^3}{9\omega_2}(a\cos 3\varphi + b) + O(r^{7/2}). \tag{3.11}$$

При выполнении неравенства $|a| < b$ функция (3.11), очевидно, будет знакоопределенной. А так как функция Ляпунова V — знакопеременная, то отсюда и следует неустойчивость.

Пусть теперь $|a| > b$. Докажем устойчивость положения равновесия при выполнении этого неравенства. В тривиальном случае $b = 0$ устойчивость следует из теоремы Арнольда — Мозера, так как нормализованная до членов четвертого порядка функция Гамильтона (3.7) при $b = 0$ не содержит тригонометрических членов, а условие $|a| > 0$ означает выполнение неравенства (1.4). Случай $b \neq 0$ более сложен. Для доказательства устойчивости снова используем интеграл $H = h = \text{const}$ и сведем систему с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы, но с 2π-периодической зависимостью новой функции Гамильтона от новой независимой переменной. В отличие от задачи о неустойчивости, здесь недостаточно рассмотрения только одного уровня энергии $H = h$ (например, $h = 0$, как было в рассмотренных выше случаях). В задаче об устойчивости необходимо рассматривать хотя и малый, но конечный интервал изменения постоянной h в окрестности нуля. Поэтому функция Гамильтона системы с одной степенью свободы, к которой редуцируется исходная система с двумя степенями свободы, будет зависеть от величины h как от параметра. Предполагая, что движение изучается в достаточно малой окрестности начала координат ($r_j \sim \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$), будем считать h малой величиной, порядок которой не меньше, чем, например, $\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}$. Тогда, разрешая уравнение $H = h$ относительно r_2, получим

$$r_2 = -K_0(r_1, \varphi_1, \varphi_2) - K_1(r_1, \varphi_1, \varphi_2, h),$$

где

$$K_0 = -3r_1 - \frac{1}{\omega_2}[a + b\cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)]\, r_1^2.$$

Функция $K_1 = O(\varepsilon^{5/2})$ и имеет период 2π по φ_1 и новой независимой переменной φ_2. Если ввести вместо φ_1 угол $\varphi = \varphi_1 + 3\varphi_2$, то гамильтониан K полученной системы с одной степенью свободы

запишется в виде

$$K = -\frac{1}{\omega_2}(a + b\cos\varphi)\, r_1^2 + \widetilde{R}(r_1, \varphi_1, \varphi_2, h). \tag{3.12}$$

Очевидно, что знаки коэффициентов a и b можно считать одинаковыми. Сделаем замену переменных $r_1, \varphi \to I, \omega$ при помощи производящей функции

$$S = \frac{\pi I}{K(k^2)} F\left(\frac{\varphi}{2}, k^2\right) \qquad \left(k^2 = \frac{2b_1}{a_1 + b_1} < 1\right), \tag{3.13}$$

где K и F — эллиптические интегралы, k — их модуль. Гамильтониан K примет вид

$$K = -\frac{\pi^2(a+b)}{4\omega_2 K^2(k^2)} I^2 + \Phi(I, W, \varphi_2, h). \tag{3.14}$$

где функция $\Phi = O(\varepsilon^{5/2})$ и имеет период 2π по W и φ_2. Кроме того, функция Φ аналитична по всем переменным в области

$$0 < \delta_1 < I < \delta_2, \quad |h| < \delta_3, \quad |\operatorname{Im} W, \varphi_2| < \delta_4,$$

где δ_i — некоторые малые положительные числа.

К системе с гамильтонианом (3.14) применим теорему Мозера об инвариантных кривых, аналогично тому, как это было в системе с гамильтонианом (6.12) в третьей главе. В нашем случае, правда, «возмущающая» часть Φ функции Гамильтона (3.14) зависит еще от малого параметра h. Но теорема Мозера все равно применима при рассмотрении окрестности начала координат, для которой $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 не зависит от h, если h достаточно малая величина [12, 72]. Так как в малой окрестности начала координат инвариантные кривые существуют при всех достаточно малых значениях постоянной интеграла $H = h = \text{const}$, то отсюда следует, что положение равновесия $q_i = p_i = 0$ изучаемой системы (1.1) устойчиво по Ляпунову.

§ 4. Об устойчивости в случае равных частот

Теперь рассмотрим задачу об устойчивости положения равновесия $q_i = p_i = 0$ системы (1.1) в случае равных частот колебаний линеаризованной системы. Эта задача изучена в работах Сокольского [86, 87]. Проводимые ниже рассмотрения основаны на результатах этих работ.

Задача об устойчивости в случае равных частот $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ распадается на две принципиально отличающиеся друг от друга задачи. Рассмотрим сначала первую из них, когда матрица линеаризованной системы (1.1) приводима к диагональной форме. В этом случае функцию Гамильтона (1.2) можно представить в виде (2.1), а затем применить преобразование Биркгофа. Проводи-

мая при этом нормализация принципиально ничем не отличается от аналогичных преобразований, проделанных в §§ 2 и 3. В конце концов, уничтожив форму H_3, упростив H_4 и перейдя к полярным координатам по формулам

$$q_i = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i, \quad p_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i,$$

получим функцию Гамильтона (1.2) в таком виде:

$$\begin{aligned} H = {} & \omega(r_1 - r_2) + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ & + 2r_1r_2\,[k_{2002}\cos 2(\varphi_1+\varphi_2) - l_{2002}\sin 2(\varphi_1+\varphi_2)] + \\ & + 2r_1\sqrt{r_1r_2}\,[k_{1120}\sin(\varphi_1+\varphi_2) - l_{1120}\cos(\varphi_1+\varphi_2)] + \\ & + 2r_2\sqrt{r_1r_2}\,[k_{1102}\sin(\varphi_1+\varphi_2) + l_{1102}\cos(\varphi_1+\varphi_2)] + \\ & + O((r_1+r_2)^{5/2}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Выражения коэффициентов нормальной формы (4.1) через коэффициенты гамильтониана (2.1) получаются из следующих формул:

$$c_{20} = -x_{2020} - \frac{3}{2}u_{1,1} + \frac{1}{2}u_{2,2} - \frac{1}{2}u_{4,4} - \frac{3\omega^2}{8}u_{7,7} + \frac{\omega^2}{24}u_{8,8},$$

$$c_{11} = x_{1111} + 2u_{1,6} + 2u_{3,3} - \frac{\omega^2}{6}u_{8,8} - 2u_{2,5} - 2u_{4,4} + \frac{\omega^2}{6}u_{9,9},$$

$$c_{02} = -x_{0202} + \frac{3}{2}u_{5,5} - \frac{1}{2}u_{6,6} + \frac{1}{2}u_{3,3} + \frac{3\omega^2}{8}u_{10,10} - \frac{\omega^2}{24}u_{9,9},$$

$$k_{2002} = x_{2002} - \frac{1}{2}u_{1,3} - u_{2,4} + \frac{\omega^2}{8}u_{7,9} + u_{3,6} + \frac{1}{2}u_{4,5} - \frac{\omega^2}{8}u_{8,10},$$

$$l_{2002} = y_{2002} - \frac{1}{2}v_{1,3} + v_{2,4} + \frac{\omega^2}{8}v_{7,9} - v_{3,6} + \frac{1}{2}v_{4,5} - \frac{\omega^2}{8}v_{8,10},$$

$$k_{1120} = x_{1120} - \frac{1}{2}u_{2,1} + u_{1,4} + u_{3,2} - \frac{1}{2}u_{2,6} - \frac{1}{2}u_{6,4} - \frac{\omega^2}{4}u_{8,7} + \frac{\omega^2}{12}u_{9,8},$$

$$l_{1120} = y_{1120} - \frac{1}{2}v_{2,1} + v_{1,4} + v_{3,2} - \frac{1}{2}v_{2,6} - \frac{1}{2}v_{6,4} - \frac{\omega^2}{4}v_{8,7} + \frac{\omega^2}{12}v_{9,8},$$

$$k_{1102} = x_{1102} + \frac{1}{2}u_{6,2} + u_{2,3} - 2u_{5,3} - u_{4,6} + \frac{1}{2}u_{6,5} + \frac{\omega^2}{4}u_{9,10} - \frac{\omega^2}{12}u_{8,9},$$

$$l_{1102} = y_{1102} + \frac{1}{2}v_{6,2} + v_{2,3} - 2v_{5,3} - v_{4,6} - \frac{1}{2}v_{6,5} + \frac{\omega^2}{4}v_{9,10} - \frac{\omega^2}{12}v_{8,9},$$

$$u_{i,j} = x_ix_j + y_iy_j, \quad v_{ij} = x_iy_j - x_jy_i,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}h_{1020} - \frac{3}{2\omega^2}h_{3000}, \qquad y_1 = \frac{3\omega}{2}h_{0030} + \frac{1}{2\omega}h_{2010},$$

$$x_2 = -\omega h_{0021} - \frac{1}{\omega}h_{2001}, \qquad y_2 = h_{0120} + \frac{1}{\omega^2}h_{2100},$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}h_{0111} - \frac{1}{2}h_{1002} + \frac{1}{2\omega^2}h_{1200}, \quad y_3 = -\frac{\omega}{2}h_{0012} + \frac{1}{2\omega}h_{0211} + \frac{1}{2\omega}h_{1101},$$

$$x_4 = -\frac{\omega}{2}h_{0021} + \frac{1}{2\omega}h_{1110} + \frac{1}{2\omega}h_{2001}, \quad y_4 = -\frac{1}{2}h_{0120} - \frac{1}{2}h_{1011} + \frac{1}{2\omega^3}h_{2100},$$

$$x_5 = \frac{3\omega}{2} h_{0003} + \frac{1}{2\omega} h_{0201}, \qquad y_5 = -\frac{1}{2} h_{0102} - \frac{3}{2\omega^2} h_{0300},$$

$$x_6 = h_{1002} + \frac{1}{\omega^2} h_{1200}, \qquad y_6 = -\omega h_{0012} - \frac{1}{\omega} h_{0210},$$

$$x_7 = h_{0030} - \frac{1}{\omega^2} h_{2010}, \qquad y_7 = \frac{1}{\omega} h_{1020} - \frac{1}{\omega^3} h_{3000},$$

$$x_8 = \frac{1}{\omega} h_{0120} - \frac{1}{\omega} h_{1011} - \frac{1}{\omega^3} h_{2100},$$

$$y_8 = h_{0021} + \frac{1}{\omega^2} h_{1110} - \frac{1}{\omega^2} h_{2001},$$

$$x_9 = -h_{0012} + \frac{1}{\omega^2} h_{0210} - \frac{1}{\omega^2} h_{1101},$$

$$y_9 = \frac{1}{\omega} h_{0111} - \frac{1}{\omega} h_{1002} + \frac{1}{\omega^3} h_{1200},$$

$$x_{10} = -\frac{1}{\omega} h_{0102} + \frac{1}{\omega^3} h_{0300},$$

$$y_{10} = -h_{0003} + \frac{1}{\omega^2} h_{0201},$$

$$x_{2020} = -\frac{1}{2}\left(3\omega^2 h_{0040} + h_{2020} + \frac{3}{\omega^2} h_{4000}\right),$$

$$x_{1111} = \omega^2 h_{0022} + h_{0220} + h_{2002} + \frac{1}{\omega^2} h_{2200},$$

$$x_{0202} = -\frac{1}{2}\left(3\omega^2 h_{0004} + h_{0202} + \frac{3}{\omega^2} h_{0400}\right),$$

$$x_{2002} = \frac{1}{4}\left(\omega^2 h_{0022} + h_{0220} + h_{1111} + h_{2002} + \frac{1}{\omega^2} h_{2200}\right),$$

$$y_{2002} = \frac{1}{4}\left(-\omega h_{0121} - \omega h_{1012} + \frac{1}{\omega} h_{1210} + \frac{1}{\omega} h_{2101}\right),$$

$$x_{1120} = \frac{1}{4}\left(3\omega h_{0130} + \omega h_{1021} + \frac{1}{\omega} h_{2110} + \frac{3}{\omega} h_{3001}\right),$$

$$y_{1120} = \frac{1}{4}\left(-3\omega^2 h_{0031} + h_{1120} - h_{2011} + \frac{3}{\omega^2} h_{3100}\right),$$

$$x_{1102} = \frac{1}{4}\left(3\omega h_{1003} + \omega h_{0112} + \frac{1}{\omega} h_{1201} + \frac{3}{\omega} h_{0310}\right),$$

$$y_{1102} = \frac{1}{4}\left(-3\omega^2 h_{0013} + h_{0211} - h_{1102} + \frac{3}{\omega^2} h_{1300}\right). \tag{4.2}$$

Пусть величины $A = 2\sqrt{k_{2002}^2 + l_{2002}^2}$, $B = 2\sqrt{k_{1120}^2 + l_{1120}^2}$ и $C = 2\sqrt{k_{1102}^2 + l_{1102}^2}$ отличны от нуля. Определим углы θ_1, θ_2 и θ_3 при помощи соотношений

$$\sin 2\theta_1 = \frac{2k_{2002}}{A}, \qquad \sin\theta_2 = -\frac{2l_{1120}}{B}, \qquad \sin\theta_3 = \frac{2l_{1102}}{C},$$

$$\cos 2\theta_1 = -\frac{2l_{2002}}{A}, \qquad \cos\theta_2 = \frac{2k_{1120}}{B}, \qquad \cos\theta_3 = \frac{2k_{1102}}{C}.$$

Тогда функцию Гамильтона (4.1) можно записать в следующем более компактном виде:

$$H = \omega(r_1 - r_2) + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + Ar_1r_2\sin 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \theta_1) + \\ + Br_1\sqrt{r_1r_2}\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \theta_2) + \\ + Cr_2\sqrt{r_1r_2}\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \theta_3) + O((r_1 + r_2)^{5/2}). \quad (4.3)$$

Как и в предыдущем параграфе, при помощи интеграла $H = h = \text{const}$ понизим порядок изучаемой системы на две единицы. Так как движение рассматривается в достаточно малой окрестности начала координат, то можно считать, что $r_1, r_2 \sim \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Кроме того, считаем, что $h \sim \varepsilon^\alpha$ $(\alpha \geqslant 5/2)$, что возможно, так как функция H не является знакоопределенной. Разрешив уравнение $H = h$ относительно r_2, введя вместо φ_1 новый угол $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \theta_1$ и обозначив еще r_1 через r, найдем, что полученной системе с одной степенью свободы будет соответствовать функция Гамильтона

$$K = r^2(a + b\sin 2\varphi + c\sin\varphi + d\cos\varphi) + K^*(r, \varphi, \varphi_2, h), \quad (4.4)$$

где K^* — 2π-периодическая по φ и новой независимой переменной φ_2 функция, $K^* = O(r^{5/2})$ и

$$a = -\frac{1}{\omega}(c_{20} + c_{11} + c_{02}), \quad c = -\frac{1}{\omega}[B\cos(\theta_2 - \theta_1) + C\cos(\theta_3 - \theta_1)], \quad (4.5)$$

$$b = -\frac{1}{\omega}A, \qquad d = -\frac{1}{\omega}[B\sin(\theta_2 - \theta_1) + C\sin(\theta_3 - \theta_1)].$$

Переменная φ_2 — монотонная функция времени в достаточно малой окрестности начала координат, поэтому она в задаче об устойчивости может играть роль времени. Как видим, анализ совершенно аналогичен исследованию устойчивости при резонансах $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$, проведенному в предыдущих параграфах.

Теорема. *Если функция*

$$\Phi(\varphi) = a + b\sin 2\varphi + c\sin\varphi + d\cos\varphi$$

не обращается в нуль при вещественных φ, *то положение равновесия устойчиво по Ляпунову. Если же существует* φ^* *такое, что* $\Phi(\varphi^*) = 0$, *а производная* $\Phi'(\varphi^*) \neq 0$, *то положение равновесия* $q_i = p_i = 0$ *неустойчиво.*

Доказательство устойчивости проводится, как в предыдущем параграфе. Переменные I, W здесь вводятся при помощи производящей функции S вида

$$S = \frac{2\pi I}{M}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)}}, \quad M = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)}}.$$

Интеграл M существует при условиях теоремы. Положительности $\Phi(\varphi)$ можно добиться изменением знака φ_2 в гамильтониане (4.4). Функция $K - K^*$ в переменных I, W равна $\frac{4\pi^2}{M^2} I^2$. Дальнейшие рассмотрения, как и в предыдущем параграфе, основаны на применении теоремы Мозера об инвариантных кривых.

Теперь докажем неустойчивость. Заметим, что из периодичности функции $\Phi(\varphi)$ и из того, что $\Phi'(\varphi^*) \neq 0$, следует, что если уравнение $\Phi(\varphi) = 0$ имеет вещественные корни, то их по крайней мере два, причем знаки производной $\Phi'(\varphi)$ в точках φ, соответствующих корням, различны. Пусть корень φ^* такой, что $\Phi'(\varphi^*) < 0$. Для доказательства неустойчивости возьмем функцию Четаева V в виде

$$V = r^2 \sin\psi, \quad \psi = \frac{\pi}{2\delta}(\varphi - \varphi^* + \delta), \tag{4.6}$$

где достаточно малое число δ подберем так, чтобы в окрестности $\varphi^* - \delta < \varphi < \varphi^* + \delta$ не было других корней функции $\Phi(\varphi)$, а производная $\Phi'(\varphi)$ сохраняла в этой окрестности знак. За область $V > 0$ возьмем область $\varphi^* - \delta < \varphi < \varphi^* + \sigma$. Для производной функции V в силу уравнений движения с гамильтонианом (4.4) получаем такое выражение:

$$\frac{dV}{d\varphi_2} = 2r^3 \left\{ \Phi(\varphi) \frac{\pi}{2\delta} \cos\psi - \Phi'(\varphi) \sin\psi \right\} + O(r^{7/2}), \tag{4.7}$$

а эта функция в области $V > 0$ будет положительной, так как в области $V > 0$ $\Phi'(\varphi) < 0$ и $\sin\psi > 0$, а при $\varphi^* - \delta < \varphi < \varphi^*$ функция $\Phi(\varphi) > 0$ и $\cos\psi > 0$, при $\varphi^* < \varphi < \varphi^* + \delta$ функция $\Phi(\varphi) < 0$, но и $\cos\psi < 0$, причем выражение, стоящее в фигурных скобках, не обращается в нуль ни в области $V > 0$, ни на ее границе. Таким образом, согласно теореме Четаева, имеет место неустойчивость.

Задача об устойчивости в случае, когда матрица линеаризованной системы (1.1) не приводится к диагональной форме, значительно сложнее. Трудность исследования состоит в том, что даже в линейном приближении переменные, соответствующие разным степеням свободы, не разделяются. Поэтому не удается свести исследуемую систему с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы, как это было в том случае, когда матрица линейной части системы (1.1) приводилась к диагональной форме. Кроме того, весьма существенно, что, в отличие от предыдущего случая и от всех исследованных в этой главе случаев устойчивости, линеаризованная система (1.1) неустойчива из-за наличия в общем решении слагаемых вида $t\sin\omega t$. Учет же нелинейных членов в уравнениях движения может привести как к устойчивости, так и к неустойчивости полной системы [50].

В работах [86, 87] показано, что в рассматриваемом случае существует вещественная линейная каноническая замена переменных, приводящая функцию Гамильтона системы (1.1) к такому виду (обозначения для переменных оставляем прежними):

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1p_2 - q_2p_1) + \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=3} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}. \tag{4.8}$$

При помощи преобразования Биркгофа в функции Гамильтона (4.8) опять можно полностью уничтожить члены третьей степени, а совокупность членов четвертой степени можно упростить. В результате функция (4.8) приведется к виду (обозначения для переменных снова не меняем)

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1p_2 - q_2p_1) + (p_1^2 + p_2^2)[A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1p_2 - q_2p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)] + \ldots \tag{4.9}$$

В (4.9) не выписаны члены выше четвертого порядка и введены следующие обозначения:

$$A = \frac{1}{4}k_{2002}, \quad B = -\frac{1}{4}(l_{2011} + l_{1102}), \quad C = -\frac{1}{4}(2c_{20} + c_{11} + 2c_{02}),$$

$$k_{2002} = x_{2002} + 3(u_{9,10} - u_{10,9}) + 2(u_{2,8} - u_{3,2}) + u_{3,6} - u_{6,3},$$

$$l_{2011} = y_{2011} - 6v_{10,8} - 4v_{3,1} + 2v_{6,2} + 2v_{9,9} + v_{2,2} - v_{5,3},$$

$$l_{1102} = y_{2011} - 6v_{8,10} - 4v_{1,3} + 2v_{2,6} + 2v_{9,9} + v_{2,2} - v_{3,5},$$

$$c_{20} = x_{2020} - 9u_{10,7} + 4u_{6,1} + u_{1,6} + u_{9,8} - u_{5,2} - u_{4,3},$$

$$c_{11} = x_{1111} + 4(u_{9,8} - u_{8,9} + u_{4,3} - u_{3,4}) + 2(u_{6,5} - u_{5,6} + u_{2,1} - u_{1,2}),$$

$$c_{02} = x_{2020} + 9u_{7,10} - 4u_{1,6} - u_{6,1} - u_{8,9} + u_{2,5} + u_{3,4},$$

$$x_{2002} = \frac{1}{2}(3h_{0040} + h_{0022} + 3h_{0004}),$$

$$y_{2011} = \frac{1}{4}(-h_{1021} - 3h_{1003} + 3h_{0130} + h_{0112}),$$

$$x_{2020} = \frac{1}{4}(h_{2020} - h_{2002} + h_{1111} - h_{0220} + h_{0202}),$$

$$x_{1111} = -(h_{2020} + h_{2002} + h_{0220} + h_{0202}),$$

$$u_{i,j} = e_ix_j + f_iy_j, \quad v_{i,j} = e_iy_j - f_ix_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, 10), \quad \Omega = \omega^{-1},$$

$$e_1 = \Omega y_1 + \Omega^2 x_2 - 2\Omega^3 y_3, \qquad f_1 = -\Omega x_1 + \Omega^2 y_2 + 2\Omega^3 x_3,$$

$$e_2 = \Omega y_2 + 2\Omega^2 x_3, \qquad f_2 = -\Omega x_2 + 2\Omega^2 y_3,$$

$$e_3 = \Omega y_3 \qquad f_3 = -\Omega x_3,$$

$$e_4 = \Omega y_4 - \Omega^2(x_1 - x_5) + 2\Omega^3(y_2 - y_6) + 6\Omega^4 x_3, \qquad f_4 = -\Omega x_4 - \Omega^2(y_1 - y_5) - 2\Omega^3(x_2 - x_6) + 6\Omega^4 y_3,$$

$$e_5 = \Omega y_5 - \Omega^2 (x_2 - 2x_6) + 4\Omega^3 y_3, \qquad f_5 = -\Omega x_5 - \Omega^2 (y_2 - 2y_6) - 4\Omega^3 x$$

$$e_6 = \Omega y_6 - \Omega^2 x_3, \qquad f_6 = -\Omega x_6 - \Omega^2 y_3,$$

$$e_7 = \frac{1}{3}\Omega y_7 + \frac{1}{9}\Omega^2 x_8 - \frac{2}{27}\Omega^3 y_9 - \frac{2}{27}\Omega^4 x_{10}, \qquad f_7 = -\frac{1}{3}\Omega x_7 + \frac{1}{9}\Omega^2 y_8 + \frac{2}{27}\Omega^3 x_9 - \frac{2}{27}\Omega^4 y_{10},$$

$$e_8 = \frac{1}{3}\Omega y_8 + \frac{2}{9}\Omega^2 x_9 - \frac{2}{9}\Omega^3 y_{10}, \qquad f_8 = -\frac{1}{3}\Omega x_8 + \frac{2}{9}\Omega^2 y_9 + \frac{2}{9}\Omega^3 x_{10},$$

$$e_9 = \frac{1}{3}\Omega y_9 + \frac{1}{3}\Omega^2 x_{10}, \qquad f_9 = -\frac{1}{3}\Omega x_9 + \frac{1}{3}\Omega^2 y_{10},$$

$$e_{10} = \frac{1}{3}\Omega y_{10}, \qquad f_{10} = -\frac{1}{3}\Omega x_{10},$$

$$x_i = x_i^*/2\sqrt{2}, \qquad y_i = y_i^*/2\sqrt{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, 10),$$

$$x_1^* = -h_{2010} - h_{1101} + h_{0210}, \qquad y_1^* = h_{2001} - h_{1110} - h_{0201},$$

$$x_2^* = -2h_{1020} - 2h_{1002}, \qquad y_2^* = -2h_{0120} - 2h_{0102},$$

$$x_3^* = -3h_{0030} - h_{0012}, \qquad y_3^* = -h_{0021} - 3h_{0003},$$

$$x_4^* = 3h_{3000} + h_{1200}, \qquad y_4^* = h_{2100} + 3h_{0300},$$

$$x_5^* = 2h_{2010} + 2h_{0210}, \qquad y_5^* = 2h_{2001} + 2h_{0201},$$

$$x_6^* = h_{1020} - h_{1002} + h_{0111}, \qquad y_6^* = h_{1011} - h_{0120} + h_{0102},$$

$$x_7^* = h_{3000} - h_{1200}, \qquad y_7^* = h_{2100} - h_{0300},$$

$$x_8^* = h_{2010} - h_{1101} - h_{0210}, \qquad y_8^* = h_{2001} + h_{1110} - h_{0201},$$

$$x_9^* = h_{1020} - h_{1002} - h_{0111}, \qquad y_9^* = h_{1011} + h_{0120} - h_{0102},$$

$$x_{10}^* = h_{0030} - h_{0012}, \qquad y_{10}^* = h_{0021} - h_{0003}. \tag{4.10}$$

Прежде чем сформулировать теорему об устойчивости системы (1.1) в случае, когда матрица линейной ее части не приводится к диагональному виду, введем согласно [157] понятие *формальной устойчивости.*

Решение $x_i = y_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где H — 2π-периодическая по t, аналитическая по $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ функция, называется *формально устойчивым*, если существует степенной ряд G, возможно расходящийся, который формально является определенно-положительным интегралом с периодом

2π по t. Иными словами, все коэффициенты, степенного ряда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial G}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

тождественно равны нулю, а конечное число форм наименьшей степени в ряде G представляет собой определенно-положительную функцию $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

Теорема. *Если в нормальной форме* (4.9) $A > 0$, *то положение равновесия* $q_i = p_i = 0$ $(i = 1, 2)$ *системы* (1.1) *формально устойчиво; если же* $A < 0$, *то имеет место неустойчивость по Ляпунову.*

Можно показать, что при помощи бесконечного числа шагов преобразования Биркгофа (возможно, расходящегося) функцию Гамильтона (4.9) можно привести к виду

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1p_2 - q_2p_1) + (p_1^2 + p_2^2)[A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1p_2 - q_2p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)] + \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3}^{\infty} h_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(q_1^2 + q_2^2)^{\alpha_1}(p_1^2 + p_2^2)^{\alpha_2}(q_1p_2 - q_2p_1)^{\alpha_3}. \quad (4.11)$$

Каноническая система с гамильтонианом (4.11) имеет два формальных интеграла $H = \text{const}$ и $q_1p_2 - q_2p_1 = \text{const}$. Следовательно, выражение $G \equiv H - \omega(q_1p_2 - q_2p_1)$ также будет формальным интегралом системы с гамильтонианом (4.11). А так как при $A > 0$ в разложении

$$G = G_2 + G_4 + G_6 + \ldots + G_{2m} + \ldots$$

функция

$$G_2 + G_4 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + (p_1^2 + p_2^2)[A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1p_2 - q_2p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)]$$

будет определенно-положительной функцией своих переменных q_1, q_2, p_1, p_2, то отсюда следует формальная устойчивость положения равновесия.

Для доказательства неустойчивости воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости. За функцию Ляпунова примем знакопеременную функцию

$$V = q_1p_1 + q_2p_2.$$

Ее производная, составленная в силу уравнений движения с гамильтонианом (4.9), будет такой:

$$\frac{dV}{dt} = -(q_1^2 + q_2^2) + 4A(p_1^2 + p_2^2)^2 + 2B(p_1^2 + p_2^2)(q_1p_2 - q_2p_1) + \ldots, \quad (4.12)$$

где не выписаны члены, порядок которых не меньше пятого относительно q_i, p_i $(i = 1,2)$. Функция (4.12) при $A < 0$ будет определенно-отрицательной. Таким образом, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости, и, следовательно, положение равновесия $q_i = p_i = 0$ $(i = 1, 2)$ системы (1.1) неустойчиво.

§ 5. Исследование устойчивости при $c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 = 0$

Исследуем теперь устойчивость положения равновесия системы (1.1), когда не выполняется условие (1.4) теоремы Арнольда — Мозера. Сначала рассмотрим пример (см. [57]), показывающий, что при невыполнении этого условия устойчивость положения равновесия может быть разрушена членами сколь угодно высокого порядка в разложении функции Гамильтона (1.2).

Пусть функция Гамильтона имеет вид

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + (\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2)(a r_1 + b r_2) + \\ + (r_1^n r_2^m)^{k/2} \sin k(n\varphi_1 + m\varphi_2), \qquad (5.1)$$

где $n\omega_1 - m\omega_2 = 0$ $(m + n \geqslant 5)$, k, m, n — натуральные, a и b — произвольные действительные числа.

Легко проверить, что для функции Гамильтона (5.1) условие (1.4) не выполнено, а система дифференциальных уравнений, соответствующая (5.1), имеет такое частное решение:

$$k(n\varphi_1 + m\varphi_2) = (1 + 2N)\pi \qquad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$m r_1 = n r_2, \quad r_1(t) = \frac{r_1(0)}{[1 - (\alpha - 1)\beta r_1^{\alpha-1}(0)\, t]^{\frac{1}{\alpha-1}}},$$

где $\alpha = \frac{m+n}{2}k$, $\beta = km^{\frac{mk}{2}} n^{1-\frac{mk}{2}}$. Это частное решение показывает, что положение равновесия $r_1 = r_2 = 0$ неустойчиво, так как для сколь угодно малых значений $r_1(0)$ и $r_2(0)$ величины $r_1(t)$ и $r_2(t)$ неограниченно возрастают при

$$t \to \frac{1}{(\alpha - 1)\beta r_1^{\alpha-1}(0)}.$$

Приведенный пример показывает, что исследование устойчивости при $c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 = 0$ надо проводить особо.

Если $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \neq 0$ при целых n_1 и n_2, удовлетворяющих условию $0 < |n_1| + |n_2| \leqslant 2m$, то при помощи аналитического преобразования Биркгофа гамильтониан (1.2) можно привести к виду

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \sum_{i+j=2}^{m} c_{ij} r_1^i r_2^j + \widetilde{H}(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2). \qquad (5.2)$$

Здесь $q_i = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i$, $p_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i$, $\tilde{H}$ имеет период 2π по угловым переменным, $\tilde{H} = O((r_1 + r_2)^{m+1/2})$.

Рассмотрим многочлен

$$h(\varepsilon) \equiv \sum_{i+j=2}^{m} c_{ij}\omega_1^j\omega_2^i\varepsilon^{i+j}. \tag{5.3}$$

Если $h(\varepsilon) \not\equiv 0$, то говорят, что имеет место *общий эллиптический случай*. В условиях теоремы Арнольда — Мозера неравенство $h(\varepsilon) \not\equiv 0$ обнаруживается по коэффициенту при ε^2 в многочлене (5.3). Если же этот коэффициент равен нулю, т. е. условие (1.4) не выполняется, то в многочлене (5.3) надо получать коэффициенты при более высоких степенях ε. При этом на ω_1 и ω_2 надо накладывать более жесткие требования отсутствия резонанса, нежели требование (1.3).

Пусть первый, отличный от нуля, коэффициент многочлена (5.3) обнаруживается при ε^m. Тогда справедлива следующая теорема [56].

Теорема. *Если функция Гамильтона* (1.2) *такова, что*

1) *характеристическое уравнение системы с гамильтонианом* H_2 *имеет чисто мнимые корни* $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$;

2) $$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 < |n_1| + |n_2| \leqslant 2m; \tag{5.4}$$

3) $$\sum_{i=0}^{m} c_{m-i,\,i}\omega_1^i\omega_2^{m-i} \neq 0, \tag{5.5}$$

то положение равновесия устойчиво.

Сформулированная теорема является простым обобщением теоремы Арнольда — Мозера на случай, когда исследование в гамильтониане (1.2) форм не выше четвертого порядка не может привести к строгим выводам об устойчивости положения равновесия $q_i = p_i = 0$ системы (1.1).

Доказательство этой теоремы можно провести совершенно так же, как это сделано Мозером [5] при доказательстве аналогичной теоремы при $m = 2$. Укажем основные моменты доказательства. Подробности изложены в [57]. Сначала надо привести функцию Гамильтона (1.2) к виду (5.2) и, используя интеграл $\tilde{H} = \text{const}$, свести систему (1.1) к системе с одной степенью свободы. Применяя затем теорему Мозера об инвариантных кривых к отображению, порождаемому полученной гамильтоновой системой дифференциальных уравнений второго порядка, можно показать, что при выполнении условия (5.5) на каждом уровне $\tilde{H} = \text{const}$ в любой достаточно малой окрестности начала координат существуют инвариантные торы системы (1.1). Отсюда следует устойчивость положения равновесия.

ГЛАВА 5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

§ 1. Устойчивость многомерных гамильтоновых систем для большинства начальных условий. Результаты Арнольда

В этой главе будут рассмотрены некоторые задачи устойчивости движения в многомерных гамильтоновых системах. Под *многомерной системой* понимается динамическая система, число степеней которой больше двух или оно равно двум, но функция Гамильтона явно содержит время. Задача об устойчивости движения в таких системах полностью не решена до сих пор. Но прогресс в этой области весьма значителен, благодаря исследованиям Арнольда, Мозера, Брюно, Нехорошева и других авторов. Кратко рассмотрим полученные к настоящему времени результаты.

Остановимся сначала на результатах Арнольда по устойчивости гамильтоновых систем для большинства начальных условий [4, 102]. Пусть автономная гамильтонова система с n степенями свободы устойчива в линейном приближении и между ее частотами λ_i отсутствуют резонансные соотношения до четвертого порядка включительно. Тогда при помощи преобразования Биркгофа можно выбрать такую систему координат, что гамильтониан запишется в виде

$$H = H^{(0)}(\mathbf{r}) + H^{(1)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ — n-мерные векторы:

$$\mathbf{r}^{\mathrm{T}} = (r_1, \ldots, r_n), \quad \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

$$H^{(0)}(\mathbf{r}) = \lambda_1 r_1 + \ldots + \lambda_n r_n + \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} r_i r_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{1.2}$$

функция $H^{(1)}$ имеет порядок, не меньший пятого относительно $q_i = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i$, $p_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i$, и 2π-периодична по φ_i.

Если при $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ выполнено одно из условий (1.3) или (1.4):

$$D_n = \det\left\| \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_i \partial r_j} \right\| \neq 0, \tag{1.3}$$

$$D_{n+1} = \det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_i \partial r_j} & \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial r_i} \\ \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial r_j} & 0 \end{Vmatrix} \neq 0, \tag{1.4}$$

то положение равновесия $q_i = p_i = 0$ устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

В случае двух степеней свободы при выполнении неравенства (1.4) положение равновесия устойчиво по Ляпунову (в развернутом виде неравенство (1.4) в случае $n = 2$ совпадает с условием (1.4) теоремы Арнольда — Мозера, рассмотренной в предыдущей главе).

Ни одно из условий (1.3) и (1.4) не сводится к другому. Например, для системы с функцией Гамильтона

$$H^{(0)} = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + (r_1 + r_2)^2 \qquad (\omega_1 > 0,\ \omega_2 > 0;\ n = 2) \tag{1.5}$$

имеем $D_2 = 0$, а $D_3 = -2(\omega_1 + \omega_2)^2 \neq 0$. В примере же, рассмотренном в § 5 главы 4,

$$H^{(0)} = (\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2)[1 + (ar_1 + br_2)]; \tag{1.6}$$

для этой функции Гамильтона $D_3 = 0$, а $D_2 = -(a\omega_2 + b\omega_1)^2 \neq 0$, если $a\omega_2 + b\omega_1 \neq 0$.

Из устойчивости для большинства начальных условий вовсе не следует устойчивость по Ляпунову. В статье Арнольда [5] построен пример гамильтоновой системы, устойчивой для большинства начальных условий, но неустойчивой по Ляпунову. Подобное явление неустойчивости по Ляпунову впоследствии [27] получило название *диффузии Арнольда.* В построенном в статье [5] примере функция Гамильтона такова, что диффузия Арнольда очень слабая: время, в течение которого $r(t)$ находится вблизи $r(0)$, экспоненциально растет при линейном убывании возмущений.

Но диффузия Арнольда не обязательно всегда экспоненциальна. Она может быть очень сильной. Примеров, подтверждающих этот факт, накопилось к настоящему времени довольно много. Простейший пример — функция Гамильтона (5.1) гл. 4. Приведем еще два примера. Первый [58] специально для случая автономной системы с тремя степенями свободы

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 + r_1 r_3 - r_1 r_2 + r_2 r_3 + H^{(1)}(\mathbf{r}, \varphi), \tag{1.7}$$

$$H^{(1)} = r_1 r_2 \sqrt{r_3} \sin(2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3).$$

Предполагается, что $\omega_i > 0$ и имеет место резонансное соотношение $2\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3 = 0$. Условие (1.4) для системы с функцией

Гамильтона (1.7) выполнено, так как $D_4 = (\omega_1 + \omega_2)^2 \neq 0$. Тем не менее, положение равновесия $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ неустойчиво, что видно из существования такого частного решения:

$$2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3 = \pi,$$

$$r_3(t) = \frac{1}{2} r_1(t) = \frac{1}{2} r_2(t) = r_3(0)\,[1 - 6r_3^{3/2}(0)\,t]^{-2/3}. \qquad (1.8)$$

Из (1.8) видно, что за время порядка $r_3^{-3/2}(0)$ траектория покидает окрестность точки, сколь угодно близко расположенной к началу координат в начальный момент времени.

Второй пример для системы с двумя степенями свободы, но с явной зависимостью функции Гамильтона от времени [59]:

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 - 24r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 + H^{(1)}(\mathbf{r}, \varphi, t), \qquad (1.9)$$

$$H^{(1)} = \sqrt{r_1}\, r_2^2 \sin(\varphi_1 + 4\varphi_2 - Nt).$$

Величины λ_i в (1.9) связаны резонансным соотношением пятого порядка $\lambda_1 + 4\lambda_2 = N$.

Ниже будет показана неустойчивость положения равновесия $r_1 = r_2 = 0$ системы (1.9). Но сначала сформулируем условия устойчивости для большинства начальных данных в общем случае гамильтоновой системы с n степенями свободы и периодической зависимостью функции Гамильтона от времени. Пусть функция $H^{(1)}$ в гамильтониане (1.1) зависит от t. Введем новый «импульс» r_{n+1} и «угол» $\varphi_{n+1} \equiv t$. Тогда получим автономную систему с $n + 1$ степенями свободы. Гамильтониан имеет вид

$$H = \lambda_1 r_1 + \ldots + \lambda_n r_n + r_{n+1} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} r_i r_j + H^{(1)}(r, \varphi, t). \qquad (1.10)$$

Дифференциальные уравнения, соответствующие гамильтониану (1.10), содержат в себе дифференциальные уравнения исходной задачи с гамильтонианом (1.1). Для функции Гамильтона (1.10) неравенство (1.3) всегда не выполнено, так как $D_{n+1} \equiv 0$ и, значит, условие устойчивости для большинства начальных данных получается только из (1.4) и означает, как легко проверить, выполнимость неравенства

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_i \partial r_j} \right\| \neq 0, \qquad (1.11)$$

где $H^{(0)}$ — функция, определенная равенством (1.2). Отсюда следует, что для гамильтоновой системы с двумя степенями свободы и с периодической зависимостью гамильтониана от t достаточным условием устойчивости для большинства начальных условий

будет выполнимость следующего неравенства:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \neq 0. \tag{1.12}$$

Для функции Гамильтона (1.9) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 25 \neq 0$, так что устойчивость для большинства начальных условий есть, но имеет место неустойчивость по Ляпунову, что видно из частного решения, для которого

$$\varphi_1 + 4\varphi_2 - Nt = \pi,$$
$$r_1(t) = \frac{1}{4}r_2(t) = r_1(0)\,[1 - 24r_1^{3/2}(0)\,t]^{-2/3}. \tag{1.13}$$

Отметим, что в обоих рассмотренных примерах часть $H^{(1)}$ гамильтониана представляет собой резонансное возмущение системы с гамильтонианом $H^{(0)}$, а функция $H^{(0)}$ подобрана так, чтобы возмущенная система допускала частные решения (1.8) и (1.13). Следует отметить также, что частоты невозмущенной системы $\Lambda_i = \partial H^{(0)}/\partial r_i$, вычисленные для частных решений (1.8) и (1.13), связаны резонансными соотношениями (теми же, что и частоты линейной системы), то есть во все время движения траектории, приводящие к неустойчивости, находятся в резонансной зоне фазового пространства.

Примеры гамильтоновых систем с быстрой диффузией Арнольда построены также в работах [78, 93]. Но, как показал Нехорошев [78, 79], в общем случае диффузия Арнольда (если она существует) является экспоненциальной. Так что рассмотренные примеры представляют собой исключения из правила. Результаты Нехорошева будут рассмотрены в § 3.

§ 2. Формальная устойчивость. Теорема Брюно

В этом параграфе рассмотрим некоторые результаты, полученные при исследовании формальной устойчивости гамильтоновых систем. Определение формальной устойчивости было приведено в § 4 четвертой главы. Понятие формальной устойчивости является очень важным при исследовании устойчивости на конечном (но очень большом) интервале времени. Наличие формальной устойчивости означает, что неустойчивость по Ляпунову (если она существует) не обнаруживается при учете в разложении функции Гамильтона членов до сколь угодно большого (но конечного) порядка относительно координат и импульсов возмущенного движения.

При наличии формальной устойчивости, если и существуют траектории, далеко уходящие от невозмущенного движения, то движение по ним происходит крайне медленно. Соответствующие оценки получены в работах Зигеля [28], Мозера [158, 159], Глимма [138]. Для решения вопроса об устойчивости в большинстве

физических задач, описываемых гамильтоновыми дифференциальными уравнениями, формальной устойчивости вполне достаточно. Следует заметить также, что из устойчивости по Ляпунову, очевидно, следует формальная устойчивость. Обратное утверждение не доказано, но, во всяком случае, пока не известно ни одного примера гамильтоновой системы, которая бы была формально устойчива и в то же время была неустойчива по Ляпунову.

Приведем некоторые условия формальной устойчивости. Пусть рассматривается гамильтонова система

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.1}$$

где H — аналитическая функция относительно x_j, y_j и 2π-периодическая по t. Разложение H в степенной ряд начинается с квадратичных членов. Если мультипликаторы линеаризованной системы (2.1) различны и имеют модули, равные единице, то система (2.1) устойчива в первом приближении, а функция Гамильтона H в подходящим образом выбранных координатах (см. § 5 главы 2) может быть записана в виде

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_j^2 + y_j^2) + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{2.2}$$

где λ_j — вещественные числа, H_m — однородные многочлены степени m относительно x_j, y_j, зависящие 2π-периодическим образом от времени. В статье [157] Мозер показал, что если

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\lambda_j \not\equiv 0 \pmod 1 \text{ для целых } \quad m_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} m_j > 0, \tag{2.3}$$

то нелинейная система (2.1) формально устойчива.

Условие (2.3) является довольно слабым, так как в нем не используется информация о нелинейных членах в уравнениях (2.1), а ограничения на величины λ_j весьма сильные. Но пусть теперь величины λ_j таковы, что

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\lambda_j \not\equiv 0 \pmod 1 \quad \text{для целых } m_j, \quad 0 < \sum |m_j| \leqslant 4. \tag{2.4}$$

Тогда существует каноническая замена переменных x_j, $y_j \to q_j$, p_j, задаваемая преобразованием Биркгофа, такая, что новый гамильтониан есть

$$H = (\lambda, \mathbf{r}) + \sum_{k,\, m=1}^{n} a_{k,\, m} r_k r_m + H_5 + \ldots \tag{2.5}$$

$$2r_j = q_j^2 + p_j^2, \ \lambda^{\mathrm{T}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$
$$\mathbf{r}^{\mathrm{T}} = (r_1, \ldots, r_n), \quad (\lambda, \mathbf{r}) = \lambda_1 r_1 + \ldots + \lambda_n r_n.$$

В работе [158] Мозер для случая $n = 1$ доказал формальную устойчивость, если в (2.5) $a_{11} \neq 0$. Для произвольного n Глимм [138] доказал формальную устойчивость при условии, что квадратичная форма $\sum_{k,m=1}^{n} a_{k,m} r_k r_m$ является знакоопределенной. В статье Брюно [13] доказана следующая теорема, которая содержит все указанные выше результаты.

Теорема. *Если у системы* (2.1) *выполнено условие* (2.4) *и в записи* (2.5):

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_{k,m} I_k I_m \neq 0 \tag{2.6}$$

при векторе $\mathbf{I}^{\mathrm{T}} = (I_1, \ldots, I_n) \neq \mathbf{0}$ *и принадлежащем пересечению квадранта* $m_j \geqslant 0$ *и линейной оболочки множества, образованного всеми целочисленными векторами с компонентами, являющимися решениями уравнения*

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \lambda_k \equiv 0 \pmod 1, \tag{2.7}$$

то положение равновесия $x_k = y_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ *системы* (2.1) *формально устойчиво.*

Если в системе (2.1) H не зависит от t, то формулировка результатов отличается от приведенной выше тем, что в условиях (2.3), (2.4) и (2.7) вместо $\not\equiv 0$ и $\equiv 0 \pmod 1$ надо написать $\neq 0$ и $= 0$ соответственно.

Приведем доказательство теоремы Брюно. Для удобства доказательства перейдем, как и в [13], к комплексно сопряженным переменным

$$z_k = x_k + iy_k, \quad \bar{z}_k = x_k - iy_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Система (2.1) перейдет при этом в систему

$$\frac{d\bar{z}_k}{dt} = 2i \frac{\partial H}{\partial z_k}, \quad \frac{dz_k}{dt} = -2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.8}$$

которая является канонической с гамильтонианом

$$2iH = i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \bar{z}_k z_k + \ldots \tag{2.9}$$

Разложение гамильтониана (2.9) запишем в такой форме:

$$2iH = \sum g_{k,l} \bar{z}^{\mathbf{k}} z^{\mathbf{l}},$$

где $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = (k_1, \ldots, k_n)$, $\mathbf{l}^{\mathrm{T}} = (l_1, \ldots, l_n)$ — векторы с целочисленными неотрицательными компонентами, а $z^l = z_1^{l_1}, \ldots, z_n^{l_n}$; кроме того, $g_{k,l}(t + 2\pi) = g_{k,l}(t) = -\bar{g}_{l,k}(t)$.

Имеет место следующее утверждение [157].

Лемма. *Существует формальная каноническая замена переменных* $x_j y_j \to \xi_j \eta_j$ *такая, что* (2.8) *переходит в*

$$\frac{d\bar{\zeta}_j}{dt} = 2i\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta_j}, \quad \frac{d\zeta_j}{dt} = -2i\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\zeta}_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.10}$$

где $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $\bar{\zeta}_j = \xi_j - i\eta_j$; ξ_j, η_j — *вещественные величины, а формальный степенной ряд*

$$2i\Gamma = \sum_{k,\,l} \gamma_{k,\,l} e^{iNt} \bar{\zeta}^{\mathbf{k}} \zeta^{\mathbf{l}} = i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{\zeta}_j \zeta_j + \ldots \tag{2.11}$$

содержит только такие члены, для которых

$$(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{l} - \mathbf{k}) = N, \tag{2.12}$$

где N — *целое число и, следовательно, вектор* $\mathbf{l} - \mathbf{k}$ *является решением уравнения* (2.7). *Коэффициенты* $\gamma_{k,\,l}$ *не зависят от* t.

Эта лемма является обобщением на резонансный случай результата, получаемого при помощи преобразования Биркгофа, приведенного в главе 3 в случае отсутствия резонансных соотношений между величинами λ_j. На доказательстве леммы мы не останавливаемся, так как оно почти дословно повторяет соответствующие рассмотрения главы 3.

Пусть $2r_j = \zeta_j \bar{\zeta}_j$ ($r_j \geqslant 0$). Система уравнений (2.9) имеет два типа формальных интегралов:

1) $(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, где векторы $\mathbf{p}^{\mathrm{T}} = (p_1, \ldots, p_n)$ ортогональны к действительной линейной оболочке векторов $\mathbf{m}^{\mathrm{T}} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, являющихся решениями уравнения (2.7);

2)

$$iF = 2i\Gamma - i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}).$$

Действительно,

$$\frac{dr_j}{dt} = 2i\left(\zeta_j \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta_j} - \bar{\zeta}_j \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\zeta}_j}\right) = \sum_{k,\,l} \gamma_{kl} (l_j - k_j) e^{iNt} \bar{\zeta}^{\mathbf{k}} \zeta^{\mathbf{l}},$$

$$\frac{d(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{dt} = \sum \gamma_{kl} (\mathbf{p}, \mathbf{l} - \mathbf{k}) e^{iNt} \bar{\zeta}^{\mathbf{k}} \zeta^{\mathbf{l}}. \tag{2.13}$$

Так как вектор $\mathbf{l} - \mathbf{k}$ является решением уравнения (2.7), то все коэффициенты в правой части (2.13) равны нулю.

Далее очевидно, что

$$\frac{d2i\Gamma}{dt} = 2i\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \sum_{k,\,l} \gamma_{kl} iN e^{iNt} \bar{\zeta}^{\mathbf{k}} \zeta^{\mathbf{l}}. \tag{2.14}$$

Из формул (2.13) и (2.14) получаем

$$\frac{d\,[2i\Gamma - i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r})]}{dt} = 2i\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - i\left(\boldsymbol{\lambda}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = i\sum_{k,\,l} \gamma_{kl}\,[N - (\boldsymbol{\lambda}, 1 - \mathbf{k})]\, e^{iNt}\bar{\zeta}^{\mathbf{k}}\zeta^{\mathbf{l}}.$$

Из (2.12) следует, что все коэффициенты в последнем разложении равны нулю.

Таким образом, существование формальных интегралов 1), 2) доказано. Пусть $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(s)}$ — базис линейного множества векторов $\mathbf{p}$. Если существует m линейно независимых резонансных соотношений (2.3), то $s = n - m$. Сумма

$$G = \sum_{j=1}^{s} (\mathbf{p}^{(j)}, \mathbf{r})^4 + F^2 = G_8 + \ldots$$

является формальным интегралом, как полином от формальных интегралов. Покажем, что из условия (2.6) следует положительная определенность формы

$$G_8 = \sum_{j=1}^{s} (\mathbf{p}^{(j)}, \mathbf{r})^4 + \left(\sum_{k,\,m=1}^{n} a_{km} r_k r_m\right)^2.$$

Здесь в правой части все слагаемые неотрицательны и первая сумма обращается в нуль только для тех векторов $\mathbf{r}$, которые принадлежат пересечению квадранта $m_j \geqslant 0$ и действительной линейной оболочки множества, образованного целочисленными векторами $\mathbf{m}$, являющимися решениями уравнения (2.7). Но для этих $\mathbf{r}$ по условию (2.6)

$$\left(\sum_{k,\,m=1}^{n} a_{km} r_k r_m\right)^2 > 0.$$

Итак, G — формальный определенно-положительный интеграл, и, следовательно, теорема Брюно доказана.

§ 3. Оценка скорости диффузии Арнольда. Результаты Нехорошева

В § 1 построены простые примеры многомерных гамильтоновых систем, которые устойчивы для большинства начальных условий, но по Ляпунову неустойчивы. Скорость диффузии Арнольда в примерах § 1 оказалась весьма значительной. Однако, как правило, диффузия Арнольда (если она существует) должна быть экспоненциальной, что показано Нехорошевым в его работах [78—80].

Нехорошев изучал системы с аналитической функцией Гамильтона вида

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}), \tag{3.1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\mathbf{I}^{\mathrm{T}} = (I_1, \ldots, I_n)$, $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Функция H_1 2π-периодична по угловым переменным φ_i. Нехорошевым доказана экспоненциальная оценка сверху скорости диффузии Арнольда при условии, что H_0 — *крутая функция*. Определение крутых функций дано в [81]. Непосредственная проверка условий крутизны сложна, поэтому мы не приводим здесь этого определения. Некоторые важные *достаточные условия крутизны*, полученные Нехорошевым, приведены ниже.

Примерами крутых функций являются функции следующего вида.

Определение [80]. Функцию H_0, определенную в области G евклидова пространства E^n, назовем *квазивыпуклой*, если для каждой точки $\mathbf{I}'$ из G выполнены условия:

а) $\operatorname{grad} H_0 |_{\mathbf{I}'} \neq 0$;

б) сужение квадратичной компоненты

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H_0(\mathbf{I}')}{\partial I_i \partial I_j} x_i x_j$$

разложения функции H_0 в этой точке на гиперплоскость

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_0(\mathbf{I}')}{\partial I_i} x_i = 0,$$

касательную к поверхности уровня функции, знакоопределенно; здесь $x_i = I_i - I_i'$.

Для функций H_0 от двух переменных достаточным условием крутизны является отличие от нуля определителя в формуле (1.4) на стр. 88.

Пусть $\| \mathbf{I} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} I_i^2}$. Нехорошев показал, что если в (3.1) функция H_0 будет крутой, то существуют константы $a > 0$, $b > 0$ такие, что для каждого решения $\mathbf{I}(t)$, $\boldsymbol{\varphi}(t)$

$$\| \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(0) \| < \varepsilon^b \text{ при всех } t \in [0, T], \tag{3.2}$$

где

$$T = \exp [(1/\varepsilon)^a]. \tag{3.3}$$

Для констант a и b получены такие значения:

$$a = \frac{2}{12\zeta + 3n + 14}, \quad b = \frac{2}{\alpha(12\zeta + 3n + 14)}, \tag{3.4}$$

где ζ и α зависят только от H_0 и удовлетворяют неравенствам

$$\zeta(H_0) \geqslant \frac{n(n-1)}{2} \tag{3.5}$$

(причем для квазивыпуклых функций, и только для них, равенство достигается) и

$$\alpha(H_0) \geqslant 1 \tag{3.6}$$

(причем для квазивыпуклых функций равенство достигается).

Требование крутизны функции H_0 существенно. В примерах, рассмотренных в § 1, функции $H_0 = H - H_2^{(1)}$ (см. (1.7) и (1.9)) не являются крутыми.

Приведем два достаточных условия крутизны для функций от трех переменных [80]. Функция H_0 (I) будет крутой в некоторой области, если

1) для всех точек этой области определитель (1.4) отрицателен;

2) для каждой точки I* этой области этот определитель больше нуля и система

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H_0(\mathrm{I}^*)}{\partial I_i} x_i = 0, \tag{3.7}$$

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} \frac{\partial^2 H_0(\mathrm{I}^*)}{\partial I_i \partial I_j} x_i x_j = 0, \tag{3.8}$$

$$\sum_{i,\,j,\,k=1}^{3} \frac{\partial^3 H_0(\mathrm{I}^*)}{\partial I_i \partial I_j \partial I_k} x_i x_j x_k = 0 \tag{3.9}$$

не имеет решений, кроме тривиального $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Здесь $x_i = I_i - I_i^*$.

Функция H_0 «общего положения» удовлетворяет одному из приведенных достаточных условий крутизны. Отметим, что выполнение условия 1) означает несовместность (при $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$) системы (3.7) и (3.8) и, значит, при условии 1) функция H_0 квазивыпукла.

Пусть изучается движение в системе с 2π-периодической по t, аналитической функцией Гамильтона

$$H = H_0(I_1, I_2) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2, t). \tag{3.10}$$

Введением «импульса» I_3 и «угловой переменной» $\varphi_3 \equiv t$ задача сводится к автономной системе с тремя степенями свободы, и несовместность (при $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$) системы двух уравнений

$$\sum_{i,\,j=1}^{2} \frac{\partial^2 H_0(\mathrm{I}^*)}{\partial I_i \partial I_j} x_i x_j = 0 \tag{3.11}$$

$$\sum_{i,\,j,\,k=1}^{2} \frac{\partial^3 H_0(\mathrm{I}^*)}{\partial I_i \partial I_j \partial I_k} x_i x_j x_k = 0 \tag{3.12}$$

будет достаточным условием крутизны функции $H_0(I_1, I_2) + I_3$ и, значит, условием, достаточным для применимости оценок (3.2) — (3.6).

§ 4. Неавтономная система с двумя степенями свободы. Случай резонанса третьего порядка

Рассмотрим задачу об устойчивости положений равновесия неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Будем считать, что соответствующая функция Гамильтона 2π-периодична по времени и аналитична относительно координат и импульсов. Кроме того, предположим, что линеаризованная система устойчива и все ее мультипликаторы различны. В этом случае функция Гамильтона в подходящим образом выбранных переменных q_i, p_i (см ~~главу~~ 2) имеет вид

$$H(q_j, p_j, t) = \frac{1}{2}\lambda_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\lambda_2(q_2^2 + p_2^2) + \\ + \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=3}^{\infty} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)\, q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}. \qquad (4.1)$$

Здесь $\pm i\lambda_j$ $(j = 1, 2)$ — характеристические показатели линеаризованной системы, ν_j, μ_j — целые неотрицательные числа, $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t + 2\pi) = h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$.

Если величина $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$ не будет целым числом для любых целых неотрицательных чисел k_1 и k_2, то, согласно Мозеру (см. ~~главу~~ 2), система, имеющая функцию Гамильтона (4.1), формально устойчива. С другой стороны, если величина $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$ не будет целым числом для целых чисел k_1 и k_2, удовлетворяющих равенствам $|k_1| + |k_2| = 3$ и $|k_1| + |k_2| = 4$ (т. е. в системе отсутствуют резонансы третьего и четвертого порядков), то при помощи преобразования Биркгофа $q_j, p_j \to q_j' p_j'$ функцию Гамильтона (4.1) можно привести к виду

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}) \qquad (4.2)$$

$$(2r_j = q_j'^2 + p_j'^2,\ c_{ij} = \text{const}).$$

Согласно теореме Брюно (см. § 2), при выполнении неравенства $c_{20}k_1^2 + c_{11}k_1k_2 + c_{02}k_2^2 \neq 0$ для целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих уравнению $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = m$ (m — целое число), имеет место формальная устойчивость. Как следствие, отсюда получаем, что система с функцией Гамильтона (4.1) формально устойчива, если квадратичная форма $c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$

знакоопределенна при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$. Последнее утверждение есть частный случай для $n = 2$ условия формальной устойчивости, полученного Глиммом [138]. И, наконец, отметим еще, что если $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0$, то имеет место устойчивость для большинства начальных условий (см. § 1).

Рассмотрим, следуя [61], задачу об устойчивости, когда в системе есть резонансы третьего или четвертого порядков. Будем предполагать, что число $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$ является целым для одной пары целых неотрицательных чисел k_1 и k_2, сумма которых равна трем или четырем. Таким образом, будут рассмотрены девять резонансных случаев:

$$\begin{array}{lllll} (1)\ 3\lambda_1 = m, & (2)\ 3\lambda_2 = m, & (3)\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = m, \\ (4)\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = m, & (5)\ 4\lambda_1 = m, & (6)\ 4\lambda_2 = m, \\ (7)\ 2(\lambda_1 + \lambda_2) = m, & (8)\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = m, & (9)\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = m. \end{array} \tag{4.3}$$

Так как мультипликаторы предполагаются различными, то целые, полуцелые и удовлетворяющие равенствам $\lambda_1 \pm \lambda_2 = m$ значения λ_i не рассматриваются. Это означает, что в системе нет резонансов до второго порядка включительно и задача об устойчивости нелинейной системы решается для значений параметров, лежащих внутри области устойчивости линеаризованной системы.

Исследуем сначала устойчивость в случаях (1) — (4). Введем новые канонические переменные q_j^*, p_j^* при помощи преобразования Биркгофа, задаваемого производящей функцией

$$S = q_1 p_1^* + q_2 p_2^* + S_3,$$

где

$$S_3 = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=3} s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)\, q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{*\mu_1} p_2^{*\mu_2}.$$

Здесь $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t + 2\pi) = s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$.

Обозначим новую функцию Гамильтона через $H^*(q_j^*, p_j^*, t)$. Пусть H_k и H_k^* — совокупности членов порядка k относительно координат и импульсов соответственно в старой и новой функциях Гамильтона. Из тождества, связывающего H, H^* и S,

$$H^*\left(\frac{\partial S}{\partial p_j^*}, p_j^*, t\right) \equiv H\left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{4.4}$$

получаем

$$H_2^* = H_2, \quad H_3^* = H_3 + DS_3, \tag{4.5}$$

$$H_4^* = H_4 + \sum_{j=1}^{2} \frac{\lambda_j}{2}\left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial q_j}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_3}{\partial p_j^*}\right)^2\right] + \frac{\partial H_3}{\partial p_j^*}\frac{\partial S_3}{\partial q_j} - \frac{\partial H_3^*}{\partial q_j}\frac{\partial S_3}{\partial p_j^*}.$$

В (4.4) функции имеют своими аргументами величины q_j, p_j^* и t, через D обозначен оператор

$$D = \lambda_1 \left(p_1^* \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial p_1^*} \right) + \lambda_2 \left(p_2^* \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial p_2^*} \right) + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Введем обозначение $a_{\nu\mu} = \lambda_1 (\mu_1 - \nu_1) + \lambda_2 (\mu_2 - \nu_2)$. Если величина $a_{\nu\mu}$ не будет целым числом при $|\mu_1 - \nu_1| + |\mu_2 - \nu_2| = 3$ (т. е. отсутствуют резонансы третьего порядка), то, выбрав соответствующим образом S_3, можно добиться выполнения тождества $H_3^* \equiv 0$. Для 2π-периодических коэффициентов $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ получаем после несложных выкладок такие выражения:

$$s_{0300} = u_{0003} + u_{0102}, \quad s_{0102} = u_{0102} - 3u_{0003}, \quad s_{0201} = v_{0102} + 3v_{0003},$$
$$s_{0003} = v_{0102} - v_{0003}, \quad s_{3000} = u_{0030} + u_{1020}, \quad s_{1020} = u_{1020} - 3u_{0030},$$
$$s_{2010} = v_{1020} + 3v_{0030}, \quad s_{0030} = v_{1020} - v_{0030}, \quad s_{1002} = u_{0111} - u_{0012} - u_{0210},$$
$$s_{1200} = u_{0012} + u_{0210} + u_{0111}, \quad s_{0210} = v_{0111} + v_{0012} + v_{0210}, \quad s_{0111} = 2(u_{0210} - u_{0012}),$$
$$s_{0012} = v_{0111} - v_{0012} - v_{0210}, \quad s_{1101} = 2(v_{0012} - v_{0210}),$$
$$s_{0120} = u_{1011} - u_{0021} - u_{2001}, \quad s_{2100} = u_{0021} + u_{2001} + u_{1011},$$
$$s_{2001} = v_{1011} + v_{0021} + v_{2001}, \quad s_{0021} = v_{1011} - v_{0021} - v_{2001},$$
$$s_{1011} = 2(u_{2001} - u_{0021}), \quad s_{1110} = 2(v_{0021} - v_{2001});$$

$$u_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = g(t) \sin a_{\nu\mu} t + f(t) \cos a_{\nu\mu} t, \tag{4.6}$$
$$v_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = g(t) \cos a_{\nu\mu} t - f(t) \sin a_{\nu\mu} t;$$
$$g(t) = \operatorname{ctg} \pi a_{\nu\mu} I_1(2\pi) + I_2(2\pi) - 2I_2(t),$$
$$f(t) = I_1(2\pi) - \operatorname{ctg} \pi a_{\nu\mu} I_2(2\pi) - 2I_1(t),$$
$$I_1(t) = \int_0^t (u'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \cos a_{\nu\mu} x - v'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \sin a_{\nu\mu} x)\, dx,$$
$$I_2(t) = \int_0^t (u'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \sin a_{\nu\mu} x + v'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \cos a_{\nu\mu} x)\, dx;$$

$$u'_{0003} = \frac{1}{8}(h_{0300} - h_{0102}), \quad v'_{0003} = \frac{1}{8}(h_{0201} - h_{0003}),$$
$$u'_{0102} = \frac{1}{8}(h_{0102} + 3h_{0300}), \quad v'_{0102} = \frac{1}{8}(h_{0201} + 3h_{0003}),$$
$$u'_{0030} = \frac{1}{8}(h_{3000} - h_{1020}), \quad v'_{0030} = \frac{1}{8}(h_{2010} - h_{0030}),$$

$$
\begin{aligned}
u'_{1020} &= \frac{1}{8}(h_{1020} + 3h_{3000}), & v'_{1020} &= \frac{1}{8}(h_{2010} + 3h_{0030}),\\
u'_{0111} &= \frac{1}{4}(h_{1200} + h_{1002}), & v'_{0111} &= \frac{1}{4}(h_{0012} + h_{0210}),\\
u'_{0012} &= \frac{1}{8}(h_{1200} - h_{1002} - h_{0111}), & v'_{0012} &= \frac{1}{8}(h_{0210} - h_{0012} + h_{1101}),\\
u'_{0210} &= \frac{1}{8}(h_{1200} - h_{1002} + h_{0111}), & v'_{0210} &= \frac{1}{8}(h_{0210} - h_{0012} - h_{1101}),\\
u'_{1011} &= \frac{1}{4}(h_{2100} + h_{0120}), & v'_{1011} &= \frac{1}{4}(h_{2001} + h_{0021}),\\
u'_{0021} &= \frac{1}{8}(h_{2100} - h_{0120} - h_{1011}), & v'_{0021} &= \frac{1}{8}(h_{2001} - h_{0021} + h_{1110}),\\
u'_{2001} &= \frac{1}{8}(h_{2100} - h_{0120} + h_{1011}), & v'_{2001} &= \frac{1}{8}(h_{2001} - h_{0021} - h_{1110}).
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Если же величина $a_{\nu\mu}$ равняется целому числу m при $\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 3$, то полностью функцию H_3^* уничтожить нельзя, но ее можно привести к нормальной форме, отражающей резонансный характер задачи. И в новых переменных q_j^*, p_j^* функция Гамильтона запишется в виде

$$H^* = \frac{1}{2}\lambda_1(q_1^{*2} + p_1^{*2}) + \frac{1}{2}\lambda_1(q_2^{*2} + p_2^{*2}) + H_3^* + O((r_1 + r_2)^2).$$

Выражения для H_3^* в случаях (1) — (4), определенных в (4.3), будут соответственно такими:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ H_3^* = 2u^*_{0030}(q_1^{*3} - 3q_1^*p_1^{*2}) - 2v^*_{0030}(p_1^{*3} - 3p_1^*q_1^{*2}),\\
&(2)\ H_3^* = 2u^*_{0003}(q_2^{*3} - 3q_2^*p_2^{*2}) - 2v^*_{0003}(p_2^{*3} - 3p_2^*q_2^{*2}),\\
&(3)\ H_3^* = -2u^*_{0012}[q_1^*(p_2^{*2} - q_2^{*2}) + 2p_1^*q_2^*p_2^*] -\\
&\qquad\qquad - 2v^*_{0012}[p_1^*(p_2^{*2} - q_2^{*2}) - 2q_1^*q_2^*p_2^*],\\
&(4)\ H_3^* = -2u^*_{0021}[q_2^*(p_1^{*2} - q_1^{*2}) + 2p_2^*q_1^*p_1^*] -\\
&\qquad\qquad - 2v^*_{0021}[p_2^*(p_1^{*2} - q_1^{*2}) - 2q_2^*q_1^*p_1^*].
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

В формулах (4.8) введены обозначения

$$
\begin{aligned}
u^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} &= x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\cos mt + y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\sin mt,\\
v^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} &= -x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\sin mt + y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\cos mt,\\
x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\cos mt - v'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\sin mt)\,dt,\\
y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\sin mt + v'_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\cos mt)\,dt.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Для каждого из резонансов (1) — (4) имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Если* $x^2_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + y^2_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \neq 0$, *то положение равновесия неустойчиво.*

Проведем доказательство для случая (1). После канонического преобразования

$$q^j = \sqrt{2r_j}\sin(\varphi_j + \lambda_j t - \theta), \quad p_j = \sqrt{2r_j}\cos(\varphi_j + \lambda_j t - \theta), \tag{4.10}$$

где

$$\sin 3\theta = \frac{y_{0030}}{\sqrt{x^2_{0030} + y^2_{0030}}}, \quad \cos 3\theta = \frac{x_{0030}}{\sqrt{x^2_{0030} + y^2_{0030}}},$$

функция Гамильтона примет вид

$$H_3^* = -4\sqrt{2\,(x^2_{0030} + y^2_{0030})}\, r_1\sqrt{r_1}\sin 3\varphi_1 + O((r_1 + r_2)^2). \tag{4.11}$$

Для доказательства неустойчивости воспользуемся теоремой Четаева [95]. Функцию V возьмем в виде $V = V_1V_2$, где

$$V_1 = r_1^\alpha - r_2^2, \quad V_2 = r_1\sqrt{r_1}\cos 6\varphi_1 \qquad (\alpha > 2). \tag{4.12}$$

За область $V > 0$ примем область $\left(V_1 > 0,\ -\frac{\pi}{12} < \varphi_1 < \frac{\pi}{12}\right)$. На границе этой области либо V_1, либо V_2 равны нулю, а внутри области выполняется равенство

$$r_2 = \beta r_1^{\alpha/2} \quad (0 < \beta < 1). \tag{4.13}$$

Параметр α подберем так, чтобы производная функции V в силу уравнений движения с гамильтонианом (4.11) была определенно-положительной в области $V > 0$.

Легко проверить, что при $2 < \alpha < 3$ производная может быть представлена в виде

$$\frac{dV}{dt} = 6\sqrt{2\,(x^2_{0030} + y^2_{0030})}\, r_1^{\alpha+2}\{[2\alpha\cos 3\varphi_1 + f_1]\cos 6\varphi_1 + \\ + 3(1 - \beta^2)[\cos 3\varphi_1 + \sin 3\varphi_1 \sin 6\varphi_1 + f_2]\}, \tag{4.14}$$

где функции f_1 и f_2 сколь угодно малы при r_1, стремящемся к нулю. В области $V > 0$, как нетрудно проверить, выполняются неравенства

$$\cos 3\varphi_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 3\varphi_1 + \sin 3\varphi_1 \sin 6\varphi_1 \geqslant 1.$$

Поэтому из (4.13) и (4.14) следует, что в области $V > 0$ в достаточной близости к началу координат функция dV/dt будет определенно-

положительной и, согласно теореме Четаева, положение равновесия неустойчиво.

В случае (3) после преобразования (4.10), где теперь

$$\sin 3\theta = \frac{y_{0012}}{\sqrt{x_{0012}^2 + y_{0012}^2}}, \quad \cos 3\theta = \frac{x_{0012}}{\sqrt{x_{0012}^2 + y_{0012}^2}},$$

получим

$$H^* = -4\sqrt{2(x_{0012}^2 + y_{0012}^2)}\, r_2 \sqrt{r_1} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^2). \quad (4.15)$$

Неустойчивость положения равновесия доказывается при помощи функции Четаева $V = V_1 V_2$, где

$$V_1 = r_2^\alpha - (r_2 - 2r_1)^2, \quad V_2 = r_2 \sqrt{r_1} \cos 2(\varphi_1 + 2\varphi_2)$$
$$(2 < \alpha < 3). \quad (4.16)$$

Доказательства неустойчивости в случаях (2) и (4) аналогичны доказательствам в случаях (1) и (3) соответственно.

§ 5. Об устойчивости неавтономной системы с двумя степенями свободы при резонансе четвертого порядка

Рассмотрим теперь задачу об устойчивости в случаях (5) — (9). Здесь упрощенная при помощи преобразований, аналогичных преобразованиям предыдущего параграфа, функция Гамильтона в полярных координатах имеет следующий вид:

$$H = c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 - \bar{H}(r_i, \varphi_i) + H'(r_i, \varphi_i, t). \quad (5.1)$$

В (5.1) $H' = O((r_1 + r_2)^{5/2})$, а функция $\bar{H}$ для случаев (5) — (9) будет соответственно такой:

$$(5)\ \bar{H} = \sqrt{x_{0040}^2 + y_{0040}^2} \sin 4\varphi_1, \qquad (6)\ \bar{H} = \sqrt{x_{0004}^2 + y_{0004}^2} \sin 4\varphi_2,$$

$$(7)\ \bar{H} = \sqrt{x_{2200}^2 + y_{2200}^2} \sin 2(\varphi_1 + \varphi_2), \quad (8)\ \bar{H} = \sqrt{x_{1300}^2 + y_{1300}^2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2), \quad (5.2)$$

$$(9)\ \bar{H} = \sqrt{x_{3100}^2 + y_{3100}^2} \sin(3\varphi_1 + \varphi_2).$$

При приведении гамильтониана к виду (5.1) считаем, что $x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}^2 + y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}^2 \neq 0$, а в формулах преобразования (4.10)

$$\sin 4\theta = -\frac{x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}}{\sqrt{x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}^2 + y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}^2}},$$

$$\cos 4\theta = -\frac{y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}}{\sqrt{x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}^2 + y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}^2}}.$$

Выражения для коэффициентов c_{ij} таковы:

$$c_{20} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(h^*_{2020} + 3h^*_{0040} + 3h^*_{4000})\,dt,$$

$$c_{11} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h^*_{2200} + h^*_{0220} + h^*_{2002} + h^*_{0022})\,dt, \qquad (5.3)$$

$$c_{02} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(h^*_{0202} + 3h^*_{0004} + 3h^*_{0400})\,dt.$$

Величины $x_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ и $y_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$, входящие в (5.2), вычисляются по формулам (4.9), в которых надо положить

$$u'_{0040} = \frac{1}{2}(h^*_{0040} + h^*_{4000} - h^*_{2020}), \qquad v'_{0040} = \frac{1}{2}(h^*_{3010} - h^*_{1030}),$$

$$u'_{0004} = \frac{1}{2}(h^*_{0004} + h^*_{0400} - h^*_{0202}), \qquad v'_{0004} = \frac{1}{2}(h^*_{0301} - h^*_{0103}),$$

$$u'_{1300} = \frac{1}{2}(h^*_{1300} + h^*_{0013} - h^*_{1102} - h^*_{0211}), \qquad v'_{1300} = \frac{1}{2}(h^*_{0112} + h^*_{1003} - h^*_{0310} - h^*_{1201}),$$

$$u'_{3100} = \frac{1}{2}(h^*_{3100} + h^*_{0031} - h^*_{1120} - h^*_{2011}), \qquad v'_{3100} = \frac{1}{2}(h^*_{1021} + h^*_{0130} - h^*_{2110} - h^*_{3001}),$$

$$u'_{2200} = \frac{1}{2}(h^*_{0022} + h^*_{2200} - h^*_{0220} - h^*_{2002} - h^*_{1111}), \qquad v'_{2200} = \frac{1}{2}(h^*_{0121} + h^*_{1012} - h^*_{1210} - h^*_{2101}). \qquad (5.4)$$

В формулах (5.3) — (5.4) величины $h^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ суть коэффициенты при соответствующих степенях $q_1^{*\nu_1} q_2^{*\nu_2} p_1^{*\mu_1} p_2^{*\mu_2}$ в функции H_4^*, вычисляемой по формулам (4.5).

Для каждого из резонансных случаев (5) — (9) введем величины A_j, B_j формулами

$$A_5 = \sqrt{x^2_{0040} + y^2_{0040}}, \qquad B_5 = c_{20},$$

$$A_6 = \sqrt{x^2_{0004} + y^2_{0004}}, \qquad B_6 = c_{02},$$

$$A_7 = \sqrt{x^2_{2200} + y^2_{2200}}, \qquad B_7 = c_{20} + c_{11} + c_{02}, \qquad (5.5)$$

$$A_8 = 3\sqrt{3(x^2_{1300} + y^2_{1300})}, \qquad B_8 = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02},$$

$$A_9 = 3\sqrt{3(x^2_{3100} + y^2_{3100})}, \qquad B_9 = 9c_{20} + 3c_{11} + c_{02}.$$

Теорема. *При выполнении неравенства* $A_j > |B_j|$ *положение равновесия неустойчиво, при* $A_j < |B_j|$ *имеет место устойчие-*

вость при учете в функции Гамильтона (5.1) *членов не выше второго порядка по* r_i. *Если в* (5.1) *функция* $H - H'$ *будет знакоопределенной функцией, то положение равновесия формально устойчиво.*

Докажем теорему в случае (5). Для доказательства первого утверждения возьмем функцию Четаева в виде $V = V_1 V_2$, где

$$V_1 = r_1^a - r_2^2, \quad V_2 = r_1^2 \cos 4a\varphi_1 \qquad (5.6)$$
$$(a = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad 2 < \alpha < 3).$$

За область $V > 0$ примем область $(V_1 > 0, \ -\pi/8a < \varphi < \pi/8a)$. В этой области $r_2 = \beta r_1^{\alpha/2}$ $(0 < \beta < 1)$. Для производной получаем такое выражение:

$$\frac{dV}{dt} = 4r_1^{\alpha+3}\{(\alpha A_5 \cos 4\varphi_1 + g_1)\cos 4a\varphi_1 + 2(1-\beta^2)\times$$
$$\times [A_5 \cos 4\varepsilon\varphi_1 - B_5 \sin 4a\varphi_1 + \varepsilon \sin 4a\varphi_1 (A_5 \sin 4\varphi_1 - B_5) + g_2]\}, \qquad (5.7)$$

где функции g_1 и g_2 сколь угодно малы при r_1, стремящемся к нулю.

Из (5.7) видно, что при $A_5 > |B_5|$ величину ε можно выбрать настолько малой, что функция dV/dt будет определенно-положительной в области $V > 0$ в достаточной близости к началу координат. Тем самым утверждение теоремы о неустойчивости доказано.

Второе утверждение теоремы доказывается очень просто. «Укороченная» система с функцией Гамильтона $H - H'$ имеет два интеграла $r_2 = \text{const}$ и $H - H' = \text{const}$ Для доказательства устойчивости «укороченной» системы воспользуемся теоремой Ляпунова об устойчивости. Функцию Ляпунова W возьмем в виде

$$W = r_2^4 + (H - H')^2. \qquad (5.8)$$

При $A_5 < |B_5|$ эта функция, как легко видеть, будет определенно-положительной, откуда, согласно теореме Ляпунова, следует утверждение доказываемой теоремы.

Покажем теперь справедливость третьего утверждения теоремы. Применяя преобразование Биркгофа, а затем преобразование (4.10), гамильтониан (4.1) можно формально привести к функции, не зависящей от t во всех порядках. Тогда выражение $G \equiv H$ будет формальным интегралом исходной системы дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона (4.1). Получаем

$$G = G_4 + G_5 + \ldots \qquad (G_4 = H - H').$$

Поэтому, если $H - H'$ будет знакоопределенной функцией, то положение равновесия формально устойчиво. Теорема полностью доказана.

В резонансном случае (7) неустойчивость доказывается при помощи функции Четаева $V = V_1V_2$, где

$$V_1 = r_2^\alpha - (r_1 - r_2)^2, \quad V_2 = r_1r_2 \cos 2a\,(\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$(a = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad 2 < \alpha < 3). \tag{5.9}$$

Устойчивость «укороченной» системы в случае (7) доказывается при помощи функции Ляпунова

$$W = (r_1 - r_2)^2 + (H - H')^2.$$

В случае (8) функцию V можно взять в виде $V = V_1V_2$, где

$$V_1 = r_2^\alpha - (r_2 - 3r_1)^2, \quad V_2 = r_2\sqrt{r_1r_2}\cos a\,(\varphi_1 + 3\varphi_2)$$

($a = 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $2 < \alpha < 3$), а функция W в этом резонансном случае может быть взята в виде

$$W = (r_2 - 3r_1)^4 + (H - H')^2.$$

Рассмотрение резонансов (6) и (9) аналогично рассмотрению резонансов (5) и (8) соответственно.

ГЛАВА 6

МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ НОРМАЛИЗАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

§ 1. Необходимые понятия и определения

Практическое применение изложенных в предыдущих главах результатов теории гамильтоновых систем требует эффективных способов получения нормальной формы функции Гамильтона. Линейную нормализацию можно осуществлять при помощи алгоритма, изложенного во второй главе. Задача нелинейной нормализации более сложна и весьма громоздка. Для автономных систем она сводится к проведению некоторых алгебраических операций над алгебраическими и тригонометрическими полиномами. Если в изучаемой задаче требуется получить нормальную форму гамильтониана с точностью до членов не выше четвертого порядка, то можно воспользоваться расчетными формулами, приведенными в предыдущих главах. Трудности нормализации неизмеримо возрастают при увеличении числа степеней свободы изучаемой динамической системы, а также когда функция Гамильтона явно содержит время. В последнем случае без расчетов на ЭВМ уже нельзя обойтись, так как при нахождении производящей функции нормализующего преобразования неизбежно приходится решать задачу нахождения периодического решения некоторой системы дифференциальных уравнений.

В настоящей главе описан разработанный в [61] алгоритм нормализации 2π-периодических по t гамильтоновых систем, основанный на применении *метода точечных отображений* [75]. Кроме того, здесь же рассмотрена задача об устойчивости неподвижных точек отображений в случае резонанса.

Приведем кратко необходимые понятия и определения метода точечных отображений. Пусть движение динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где правые части X_i либо 2π-периодичны по t, либо от t не зависят совсем. Будем изображать движение в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n; t$. Обозначим через P_0 (рис. 5) плоскость $t = 0$, а через $P_{2\pi}$ — плоскость $t = 2\pi$. Траектория системы (1.1), начинающаяся в произвольной точке M плоскости

P_0, через время $t = 2\pi$ пересечет плоскость $P_{2\pi}$ в некоторой точке $M_{2\pi}$. Если теперь отождествить плоскости $t = 0$ и $t = 2\pi$ (т. е. спроектировать плоскость $P_{2\pi}$ на плоскость P_0), то получим точечное отображение T плоскости P_0 в себя. Это отображение будем записывать в виде равенства

$$\overline{M} = TM$$

или при помощи формул

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.2}$$

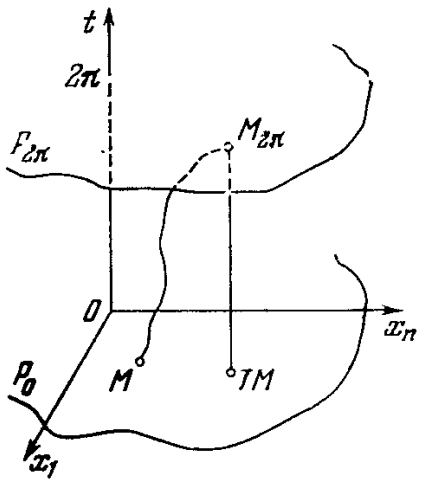

Рис. 5. К понятию точечного отображения.

К точке $\overline{M}$ в свою очередь может быть применено отображение T, которое переведет ее в точку $\overline{\overline{M}}$. Таким образом,

$$\overline{\overline{M}} = T(\overline{M}) = T(TM) = T^2M.$$

Преобразование, состоящее в m-кратном последовательном применении преобразования T, обозначают T^m.

Точка M^* называется *неподвижной точкой преобразования* T, если преобразование T переводит ее в себя, т. е.

$$M^* = TM^*.$$

Уравнение для определения неподвижных точек преобразования в координатной форме получается из (1.2):

$$x_i^* = f_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Назовем *ε-окрестностью* точки M^* совокупность точек M, для которых $\rho(M, M^*) < \varepsilon$. Здесь через $\rho(M, M^*)$ обозначено расстояние между точками M и M^*:

$$\rho(M, M^*) = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + \ldots + (x_n - x_n^*)^2}.$$

Введем, согласно [76, 77], понятие устойчивой и неустойчивой неподвижных точек. Неподвижная точка M^* называется *устойчивой в малом*, если для любой точки M, принадлежащей достаточно малой ε-окрестности M^*, имеет место неравенство

$$\rho(T^mM, M^*) < \varepsilon_m,$$

где $\max \varepsilon_m \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Неподвижная точка M^* называется *неустойчивой*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ в любой сколь угодно малой окрестности точки M^* есть точки M, которые при последовательном применении к ним преобразования T выходят за пределы ε-окрестности неподвижной точки M^*.

Между точечными отображениями T и движениями системы существует очень тесная связь. Например, справедлив следующий общий принцип: *для того чтобы решение* $\mathbf{x}^{\tau}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *неавтономной системы было* 2π*-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы точка* $\mathbf{x}(0)$ *была неподвижной точкой отображения* T:

$$T\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0).$$

Имеет место соответствие не только между периодическими движениями и неподвижными точками преобразования T, но и соответствие между их устойчивостями. Именно, *чтобы периодическое движение было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы была устойчивой соответствующая неподвижная точка преобразования* T.

§ 2. Перенесение теоремы Четаева на точечные отображения

В работе [76] Неймарком доказана теорема, представляющая собой перенесение теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости на точечные отображения. Нам в дальнейшем, однако, потребуется теорема о неустойчивости неподвижных точек точечного отображения, аналогичная теорема Четаева о неустойчивости движения. Докажем следующую теорему, представляющую собой перенесение теоремы Четаева на точечные отображения.

Теорема. *Пусть* $M^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *— неподвижная точка отображения* T, *и пусть возможно найти такую непрерывную функцию* $V(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, *что*

1) $V(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0$;

2) *в сколь угодно малой окрестности точки* M^* *существует область* $V > 0$, *на границе которой* $V = 0$;

3) *во всех точках* M *области* $V > 0$ *разность* $V(TM) - V(M)$ *положительна.*

Тогда неподвижная точка M^* *неустойчива.*

Доказательство теоремы аналогично соответствующим доказательствам Четаева и Неймарка. Зафиксируем некоторое достаточно малое число ε_0 $(0 < \varepsilon_0 \leqslant 1)$. Через V_{ε_0} обозначим пересечение области $V > 0$ и замкнутой ε_0-окрестности точки M^*. Возьмем точку M_0, сколь угодно близкую к неподвижной точке M^* и принадлежащую V_{ε_0}. По условиям теоремы такой выбор точки M_0 всегда возможен, так как область $V > 0$ примыкает к точке M^*. Покажем, что при выполнении условий теоремы при некотором m точка $T^m M_0$ лежит вне ε_0-окрестности точки M^*.

Предположим противное, т. е. пусть точки $T^m M_0$ при всех m лежат в ε_0-окрестности. Тогда последовательность $\{T^k M_0\}$ будет ограниченной. Кроме того, ни одна точка этой последовательности

не может выйти из области $V > 0$, так как по третьему условию теоремы $V(TM) > V(M)$.

Рассмотрим теперь числовую последовательность $\{V(T^k M_0)\}$. Эта последовательность будет ограниченной в силу непрерывности функции V. Кроме того, она будет монотонно возрастающей, так как, согласно третьему условию теоремы,

$$V(M_0) < V(TM_0) < V(T^2M) < \ldots < V(T^kM_0) < \ldots$$

Следовательно, существует предел этой последовательности

$$\lim_{k\to\infty} V(T^kM_0) = a \qquad (a > V(M_0)).$$

Из ограниченной последовательности $\{T^kM_0\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность

$$T^{i_1}M_0,\ T^{i_2}M_0, \ldots$$

Пусть точка P будет пределом этой последовательности

$$\lim_{k\to\infty} T^{i_k}M_0 = P \qquad (P \in V_{\varepsilon_0}).$$

Рассмотрим выражение

$$V(T^{i_{k+1}}M_0) - V(T^{i_k}M_0)$$

и перейдем в нем к пределу при $k \to \infty$. Получим

$$\lim_{k\to\infty} [V(T^{i_{k+1}}M_0) - V(T^{i_k}M_0)] = V(TP) - V(P) = 0,$$

что противоречит третьему условию теоремы.

§ 3. Разложение отображения в ряд

Обратимся снова к системе дифференциальных уравнений (1.1). Предположим, что правые части X_i аналитичны по пространственным переменным в окрестности периодического решения $x^*(t)$ системы (1.1). Тогда решения системы (1.1) тоже будут аналитическими относительно начальных данных, достаточно близких к $x^{*\tau}(0) = (x_1^*(0), x_2^*(0), \ldots, x_n^*(0))$. Из непрерывной зависимости решений от начальных данных следует, что решения системы (1.1) с начальными условиями, близкими к $x^*(0)$, определены при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Поэтому оператор T точечного отображения определен при начальных условиях, достаточно близких к $x^*(0)$. Будем считать для простоты, что неподвижная точка $M^* = x^*(0)$ оператора T совпадает с началом координат, и найдем разложение оператора T в ряд по степеням начальных данных.

Разложение оператора T в ряд можно получать разными способами: можно искать общее решение в виде ряда по начальным

данным, можно применять численное дифференцирование по начальным данным. Как правило, эти способы весьма сложны. Но часто можно использовать те или иные специфические свойства системы (1.1), вытекающие из характера изучаемой динамической системы.

Мы интересуемся точечными отображениями, задаваемыми гамильтоновой системой дифференциальных уравнений. Пусть эта система имеет периодическое решение, совпадающее с началом координат, а функция Гамильтона аналитична по координатам и импульсам и 2π-периодична по t. Использование гамильтонова характера системы (1.1) существенно упрощает нахождение разложения оператора T в ряд.

Обратим внимание на то, что преобразование фазового пространства при помощи движения гамильтоновой системы является каноническим [16]. Переменные $q_i(t)$, $p_i(t)$ получаются из $q_i(0)$, $p_i(0)$ при помощи формул

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad p_i(0) = -\frac{\partial W}{\partial q_i(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $W = W(q_i(t), q_i(0), t)$ — главная функция Гамильтона, т. е. действие $W = \int_0^t L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt$, ($L$ — функция Лагранжа), выраженное через начальные координаты, конечные координаты и конечный момент времени t.

Мы, однако, будем искать преобразование $q_i(0)$, $p_i(0) \to q_i(t)$, $p_i(t)$ иначе. Будем находить не прямое преобразование, а обратное, т. е. будем считать, что движение гамильтоновой системы переводит систему с функцией Гамильтона $H(q_i, p_i, t)$ в систему с функцией Гамильтона, тождественно равной нулю. Тогда новые координаты и импульсы будут $q_i(0)$, $p_i(0)$. Далее, будем искать не само преобразование T, а производящую функцию этого преобразования.

Обозначим через $S(q_i(t), p_i^0, t)$ производящую функцию преобразования $q_i(t)$, $p_i(t) \to q_i^0$, p_i^0. (Здесь и в дальнейшем $q_i^0 = q_i^0(0)$, $p_i^0 = p_i(0)$). Формулы преобразования имеют вид

$$q_i^0 = \frac{\partial S}{\partial p_i^0}, \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \tag{3.1}$$

Производящая функция удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0. \tag{3.2}$$

Полагая в (3.1) $t = 0$, найдем начальные условия $S(q_i(0),$

$p_i(0), 0)$, а положив $t = 2\pi$ и разрешив (3.1) относительно q_i, p_i, получим разложение оператора T в ряд по q_i^0, p_i^0.

Пусть функция Гамильтона изучаемой системы записана в полярных координатах и имеет вид

$$H(\varphi_i, r_i, t) = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{3.3}$$

где H_m при $m \geqslant 3$ — однородные формы степени m относительно $\sqrt{r_i}$, содержащие угловые аргументы синусов и косинусов как комбинации вида $k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \ldots + k_n\varphi_n$ (k_i — целые числа), H_2 предполагается заданной в нормальной форме

$$H_2 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \ldots + \lambda_n r_n. \tag{3.4}$$

Будем искать производящую функцию отображения $r_i\varphi_i \to r_i^0\varphi_i^0$ в виде ряда

$$S = S_2 + S_3 + S_4 + \ldots, \tag{3.5}$$

в котором S_m имеет структуру, аналогичную структуре H_m. Подставив (3.3) и (3.5) в уравнение (3.2) и приравняв формы одинаковых степеней в обеих его частях, получим

$$\begin{aligned} DS_2 &= 0, \\ DS_3 &= -H_3\left(\varphi_i, \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_i}, t\right), \\ DS_4 &= -H_4\left(\varphi_i, \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_i}, t\right) - \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial H_3}{\partial r_i}\right|_{r_i = \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_i}} \frac{\partial S_3}{\partial \varphi_i}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь через D обозначен оператор

$$D = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial \varphi_n} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Так как H_2 имеет вид (3.4), то первому уравнению из (3.6) можно удовлетворить функцией

$$S_2 = r_1^0(\varphi_1 - \lambda_1 t) + \ldots + r_n^0(\varphi_n - \lambda_n t). \tag{3.7}$$

Из (3.1) следует, что при таком выборе S_2 начальные условия для $S_m(\varphi_i, r_i^0, t)$ ($m \geqslant 3$) должны быть нулевыми. Покажем, как получить формы S_m в явном виде.

Возьмем в правой части какого-либо из уравнений (3.6) два одночлена вида

$$r^{0\alpha}[a \sin(\mathbf{k}, \varphi) + b \cos(\mathbf{k}, \varphi)].$$

Здесь введены обозначения $(\mathbf{k}, \varphi) = k_1\varphi_1 + \ldots + k_n\varphi_n$, $r^\alpha = r_1^{0\alpha_1} r_2^{0\alpha_2} \ldots r_n^{0\alpha_n}$ ($\alpha_i \geqslant 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m/2$, $2\alpha_i$ — целые

числа). Соответствующие одночлены в функции S_m ищем в виде

$$r^{\alpha}[c \sin(\mathbf{k}, \varphi) + e \cos(\mathbf{k}, \varphi)].$$

Для функций c и e получаем систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dc}{dt} - (\mathbf{k}, \lambda) e = a(t), \quad \frac{de}{dt} + (\mathbf{k}, \lambda) c = b(t) \tag{3.8}$$

$$((\mathbf{k}, \lambda) = k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n), \quad c(0) = e(0) = 0.$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} c &= f(t) \cos(\mathbf{k}, \lambda) t + g(t) \sin(\mathbf{k}, \lambda) t, \\ e &= -f(t) \sin(\mathbf{k}, \lambda) t + g(t) \cos(\mathbf{k}, \lambda) t, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t [a(\tau) \cos(\mathbf{k}, \lambda) \tau - b(\tau) \sin(\mathbf{k}, \lambda) \tau] d\tau, \\ g(t) &= \int_0^t [a(\tau) \sin(\mathbf{k}, \lambda) \tau + b(\tau) \cos(\mathbf{k}, \lambda) \tau] d\tau. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Полагая теперь в (3.5) $t = 2\pi$, получаем производящую функцию точечного отображения T в окрестности неподвижной точки $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$.

§ 4. Нормализация точечного отображения в окрестности неподвижной точки

После получения точечного отображения встает более сложная и самая важная задача об исследовании свойств точечного отображения в окрестности неподвижной точки. Свойства точечного отображения удобнее всего исследовать, если выбрать такую систему координат, в которой это отображение имело бы наиболее простой вид. Эту простейшую форму точечного отображения будем называть его нормальной формой. Нормальная форма для случая отображения T плоскости в себя подробно изучена Дж. Д. Биркгофом [28, 105]. Общие результаты о нормальной форме дифференциальных уравнений и точечных отображений, задаваемых периодическими по t системами, изложены в работе А. Д. Брюно [11, 12].

Здесь получим нормальную форму точечного отображения, задаваемого канонической системой дифференциальных уравнений. Будем считать, что нормализация линейной части отображения не требуется. Это возможно, когда квадратичная часть функции

Гамильтона, соответствующей системе дифференциальных уравнений, имеет нормальную форму.

Итак, пусть с помощью процедуры, описанной в предыдущем параграфе, мы уже получили производящую функцию $S(\varphi_i, r_i^0)$ отображения T:

$$S = r_1^0(\varphi_1 - 2\pi\lambda_1) + \ldots + r_n^0(\varphi_n - 2\pi\lambda_n) + S_3(\varphi_i, r_i^0) + \ldots \tag{4.1}$$

Явный вид отображения T получается после разрешения относительно r_i, φ_i уравнений

$$r_i = \frac{\partial S}{\partial \varphi_i}, \quad \varphi_i^0 = \frac{\partial S}{\partial r_i^0}. \tag{4.2}$$

Проведя несложные выкладки, получим отсюда

$$\begin{aligned} r_i &= r_i^0 + \frac{\partial S_3}{\partial \varphi_i^0} + \frac{\partial S_4}{\partial \varphi_i^0} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S_3}{\partial \varphi_i^0 \partial \varphi_k^0} \frac{\partial S_3}{\partial r_k^0} + \ldots, \\ \varphi_i &= \varphi_i^0 + 2\pi\lambda_i - \frac{\partial S_3}{\partial r_i^0} - \frac{\partial S_4}{\partial r_i^0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S_3}{\partial r_i^0 \partial \varphi_k^0} \frac{\partial S_3}{\partial r_k^0} + \ldots, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $S_m = S_m(\varphi_i^0 + 2\pi\lambda_i, r_i^0)$.

Введем теперь новые переменные ρ_i, θ_i так, чтобы максимально упростить отображение (4.3). Новые переменные введем при помощи производящей функции

$$W = \rho_1\varphi_1 + \ldots + \rho_n\varphi_n + W_3(\rho_i, \varphi_i).$$

Эта производящая функция задает преобразование $r_i, \varphi_i \to \rho_i, \theta_i$. Переход от переменных r_i^0, φ_i^0 к переменным ρ_i^0, θ_i^0 производится при помощи той же производящей функции W, в которой надо только ρ_i, φ_i заменить на ρ_i^0, φ_i^0.

Из формул замены переменных

$$r_i = \frac{\partial W}{\partial \varphi_i}, \quad \theta_i = \frac{\partial W}{\partial \rho_i}$$

получаем

$$\begin{aligned} r_i &= \rho_i + \frac{\partial W_3(\rho_i, \theta_i)}{\partial \theta_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 W_3(\rho_i, \theta_i)}{\partial \theta_i \partial \theta_k} \frac{\partial W_3(\rho_i, \theta_i)}{\partial \rho_k} + \ldots, \\ \varphi_i &= \theta_i - \frac{\partial W_3(\rho_i, \theta_i)}{\partial \rho_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 W_3(\rho_i, \theta_i)}{\partial \rho_i \partial \theta_k} \frac{\partial W_3(\rho_i, \theta_i)}{\partial \rho_k} + \ldots \end{aligned} \tag{4.4}$$

Связь между r_i^0, φ_i^0 и ρ_i^0, θ_i^0 получается по тем же формулам (4.4), в которых надо всем переменным приписать верхний индекс нуль.

Попытаемся теперь так подобрать функцию W_3, чтобы в производящей функции $F(\rho_i^0, \theta_i)$ отображения $\rho_i, \theta_i \to \rho_i^0, \theta_i^0$ отсутствовали члены третьей степени относительно $\sqrt{\rho_i^0}$. Подставим выражения старых переменных r_i, φ_i и r_i^0, φ_i^0 через новые ρ_i, θ_i и ρ_i^0, θ_i^0 соответственно в формулы (4.2). Тогда

$$\begin{aligned}\rho_i &= \rho_i^0 + \frac{\partial W_3(\rho_i^0, \theta_i^0)}{\partial \theta_i^0} - \frac{\partial W_3(\rho_i, \theta_i)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial S_3(\theta_i, \rho_i^0)}{\partial \theta_i} + \ldots,\\ \theta_i^0 &= \theta_i - 2\pi\lambda_i - \frac{\partial W_3(\rho_i, \theta_i)}{\partial \rho_i} + \frac{\partial W_3(\rho_i^0, \theta_i^0)}{\partial \rho_i^0} + \frac{\partial S_3(\theta_i, \rho_i^0)}{\partial \rho_i^0} + \ldots\end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь в явном виде выписаны только первые нелинейности по $\sqrt{\rho_i}$ и $\sqrt{\rho_i^0}$. Из формул (4.5) получим

$$\rho_i = \rho_i^0 + \frac{\partial}{\partial\theta}[W_3(\rho_i^0, \theta_i - 2\pi\lambda_i) - W_3(\rho_i^0, \theta_i) + S_3(\theta_i, \rho_i^0)] + \ldots, \tag{4.6}$$

$$\theta_i^0 = \theta_i - 2\pi\lambda_i + \frac{\partial}{\partial\rho_i^0}[W_3(\rho_i^0, \theta_i - 2\pi\lambda_i) - W_3(\rho_i^0, \theta_i) + S_3(\theta_i, \rho_i^0)] + \ldots$$

Таким образом, члены третьей степени в новой производящей функции

$$\begin{aligned}F(\rho_i^0, \theta_i) = \rho_1^0(\theta_1 - 2\pi\lambda_1) + \ldots + \rho_n^0(\theta_n - 2\pi\lambda_n) +\\ + F_3(\rho_i^0, \theta_i) + F_4(\rho_i^0, \theta_i) + \ldots\end{aligned} \tag{4.7}$$

имеют вид

$$F_3 = W_3(\rho_i^0, \theta_i - 2\pi\lambda_i) - W_3(\rho_i^0, \theta_i) + S_3(\theta_i, \rho_i^0). \tag{4.8}$$

Покажем, как надо выбрать W_3, чтобы функция F_3 обратилась в нуль. Возьмем в S_3 два таких одночлена:

$$\rho^{0\alpha}[\sigma \sin(\mathbf{k}, \theta) + \beta \cos(\mathbf{k}, \theta)]. \tag{4.9}$$

Здесь $\rho^{0\alpha} = \rho_1^{0\alpha_1}\rho_2^{0\alpha_2}\ldots\rho_n^{0\alpha_n}$, $2\alpha_i$ — целое неотрицательное число, $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 3$, σ и β — некоторые числа, одновременно не равные нулю, через $(\mathbf{k}, \theta)$ обозначена величина $k_1\theta_1 + k_2\theta_2 + \ldots + k_n\theta_n$, где $|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_3| = 3$ или 1.

Соответствующие одночлены в W_3 возьмем в виде

$$\rho^{0\alpha}[\gamma \sin(\mathbf{k}, \theta) + \delta \cos(\mathbf{k}, \theta)] \tag{4.10}$$

и подберем коэффициенты γ и δ так, чтобы подобные им одночлены в F_3 отсутствовали. Подставляя (4.9), (4.10) в (4.8), получаем, что для этого γ и δ должны удовлетворять такой системе линейных

алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\gamma\,[1 - \cos 2\pi\,(\mathbf{k}, \lambda)] - \delta \sin 2\pi\,(\mathbf{k}, \lambda) = \sigma, \\ &\gamma \sin 2\pi\,(\mathbf{k}, \lambda) + \delta\,[1 - \cos 2\pi\,(\mathbf{k}, \lambda)] = \beta. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Определитель этой системы равен $4 \sin^2 \pi\,(\mathbf{k}, \lambda)$. Поэтому, если $(\mathbf{k}, \lambda)$ не будет целым числом при $|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n| \leqslant 3$, то F_3 можно полностью уничтожить. При этом коэффициенты γ и δ получаются такими:

$$\gamma = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\pi\,(\mathbf{k}, \lambda)\,\beta, \quad \delta = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\pi\,(\mathbf{k}, \lambda)\,\sigma + \frac{1}{2}\beta. \tag{4.12}$$

Проведя некоторые достаточно громоздкие выкладки, получим, что при таком выборе W_3 члены четвертой степени в производящей функции F отображения $\rho_i, \theta_i \to \rho_i^0, \theta_i^0$ вычисляются по формуле

$$F_4 = S_4(\theta_i, \rho_i^0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_3(\rho_i^0, \theta_i - 2\pi\lambda_i)}{\partial \theta_k} \frac{\partial S_3(\theta_i, \rho_i^0)}{\partial \rho_k^0}. \tag{4.13}$$

Если же число $(\mathbf{k}, \lambda)$ будет целым, то система уравнений (4.11) в общем случае решения не имеет и, следовательно, соответствующие одночлены в функции F_3 уничтожить нельзя.

Проведя аналогичные построения, можно упростить члены четвертой, пятой и т. д. степеней в производящей функции отображения. В нормальной форме отображения T производящая функция будет содержать угловые переменные в виде таких комбинаций $(\mathbf{k}, \theta)$, для которых $(\mathbf{k}, \lambda)$ — целое число. Если нормализация проведена до членов конечного порядка, то нормализующее преобразование $r_i, \varphi_i \to \rho_i, \theta_i$ будет аналитическим относительно $\sqrt{\rho_i}$.

§ 5. Получение функции Гамильтона по отображению

В предыдущем параграфе показано, как по функции Гамильтона построить точечное отображение. В этом параграфе кратко рассмотрим обратную задачу, как по отображению T построить соответствующую функцию Гамильтона динамической системы. Очевидно, что обратная задача не имеет однозначного решения.

Производящая функция отображения связана с функцией Гамильтона посредством системы дифференциальных уравнений (3.6). Пусть отображение T и функция Гамильтона H в их линейной части по r_i имеют нормальную форму. Покажем, как найти $H_3(\varphi_i, r_i, t)$, если известна функция $S_3(\varphi_i, r_i^0, 2\pi)$.

Возьмем в функции S_3 два одночлена вида

$$r^{0\alpha}[c_m \sin(\mathbf{k}, \varphi) + e_m \cos(\mathbf{k}, \varphi)],$$

где c_m и e_m — константы. Соответствующие одночлены в функции H_3 будем искать в виде

$$-r^{\alpha}[a_m(t)\sin(\mathbf{k},\varphi)+b_m(t)\cos(\mathbf{k},\varphi)]. \tag{5.1}$$

Функции $a_m(t)$ и $b_m(t)$ ищем 2π-периодическими по t. Согласно (3.9) и (3.10), они должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} c_m &= f(2\pi)\cos 2\pi(\mathbf{k},\lambda)+g(2\pi)\sin 2\pi(\mathbf{k},\lambda),\\ e_m &= -f(2\pi)\sin 2\pi(\mathbf{k},\lambda)+g(2\pi)\cos 2\pi(\mathbf{k},\lambda), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где

$$\begin{aligned} f(2\pi) &= \int_0^{2\pi}[a_m(t)\cos(\mathbf{k},\lambda)t - b_m(t)\sin(\mathbf{k},\lambda)t]\,dt,\\ g(2\pi) &= \int_0^{2\pi}[a_m(t)\sin(\mathbf{k},\lambda)t + b_m(t)\cos(\mathbf{k},\lambda)t]\,dt. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Функции $a_m(t)$ и $b_m(t)$ определяются из (5.2) и (5.3) неоднозначно. Если $(\mathbf{k},\lambda)$ не будет целым числом, то их можно считать не зависящими от t. Из (5.2) и (5.3) в этом случае для них получаем выражения

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{(\mathbf{k},\lambda)}{2}[c_m\operatorname{ctg}\pi(\mathbf{k},\lambda)-e_m],\\ b_m &= \frac{(\mathbf{k},\lambda)}{2}[c_m+e_m\operatorname{ctg}\pi(\mathbf{k},\lambda)]. \end{aligned}$$

Соответствующие одночлены (5.1) в H_3 будут в этом случае такими:

$$-r^{\alpha}\frac{(\mathbf{k},\lambda)}{2\sin\pi(\mathbf{k},\lambda)}\{c_m\sin[\pi(\mathbf{k},\varphi)+\pi(\mathbf{k},\lambda)]+ \\ +e_m\cos[\pi(\mathbf{k},\varphi)+\pi(\mathbf{k},\lambda)]\}.$$

Если же число $(\mathbf{k},\lambda)$ будет целым, то функции $a_m(t)$ и $b_m(t)$ постоянными получить нельзя. Пусть $(\mathbf{k},\lambda)=N$. Тогда прибавление к функциям $a_m(t)$ и $b_m(t)$ гармоник вида $\sin pt$ и $\cos pt$ $(p\neq\pm N)$ не нарушает равенств (5.3). Будем поэтому искать функции $a_m(t)$ и $b_m(t)$ в таком виде, когда они не содержат гармоник $\sin pt$, $\cos pt$ для $p\neq\pm N$. Положим

$$a_m(t)=a_1\sin Nt+b_1\cos Nt,\quad b_m(t)=a_2\sin Nt+b_2\cos Nt.$$

Для чисел a_i, b_i из (5.2) и (5.3) получаем соотношения

$$\pi(b_1-a_2)=c_m,\quad \pi(a_1+b_2)=e_m.$$

Здесь опять проявляется неоднозначность определения $a_m(t)$ и $b_m(t)$. Используем эту неоднозначность для того, чтобы получить искомые одночлены в H_3 в нормальной форме, т. е. чтобы она содержала синусы и косинусы только с аргументами вида

$\mathbf{k}, \varphi) - Nt$. В этом случае следует, очевидно, положить

$$a_1 = b_2 = \frac{e_m}{2\pi}, \qquad a_2 = -b_1 = -\frac{c_m}{2\pi}.$$

Входящие в H_3 одночлены будут иметь вид

$$-\frac{1}{2\pi}\{c_m \sin[(\mathbf{k}, \varphi) - Nt] + e_m \cos[(\mathbf{k}, \varphi) - Nt]\} r^{\alpha}. \qquad (5.4)$$

После того как функция H_3 найдена, можно из уравнений (3.6) найти $S_3(\varphi_i, r_i^0, t)$. Потом можно найти H_4, S_4, H_5 и т. д.

Проведенные рассмотрения приводят к следующему, основанному на применении точечных отображений способу нормализации 2π-периодических по t гамильтоновых систем. Решив уравнения (3.6), находим производящую функцию S точечного отображения T. Затем вводим новые координаты, в которых функция S имеет нормальную форму. Последний шаг — получение по нормализованной производящей функции нормальной формы функции Гамильтона.

Основные преимущества предлагаемого способа нормализации функции Гамильтона перед классическим способом Биркгофа, по-видимому, следующие:

1) Отпадает необходимость находить периодические решения систем дифференциальных уравнений, определяющих производящую функцию преобразования Биркгофа. Это приводит, в частности, к значительному уменьшению необходимых вычислений.

2) Исследование неавтономной нелинейной системы дифференциальных уравнений сводится к исследованию алгебраических свойств производящей функции отображения.

§ 6. Об устойчивости неподвижных точек отображения в случае резонанса

В этом параграфе рассмотрим задачу об устойчивости неподвижных точек точечного отображения, задаваемого гамильтоновыми дифференциальными уравнениями. Будут рассмотрены случаи, когда величины λ_i связаны резонансными соотношениями третьего и четвертого порядков. Будут доказаны два утверждения о неустойчивости. Их доказательство основано на приведении точечного отображения в окрестности неподвижной точки (которую считаем совпадающей с началом координат) к нормальной форме с последующим применением теоремы § 2 о неустойчивости неподвижной точки отображения. По аналогичной схеме исследована устойчивость положений равновесия гамильтоновой системы с одной и двумя степенями свободы в работах автора [53, 55, 60] и автономной гамильтоновой системы с произвольным числом степеней свободы в работе Хазина [92]. Теоремы о неустойчивости, полу-

ченные ниже, применимы как к случаю автономной, так и к случаю неавтономной гамильтоновой системы и содержат в себе, как частные выводы, утверждения упомянутых работ [53, 55, 60, 92] о неустойчивости.

Рассмотрим сначала резонанс третьего порядка. Пусть в производящей функции (4.1) величины λ_i таковы, что для целых неотрицательных чисел k_i, сумма которых равна трем, число $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n$ будет целым, равным N. При этом считаем, что других резонансных соотношений третьего порядка нет. Предположим также, что уже проведена нормализация производящей функции до членов третьего порядка. Тогда, согласно § 4, производящую функцию отображения T можно записать в виде

$$S = r_1^0(\varphi_1 - 2\pi\lambda_1) + \ldots + r_n^0(\varphi_n - 2\pi\lambda_n) + a \sin[(\mathbf{k}, \varphi) + b]\, r^{0\alpha} + O(r^2). \quad (6.1)$$

В (49) $r^{0\alpha} = r_1^{0\alpha_1} r_2^{0\alpha_2} \ldots r_n^{0\alpha_n}$; $2\alpha_i = k_i$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 3/2$; $O(r^2)$ — величина порядка $r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2$, a и b — некоторые числа, причем ясно, что можно считать $a > 0$; $(\mathbf{k}, \varphi) = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \ldots + k_n\varphi_n$.

Теорема. *Если $a \neq 0$, то неподвижная точка $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ неустойчива.*

Для доказательства выпишем сначала точечное отображение в явном виде. Из (6.1) получаем

$$\begin{aligned} r_i &= r_i^0 + ak_i r^{0\alpha} \cos[(\mathbf{k}, \varphi^0) + b] + O(r^{0^2}), \\ \varphi_i &= \varphi_i^0 + 2\pi\lambda_i - a\alpha_i \frac{r^{0\alpha}}{r_i^0} \sin[(\mathbf{k}, \varphi^0) + b] + O(r^0). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Прежде чем приводить строгое доказательство, проведем анализ приближенного отображения, оставив в (6.2) только главные члены по r_i^0. Такое укороченное отображение имеет, как легко проверить, инвариантные множества

$$J_j = k_1 r_j - k_j r_1 = \text{const} \quad (j = 2, 3, \ldots, n). \quad (6.3)$$

Если точка M лежит на поверхности (6.3), то и $T^m M$ тоже будет лежать на этой поверхности для всех m. Возьмем начальную точку M такой, чтобы она принадлежала пересечению поверхностей

$$k_1 r_j - k_j r_1 = 0. \quad (6.4)$$

Тогда для укороченного отображения получим

$$\begin{aligned} r_i &= r_i^0 + ak_i k^\alpha k_1^{-3/2} r_1^{0\,3/2} \cos[(\mathbf{k}, \varphi^0) + b], \\ (\mathbf{k}, \varphi) &= (\mathbf{k}, \varphi^0) + 2\pi N - a\frac{3}{2} k^\alpha k_1^{-1/2} r_1^{0\,1/2} \sin[(\mathbf{k}, \varphi^0) + b]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь $k^\alpha = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \ldots k_n^{\alpha_n}$. Отметим, что мы считаем $k_1 \neq 0$, т. е. что величина λ_1 входит в резонансное соотношение. Это, разумеется, не ограничивает общности рассмотрения.

Из (6.5) видно, что если $(\mathbf{k}, \varphi^0) + b = 0$, то после m-кратного применения отображения T получим

$$(\mathbf{k}, \varphi) = (\mathbf{k}, \varphi^0) + 2\pi m N,$$

а величина r_i неограниченно возрастает.

После этого предварительного анализа уже несложно провести строгое доказательство теоремы. Для доказательства неустойчивости построим функцию V, удовлетворяющую условиям теоремы § 2 о неустойчивости. И будем ее строить так, чтобы область $V > 0$ была узкой областью, содержащей внутри себя пересечение поверхностей (6.4). Именно такая идея построения функции Четаева V была использована в работах автора [53, 55, 60], а затем Хазиным в работе [92].

Функцию V возьмем в виде

$$V = r_1 \prod_{j=2}^{n} (r_1^3 - J_j^2) \cos [(\mathbf{k}, \varphi) + b]. \tag{6.6}$$

За область $V > 0$ берем область

$$\left\{ -\frac{\pi}{2} < (\mathbf{k}, \varphi) + \beta < \frac{\pi}{2},\ r_j = \frac{k_j}{k_1} r_1 + \eta_j r_1^{3/2},\ |\eta_j| \leqslant 1 \right\}.$$

Получим теперь разность $V(r_i, \varphi_i) - V(r_i^0, \varphi_i^0)$. Для этого надо $V(r_i, \varphi_i)$ выразить через r_i^0, φ_i^0 согласно формулам отображения (6.2), причем для упрощения выкладок это следует делать сразу для области $V > 0$.

В области $V > 0$ отображение (6.2) дает соотношения (6.5). Только в первом из этих равенств надо добавить величину порядка r^{0^2}, а во втором — порядка r^0. Поэтому в области $V > 0$ получаем такие оценки:

$$\prod_{j=2}^{n} (r_1^3 - J_j^2) = \prod_{j=2}^{n} (1 - \eta_j^2) \{ r_1^{0^{3n-3}} [1 + a(3n-3) k_1^{-1/2} k^\alpha r_1^{0^{1/2}}] + O(r_1^{0^{3n-2}}) \},$$

$$\cos [(\mathbf{k}, \varphi) + b] = \cos \Phi + \frac{3}{2} a k^\alpha k_1^{-1/2} r_1^{0^{1/2}} \sin^2 \Phi + O(r_1^0).$$

Здесь введено обозначение $\Phi = (\mathbf{k}, \varphi^0) + b$.

Теперь для разности $V(r_i, \varphi_i) - V(r_i^0, \varphi_i^0)$ в области $V > 0$ получаем такое выражение:

$$V(r_i, \varphi_i) - V(r_i^0, \varphi_i^0) = \prod_{j=2}^{n} (1 - \eta_j^2) \left\{ a k_1^{-1/2} k^\alpha r_1^{0^{3n-3/2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + (3n-3) \cos \Phi + \frac{1}{2} \sin^2 \Phi \right] + O(r_1^{0^{3n-1}}) \right\}. \tag{6.7}$$

Величина, стоящая в фигурных скобках выражения (6.7), в области $V > 0$ будет больше единицы. Поэтому при достаточно малых r_i в области $V > 0$ разность $V(r_i, \varphi_i) - V(r_i^0, \varphi_i^0)$ положительна. Следовательно, неподвижная точка $r_1^0 = r_2^0 = \ldots = r_n^0 = 0$ неустойчива.

Рассмотрим теперь резонанс четвертого порядка. Пусть λ_i удовлетворяют резонансному соотношению $k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n = N$ для целых $k_i \geqslant 0$, сумма которых равна четырем. И пусть нет других резонансов третьего и четвертого порядков.

Производящая функция нормализованного до членов четвертого порядка по $\sqrt{r_i^0}$ отображения имеет вид

$$S = r_1^{(0)}(\varphi_1 - 2\pi\lambda_1) + \ldots + r_n^{(0)}(\varphi_n - 2\pi\lambda_n) + F(r_i^0) + G(r_i^0, \varphi_i) + O(r_i^{0^{5/2}}).$$

Здесь

$$F(r_i^0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} r_i^{(0)} r_j^{(0)}, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

$$G(r_i^0, \varphi_i) = ar^{(0)} \sin [(\mathbf{k}, \varphi) + b], \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 2,$$

величины a_{ij}, a, b — некоторые числа.

Явный вид отображения T такой:

$$r_j = r_j^0 + ak_j r^{0^\alpha} \cos \Phi + O(r_i^{0^{5/2}}),$$

$$\varphi_j = \varphi_j^0 + 2\pi\lambda_j - 2\sum_{i=1}^{n} a_{ji} r_i^0 - a\alpha_j \frac{r^{0^\alpha}}{r_j^0} \sin \Phi + O(r_i^{0^{3/2}}). \qquad (6.8)$$

Теорема. *Если выполняется неравенство*

$$|\, ak^\alpha \,| > |\, F(k_i) \,|, \qquad (6.9)$$

то неподвижная точка $r_1^{(0)} = r_2^{(0)} = \ldots = r_n^{(0)} = 0$ *точечного отображения* (6.8) *неустойчива.*

Для доказательства функцию V и область $V > 0$ берем такими же, как и при резонансе третьего порядка. В области $V > 0$ получаем такие оценки:

$$r_1 = r_1^0 + ak^\alpha k_1^{-1} r_1^{0^2} \cos \Phi + O(r_1^{0^{5/2}}),$$

$$r^{0^\alpha} = k_1^{-2} k^\alpha r_1^{0^2} + O(r_1^{0^{5/2}}),$$

$$\prod_{j=2}^{n} (r_1^3 - J_j^2) = \prod_{j=2}^{n} (1 - \eta_j^2) r_1^{0^{3n-3}} [1 + a(3n-3) k^\alpha k_1^{-1} r_1^0 \cos \Phi + O(r_1^{0^{3/2}})],$$

$$\varphi_i = \varphi_i^0 + 2\pi\lambda_i - \frac{2}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j r_1^0 - a \frac{\alpha_i}{k_i} k_1^{-1} k^\alpha r_1^0 \sin \Phi + O(r_1^{0^{3/2}}),$$

$$(\mathbf{k}, \boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{k}, \boldsymbol{\varphi}^0) + 2\pi N - \frac{2}{k_1}[F(k_i) + ak^\alpha \sin\Phi] r_1^0 + O(r_1^{0^{3/2}}),$$

$$\cos[(\mathbf{k}, \boldsymbol{\varphi}) + b] = \cos\Phi + \frac{2r_1^0}{k_1}[F(k_i) + ak^\alpha \sin\Phi]\sin\Phi + O(r_1^{0^{3/2}}).$$

Используя эти оценки, получаем в области $V > 0$ такое выражение для разности $V(r_i, \varphi_i) - V(r_i^0, \varphi_i^0)$:

$$V(r_i, \varphi_i) - V(r_i^0, \varphi_i^0) = \prod_{j=2}^{n}(1 - \eta_j^2) k_1^{-1} r_1^{0^{3n-1}} \times$$

$$\times [ak^\alpha \sin^2\Phi + 2F(k_i)\sin\Phi + ak^\alpha + 3a(n-1)k^\alpha \cos^2\Phi + O(r_1^{0^{1/2}})]. \tag{6.10}$$

Четвертое слагаемое в квадратных скобках неотрицательно в области $V > 0$. Сумма же первых трех слагаемых строго положительна, если выполняется условие (6.9). В самом деле, эту сумму можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно $\sin\Phi$. Дискриминант трехчлена

$$D = 4[F^2(k_i) - a^2 k^{2\alpha}]$$

и отрицателен, если справедливо неравенство (6.9).

Следовательно, в области $V > 0$ разность $V(r_i, \varphi_i) - V(r_i^0, \varphi_i^0)$ положительна и, согласно § 2, неподвижная точка $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ неустойчива.

ГЛАВА 7

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Функция Гамильтона задачи трех тел

Рассмотрим три материальных тела (точки), взаимно притягивающиеся по закону Ньютона. Как и в главе 1, будем интересоваться частным случаем задачи трех тел — случаем ограниченной задачи.

В главе 1 получены пять точек либрации L_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$) ограниченной задачи трех тел и в случае круговой задачи исследована их устойчивость в первом линейном приближении. Показано, что прямолинейные точки либрации L_1, L_2 и L_3 неустойчивы в линейном приближении, так как соответствующие им характеристические уравнения имеют корни с положительными вещественными частями. Отсюда следует неустойчивость точек либрации L_1, L_2 и L_3 и в строгой нелинейной постановке. Треугольные точки либрации L_4 и L_5 в линейном приближении устойчивы только при достаточно малом отношении масс основных притягивающих тел S и J; более точно, при выполнении неравенств (3.1) главы 1.

В этой и последующих главах излагается решение задачи об устойчивости треугольных точек либрации в следующих случаях ограниченной задачи трех тел: 1) плоском круговом, 2) пространственном круговом, 3) плоском эллиптическом, 4) пространственном эллиптическом.

Получим выражение для функции Гамильтона задачи трех тел. Движение будем рассматривать в координатах Нехвила ξ, η, ζ с истинной аномалией ν кеплеровского движения тел S и J в качестве независимой переменной. Единицы измерения выберем такими, чтобы сумма масс тел S и J, расстояние между ними и постоянная тяготения равнялись единице. Уравнения движения запишутся в виде соотношений (1.10) главы 1. Эти уравнения могут быть записаны как уравнения Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа L вида

$$L = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + (\eta'\xi - \eta\xi') + \frac{1}{1 + e\cos\nu}\Omega. \qquad (1.1)$$

Штрих в (1.1) означает дифференцирование по ν. Введя обобщенные импульсы

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \xi'} = \xi' - \eta, \quad p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \eta'} = \eta' + \xi, \quad p_\zeta = \frac{\partial L}{\partial \zeta'} = \zeta' \qquad (1.2)$$

и проведя затем несложные выкладки, получим такое выражение для функции Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi\eta - p_\eta\xi + \\ + \frac{e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - \frac{1}{1+e\cos\nu}W. \qquad (1.3)$$

§ 2. Краткая предыстория решения задачи об устойчивости лагранжевых решений

Легко проверить, что уравнения движения с гамильтонианом (1.3) допускают такое частное решение:

$$\xi_0 = \frac{1-2\mu}{2}, \quad \eta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta_0 = 0, \\ p_{\xi_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{\eta_0} = \frac{1-2\mu}{2}, \quad p_{\zeta_0} = 0. \qquad (2.1)$$

Это частное решение соответствует периодическому движению Лагранжа (точке либрации) задачи трех тел. Для решения (2.1), в случае эллиптической задачи, три тела во все время движения образуют в абсолютном пространстве равносторонний треугольник, длины сторон которого периодически изменяются. В случае круговой задачи длины сторон треугольника постоянны. Решение (2.1) обозначается через L_4. Симметричная относительно оси $O\xi$ треугольная точка либрации обозначается через L_5.

Задача об устойчивости треугольных точек либрации L_4 и L_5, в противоположность задаче об устойчивости прямолинейных точек L_1, L_2 и L_3, оказалась чрезвычайно сложной. К настоящему времени полный завершающий ответ на вопрос об устойчивости по Ляпунову треугольных точек либрации получен не во всех случаях. Полное решение вопроса достигнуто только в плоской круговой задаче. Но в плоской эллиптической задаче, в пространственной круговой и пространственной эллиптической задачах достигнуто значительное продвижение, так что практически и здесь задача об устойчивости очень близка к полному завершению. Изложению и обсуждению всех этих результатов посвящены настоящая и последующие три главы книги. Но сначала изложим очень краткую предысторию решения задачи об устойчивости треугольных точек либрации.

Необходимое условие устойчивости треугольных точек либрации круговой задачи трех тел

$$0 < 27\mu(1-\mu) < 1 \qquad \left(0 < \mu < \mu^* = \frac{9-\sqrt{69}}{18} = 0{,}0385208\right) \qquad (2.2)$$

упоминается, по-видимому, впервые в 1843 году в работе Гашо [134].

В 1875 году Раусс [169] решил (в линейном приближении) задачу об устойчивости треугольных точек либрации для неограниченной задачи трех тел (когда масса тела P не бесконечна мала, а равна некоторой конечной величине, так что тело P уже само влияет на движение двух других тел S и J) и для произвольного закона притяжения. Рассмотрев плоскую задачу и предположив, что притяжение тел пропорционально произведению их масс и обратно пропорционально n-й степени расстояния между телами, Раусс показал, что при $n > 3$ точки либрации неустойчивы. Если же $n < 3$, то имеет место устойчивость при выполнении неравенства

$$\frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{m_0m_1 + m_0m_2 + m_1m_2} > 3\left(\frac{1+n}{3-n}\right)^2. \tag{2.3}$$

Здесь m_0, m_1 и m_2 — массы тел P, S и J соответственно. Для случая ограниченной задачи ($m_0 = 0$) при ньютоновском притяжении ($n = 2$) неравенство (2.3) переходит в условие устойчивости (2.2). В 1889 году А. М. Ляпунов рассмотрел задачу об устойчивости в линейном приближении треугольных точек либрации для случая неограниченной пространственной задачи трех тел при притяжении тел, обратно пропорциональном n-й степени расстояния между ними. Стороны треугольника, образованного тремя телами в невозмущенном движении, А. М. Ляпунов не считает постоянными, а они могут периодически изменяться. Результаты исследования А. М. Ляпунова опубликованы в его замечательной работе [48]. Результаты, полученные Рауссом, следуют из результатов Ляпунова как частный случай. В недавних работах А. Л. Куницына [34, 147] дана интересная геометрическая интерпретация условия устойчивости (2.3) в линейном приближении и сделана попытка получения некоторых строгих выводов об устойчивости в нелинейной задаче.

Исследования А. М. Ляпунова по устойчивости в линейном приближении точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел были продолжены в работах [19, 42, 99, 103, 104, 110, 136, 144, 152, 153, 160, 161]. На результатах этих работ мы подробнее остановимся в главе 9.

Важный шаг в задаче об устойчивости точек либрации (в плоской ограниченной круговой задаче) был сделан в 1959 году Литлвудом [152, 153]. Он показал, что при начальном возмущении порядка ε отклонение тела P от вершины треугольника будет иметь тот же порядок в течение интервала времени, равного $\exp\left(A\varepsilon^{-1/2}\,|\log\varepsilon|^{-3/4}\right)$, где величина A зависит только от μ.

Начало полному строгому решению задачи об устойчивости треугольных точек либрации ограниченной задачи трех тел было положено в 1962 году в работе А. М. Леонтовича [37], в которой для случая плоской круговой задачи показано, что устойчивость точек либрации имеет место при всех μ, удовлетворяющих необхо-

димому условию устойчивости в линейном приближении (2.2), кроме, быть может, множества значений μ, имеющего нулевую меру. В 1967 году Депри показали [111], что это исключительное множество состоит всего из трех значений μ.

В недавнее время задача об устойчивости треугольных точек либрации подробно была рассмотрена в цикле работ автора [56, 58, 59, 62—67]. К ним примыкает также совсем недавняя работа А. Г. Сокольского [88]. Все полученные результаты будут подробно изложены ниже. В этой главе проведем исследование треугольных точек либрации в плоской круговой задаче трех тел.

§ 3. Гамильтониан возмущенного движения

Сначала получим выражение для функции Гамильтона, описывающей движение в окрестности лагранжевой точки либрации L_4. Сделаем замену переменных

$$\xi = \xi_0 + q_1, \quad \eta = \eta_0 + q_2, \quad \zeta = \zeta_0 + q_3,$$
$$p_\xi = p_{\xi 0} + p_1, \quad p_\eta = p_{\eta 0} + p_2, \quad p_\zeta = p_{\zeta 0} + p_3.$$

Решение (2.1) в новых переменных будет положением равновесия $q_i = p_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Разлагая функцию Гамильтона (1.3) в ряд по степеням q_i, p_i, получаем

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{3.1}$$

Здесь отброшены члены, не зависящие от q_i, p_i, а через H_m обозначена форма степени m относительно q_i, p_i. Первые шесть форм H_m получаются такими:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_1 q_2 - q_1 p_2 + \frac{1}{2} q_3^2 +$$
$$+ \frac{e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{8(1+e\cos\nu)}(q_1^2 - 8kq_1q_2 - 5q_2^2), \tag{3.2}$$

$$H_3 = \frac{1}{1+e\cos\nu}\left(-\frac{7\sqrt{3}k}{36} q_1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{16} q_1^2 q_2 + \frac{11\sqrt{3}k}{12} q_1 q_2^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{3\sqrt{3}}{16} q_2^3 - \frac{\sqrt{3}k}{3} q_1 q_3^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} q_2 q_3^2\right), \tag{3.3}$$

$$H_4 = \frac{1}{1+e\cos\nu}\left(\frac{37}{128} q_1^4 + \frac{25k}{24} q_1^3 q_2 - \frac{123}{64} q_1^2 q_2^2 - \frac{15k}{8} q_1 q_2^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{128} q_2^4 + \frac{3}{16} q_1^2 q_3^2 + \frac{33}{16} q_2^2 q_3^2 + \frac{5k}{2} q_1 q_2 q_3^2 - \frac{3}{8} q_3^4\right), \tag{3.4}$$

$$H_5 = \frac{1}{1+e\cos\nu}\left(\frac{23\sqrt{3}k}{576} q_1^5 - \frac{285\sqrt{3}}{256} q_1^4 q_2 - \frac{215\sqrt{3}k}{288} q_1^3 q_2^2 + \right.$$
$$+ \frac{345\sqrt{3}}{128} q_1^2 q_2^3 + \frac{555\sqrt{3}k}{576} q_1 q_2^4 - \frac{33\sqrt{3}}{256} q_2^5 + \frac{25\sqrt{3}k}{72} q_1^3 q_3^2 - \frac{45\sqrt{3}}{32} q_1^2 q_2 q_3^2 -$$
$$\left. - \frac{85\sqrt{3}k}{24} q_1 q_2^2 q_3^2 - \frac{45\sqrt{3}}{32} q_2^3 q_3^2 + \frac{5\sqrt{3}k}{12} q_1 q_3^4 + \frac{15\sqrt{3}}{16} q_2 q_3^4\right), \tag{3.5}$$

$$H_6 = \frac{1}{1+e\cos v}\left(-\frac{331}{1024}q_1^6 + \frac{49k}{128}q_1^5q_2 + \frac{6105}{1024}q_1^4q_2^2 - \right.$$
$$- \frac{35k}{64}q_1^3q_2^3 - \frac{7965}{1024}q_1^2q_2^4 - \frac{119k}{128}q_1q_2^5 + \frac{383}{1024}q_2^6 - \frac{285}{256}q_1^4q_3^2 -$$
$$- \frac{35k}{16}q_1^3q_2q_3^2 + \frac{1395}{128}q_1^2q_2^2q_3^2 + \frac{175k}{16}q_1q_2^3q_3^2 + \frac{555}{256}q_2^4q_3^2 -$$
$$\left. - \frac{45}{64}q_1^2q_3^4 - \frac{35k}{8}q_1q_2q_3^4 - \frac{255}{64}q_2^2q_3^4 + \frac{5}{16}q_3^6\right). \qquad (3.6)$$

В выражениях (3.2) — (3.6) для краткости введено обозначение

$$k = \frac{3\sqrt{3}\,(1-2\mu)}{4}.$$

§ 4. Решение задачи об устойчивости точек либрации для значений параметра μ из области устойчивости в первом приближении

Рассмотрим случай плоской круговой задачи трех тел. Гамильтониан возмущенного движения записывается в виде разложения (3.1), в котором надо положить $e = 0$, $q_3 = p_3 = 0$. Таким образом, получаем динамическую систему с двумя степенями свободы, гамильтониан которой не содержит явно времени. Пусть значение параметра μ удовлетворяет условию (2.2) устойчивости треугольных точек либрации в первом приближении. При строгом исследовании устойчивости будем применять результаты теории автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (см. главу 4) и докажем следующее утверждение [56].

Теорема. *В области устойчивости в линейном приближении* (2.2) *треугольные точки либрации плоской круговой ограниченной задачи трех тел устойчивы по Ляпунову при всех значениях* μ, *кроме двух значений*

$$\mu_1 = \frac{45-\sqrt{1833}}{90} = 0{,}0242938\ldots, \quad \mu_2 = \frac{15-\sqrt{213}}{30} =$$
$$= 0{,}0135160\ldots, \qquad (4.1)$$

при которых имеет место неустойчивость.

Для доказательства необходимо получить нормальную форму гамильтониана (3.1) и по свойствам нормальной формы сделать выводы об устойчивости и неустойчивости. Прежде всего надо провести нормализацию гамильтониана H_2, соответствующего линейной системе. Согласно главе 2, задача линейной нормализации сводится к некоторым несложным алгебраическим операциям над коэффициентами гамильтониана H_2. После их проведения получаем

линейное каноническое нормализующее преобразование в таком виде:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 q_1' + a_2 q_2', \\ q_2 &= a_1 c_1 q_1' + a_2 c_2 q_2' + a_1 b_1 p_1' - a_2 b_2 p_2', \\ p_1 &= -a_1 c_1 q_1' - a_2 c_2 q_2 + a_1 (1 - b_1) p_1' - a_2 (1 - b_2) p_2', \\ p_2 &= a_1 (1 - b_1 \omega_1^2) q_1' + a_2 (1 - b_2 \omega_2^2) q_2' + a_1 c_1 p_1' - a_2 c_2 p_2'. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В (4.2) введены следующие обозначения:

$$a_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\omega_i^2 + 9}{|2\omega_i^2 - 1|}}, \quad b_i = \frac{8}{4\omega_i^2 + 9}, \quad c_i = -\frac{4k}{4\omega_i^2 + 9}.$$

Частоты ω_i ($\omega_1 > \omega_2 > 0$) удовлетворяют уравнению

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{4} \mu (1 - \mu) = 0. \tag{4.3}$$

Если теперь еще ввести канонические переменные r_i, φ_i по формулам

$$q_i' = \sqrt{\frac{2r_i}{\omega_i}} \sin \varphi_i, \quad p_i' = \sqrt{2 r_i \omega_i} \cos \varphi_i, \tag{4.4}$$

то гамильтониан H_2 запишется в виде

$$H_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2. \tag{4.5}$$

Следует отметить, что линейное нормализующее преобразование определяется функцией H_2 неоднозначно. В работе [106], например, преобразование, аналогичное (4.2), найдено в другой форме.

Дальнейшую (нелинейную) нормализацию можно проводить различными способами, например, при помощи классического преобразования Биркгофа или способом, разработанным в работе [112], или каким-либо другим путем.

Нормальная форма будет различной в зависимости от того, есть резонансные соотношения между ω_1 и ω_2 или нет. В области (2.2) устойчивости линейной задачи условие отсутствия резонансов до четвертого порядка включительно

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \neq 0 \quad (0 < |n_1| + |n_2| \leqslant 4)$$

нарушается в двух случаях: при $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$. При $\mu = \mu_1$ имеет место резонанс третьего порядка

$$\omega_1 = 2\omega_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

а при $\mu = \mu_2$ — резонанс четвертого порядка

$$\omega_1 = 3\omega_2 = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Рассмотрим сначала нерезонансный случай, т. е. предположим, что $\mu \neq \mu_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда нормализованная до членов четвертого порядка функция Гамильтона будет иметь такой вид:

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}).$$

Коэффициенты c_{ij} получены Депри в статье [111]. Они имеют вид

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{\omega_2^2 (124\omega_1^4 - 696\omega_1^2 + 81)}{144 (1 - 2\omega_1^2)^2 (1 - 5\omega_1^2)}, \\ c_{11} &= -\frac{\omega_1 \omega_2 (64\omega_1^2 \omega_2^2 + 43)}{6 (1 - 2\omega_1^2)(1 - 2\omega_2^2)(1 - 5\omega_1^2)(1 - 5\omega_2^2)}, \\ c_{02} &= \frac{\omega_1^2 (124\omega_2^4 - 696\omega_2^2 + 81)}{144 (1 - 2\omega_2^2)^2 (1 - 5\omega_2^2)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Согласно Арнольду и Мозеру (см. главу 4) при выполнении неравенства $D_3 \equiv c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0$ имеет место устойчивость по Ляпунову. При помощи (4.6) в статье [111] получено такое выражение для D_3:

$$D_3 = \frac{644\omega_1^4\omega_2^4 - 541\omega_1^2\omega_2^2 + 36}{16 (1 - 4\omega_1^2\omega_2^2)(4 - 25\omega_1^2\omega_2^2)}. \tag{4.7}$$

Рассматривая числитель выражения для D_3 как биквадратный многочлен относительно произведения частот $\omega_1\omega_2$ и используя уравнение (4.3), легко получить [111], что D_3 обращается в нуль только при одном значении μ из интервала (2.2):

$$\mu = \mu_3 = 0{,}0109136\ldots \tag{4.8}$$

На рис. 6 представлены график функций c_{20}, c_{11}, c_{02} и D_3 в зависимости от μ.

Таким образом, применив в рассматриваемой задаче результаты Арнольда и Мозера по теории гамильтоновых систем, Депри показали [111], что треугольные точки либрации устойчивы при всех μ из области (2.2), кроме, быть может, трех значений μ_i $(i = 1, 2, 3)$, при которых неприменима теорема Арнольда—Мозера.

Рассмотрим устойчивость при этих трех исключительных значениях параметра μ. При $\mu = \mu_1$ $(\omega_1 = 2\omega_2)$ нормализованная до членов третьего порядка функция Гамильтона имеет вид [56, 63]

$$\begin{aligned} H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 &+ \alpha_1 r_2 \sqrt{r_1} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + \\ &+ \beta_1 r_2 \sqrt{r_1} \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^2), \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $\alpha_1 = 1{,}322\ldots$, $\beta_1 = 0{,}298\ldots$ Так как $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, то, согласно § 2 главы 4, имеет место неустойчивость.

При $\mu_1 = \mu_2$ ($\omega_1 = 3\omega_2$) нормализованная функция Гамильтона такова:

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \alpha_2 r_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + \beta_2 r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^{5/2}), \quad (4.10)$$

где $\omega_1 = 0{,}948\ldots$, $\omega_2 = 0{,}316\ldots$, $c_{20} = 0{,}137\ldots$, $c_{11} = -2{,}176\ldots$, $c_{02} = 0{,}246\ldots$, $\alpha_2 = -1{,}461\ldots$, $\beta_2 = -4{,}235\ldots$ Имеем

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| = 4{,}170\ldots, \quad 3\sqrt{3(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} = 23{,}282\ldots$$

Так как $3\sqrt{3(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} > |c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}|$, то, согласно § 3 главы 4, имеет место неустойчивость.

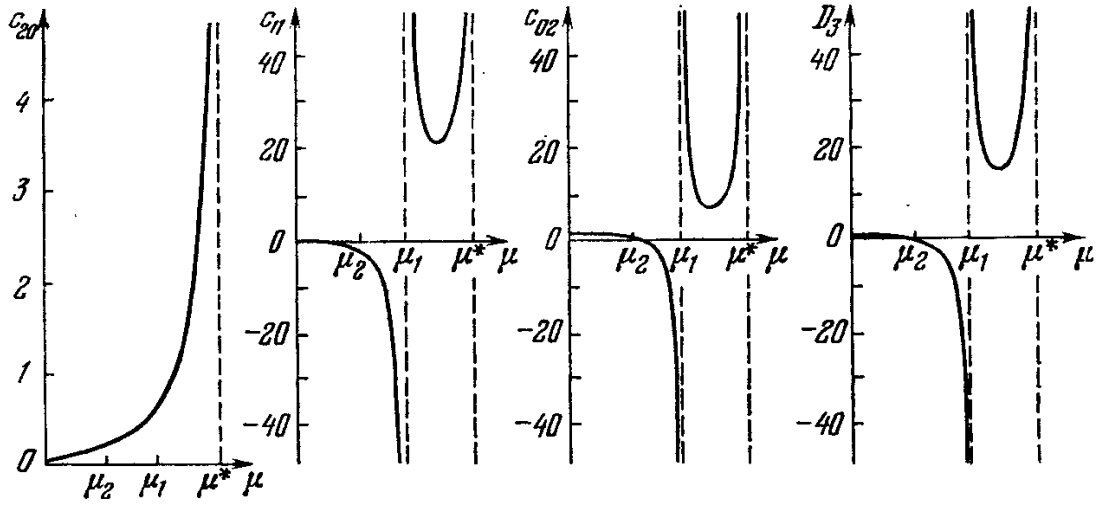

Рис. 6. Коэффициенты нормализованного гамильтониана плоской задачи и условие устойчивости $D_3 \neq 0$.

Теперь рассмотрим устойчивость при $\mu = \mu_3$. Это нерезонансный случай. Для решения задачи об устойчивости здесь необходимо произвести нормализацию гамильтониана до членов выше четвертого порядка, так как члены до четвертого порядка включительно вопроса об устойчивости не решают. Здесь надо применить теорему об устойчивости, приведенную в § 5 гл. 4.

Оказалось [56], что для решения вопроса об устойчивости при $\mu = \mu_3$ достаточно учесть в гамильтониане члены не выше шестого порядка. При этом в нормализованной до членов шестого порядка включительно функции Гамильтона коэффициенты имеют такие числовые значения (нормализация проводилась на ЭВМ):

$$\omega_1 = 0{,}959\ldots, \quad \omega_1 = 0{,}281\ldots, \quad c_{20} = 0{,}097\ldots,$$
$$c_{11} = -1{,}389\ldots, \quad c_{02} = 0{,}398\ldots, \quad c_{30} = -0{,}219\ldots,$$
$$c_{21} = 7{,}794\ldots, \quad c_{12} = -209{,}931\ldots, \quad c_{03} = -14{,}528\ldots$$

Для этих значений коэффициентов выполняются неравенства

$$\omega_1 \neq \omega_2,\ \omega_1 \neq 2\omega_2,\ \omega_1 \neq 3\omega_2,\ \omega_1 \neq 4\omega_2,\ \omega_1 \neq 5\omega_2,\ 2\omega_1 \neq 3\omega_2,$$

$$c_{30}\omega_2^3 + c_{21}\omega_2^2\omega_1 + c_{12}\omega_2\omega_1^2 + c_{03}\omega_1^3 = -66{,}631\ldots \neq 0.$$

Поэтому при $\mu = \mu_3$ имеет место устойчивость.

Проведенные рассмотрения показывают справедливость сформулированной в начале параграфа теоремы об устойчивости треугольных точек либрации плоской круговой ограниченной задачи трех тел.

§ 5. Об устойчивости точек либрации при критическом отношении масс

В предыдущем параграфе доказана теорема, полностью решающая задачу об устойчивости треугольных точек либрации для всех значений μ, лежащих внутри области (2.2) устойчивости в первом приближении. Известный интерес представляет также задача об устойчивости при граничных значениях μ области (2.2).

При $\mu = 0$ вопрос решается просто, так как задача трех тел при этом переходит в задачу двух тел, а задача об устойчивости точек либрации сводится к исследованию устойчивости движения материальной точки вокруг неподвижного притягивающего центра, а такое движение, как известно, неустойчиво, так как сколь угодно малое возмущение начальных условий приводит к изменению периода кеплеровского движения; здесь имеет место лишь орбитальная устойчивость (по этому вопросу см. также работу А. Г. Сокольского [85]).

Исследование устойчивости движения при

$$\mu = \mu^* = (9 - \sqrt{69})/18 = 0{,}0385208\ldots$$

(*критическое отношение масс* или, как иногда говорят, *критическое отношение масс Рауса*) представляет значительные трудности. При $\mu = \mu^*$ частоты линейных колебаний равны, а линеаризованная система, как уже отмечалось в главе 1, неустойчива. Исследование устойчивости точек либрации при $\mu = \mu^*$ в нелинейной постановке задачи проведено А. Г. Сокольским в работе [88] как для плоской задачи, так и для пространственной. Кратко опишем полученные результаты в случае плоской задачи.

При $\mu = \mu^*$ матрица линеаризованной системы уравнений возмущенного движения к диагональной форме не приводится. Ее собственные числа равны $\pm i\sqrt{2}/2$. Линейное вещественное каноническое преобразование $q_i, p_i \to q_i', p_i'$, задающееся при

помощи матрицы

$$N = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{43\sqrt{10}}{100} & -\frac{\sqrt{115}}{50} & -\frac{\sqrt{230}}{10} & -\frac{3\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{230}}{100} & \frac{\sqrt{5}}{50} & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{115}}{10} \\ \frac{\sqrt{230}}{10} & -\frac{3\sqrt{5}}{20} & -\frac{\sqrt{10}}{4} & 0 \\ \frac{17\sqrt{10}}{50} & -\frac{11\sqrt{115}}{100} & -\frac{\sqrt{230}}{20} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{array} \right\|, \tag{5.1}$$

приводит квадратичную часть H_2 функции Гамильтона (3.1) (при $e = 0$) к следующей нормальной форме:

$$H_2(q_j', p_j') = \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_2'^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(q_1'p_2' - q_2'p_1'). \tag{5.2}$$

Проведя затем нелинейную нормализацию $q_j', p_j' \to \tilde{q}_j, \tilde{p}_j$ и проделав все вычисления согласно формулам работы [87], приведенным в § 4 главы 4, получим гамильтониан возмущенного движения в виде

$$H = H_2(\tilde{q}_j, \tilde{p}_j) + (\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2)[A(\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2) + B(\tilde{q}_1\tilde{p}_2 - \tilde{q}_2\tilde{p}_1) + C(\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2)] + \ldots \tag{5.3}$$

В (5.3) не выписаны члены выше четвертого порядка относительно $\tilde{q}_j, \tilde{p}_j$. Коэффициент A в гамильтониане (5.3) равен 0,603... Так как он положителен, то, согласно § 4 главы 4, точки либрации формально устойчивы.

ГЛАВА 8

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Нормальная форма функции Гамильтона

В этой главе проводится исследование устойчивости треугольных точек либрации в случае пространственной круговой задачи трех тел [63]. То есть, как и в исследовании предыдущей главы, орбита основных притягивающих тел S и J предполагается круговой, но на тело P бесконечно малой массы в начальный момент времени действуют не только плоские возмущения, но и возмущения, выводящие его из плоскости вращения тел S и J. Теперь в гамильтониане возмущенного движения (3.1) предудущей главы следует положить только $e = 0$, а координата q_3 и импульс p_3 нулю не равны. И, таким образом, необходимо исследовать устойчивость положения равновесия $q_i = p_i = 0$ в атономной гамильтоновой системе с тремя степенями свободы. Изучение этой системы основано на результатах теории устойчивости многомерных гамильтоновых систем, изложенных в главе 5.

Для исследования устойчивости надо получить нормальную форму функции Гамильтона возмущенного движения. Сначала необходимо провести нормализацию квадратичной части H_2 функции Гамильтона. Соответствующая линейная каноническая замена переменных для величин q_i, p_i $(i = 1, 2)$ имеет вид (4.2) главы 7. Пространственные переменные q_3 и p_3 при линейной нормализации не изменяются: $q_3 = q_3$, $p_3 = p_3$. Сделав еще замену переменных по формулам (4.4) главы 7, в которых $\omega_3 \equiv 1$, получим квадратичную часть функции Гамильтона в виде

$$L = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 \qquad (\omega_3 \equiv 1). \tag{1.1}$$

Если частоты ω_i не связаны резонансными соотношениями до четвертого порядка включительно, т. е. для целых чисел n_i выполнено условие

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3 \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 < |n_1| + |n_2| + |n_3| \leqslant 4, \tag{1.2}$$

то при помощи преобразования Биркгофа $q_i', p_i' \to q_i'', \overline{p_i''}$, задаваемого сходящимися степенными рядами, функция Гамильтона приводится к виду

$$H = L(r_1, r_2, r_3) + N(r_1, r_2, r_3) + O((r_1 + r_2 + r_3)^{5/2}). \tag{1.3}$$

Здесь L определено равенством (1.1), а функция $N(r_1, r_2, r_3)$ такова:

$$N = c_{200}r_1^2 + c_{110}r_1r_2 + c_{101}r_1r_3 + c_{020}r_2^2 + c_{011}r_2r_3 + c_{002}r_3^2 \quad (1.4)$$
$$(2r_i = q_i^{*2} + p_i^{*2}).$$

Вычисления показывают, что условие (1.2) нарушается в нашей задаче в области устойчивости линейной системы $0 < 27\mu(1 - \mu) < 1$ при пяти значениях параметра μ, соответствующих следующим пяти резонансным соотношениям:

1) $\omega_1 - 2\omega_2 = 0$, 2) $\omega_1 - 3\omega_2 = 0$, 3) $2\omega_2 - 1 = 0$,
4) $3\omega_2 - 1 = 0$, 5) $2\omega_1 - \omega_2 - 1 = 0$.

Учитывая тот факт, что H_3 и H_4 — четные функции q_3, легко показать, что наличие резонансных соотношений (3) — (5) не

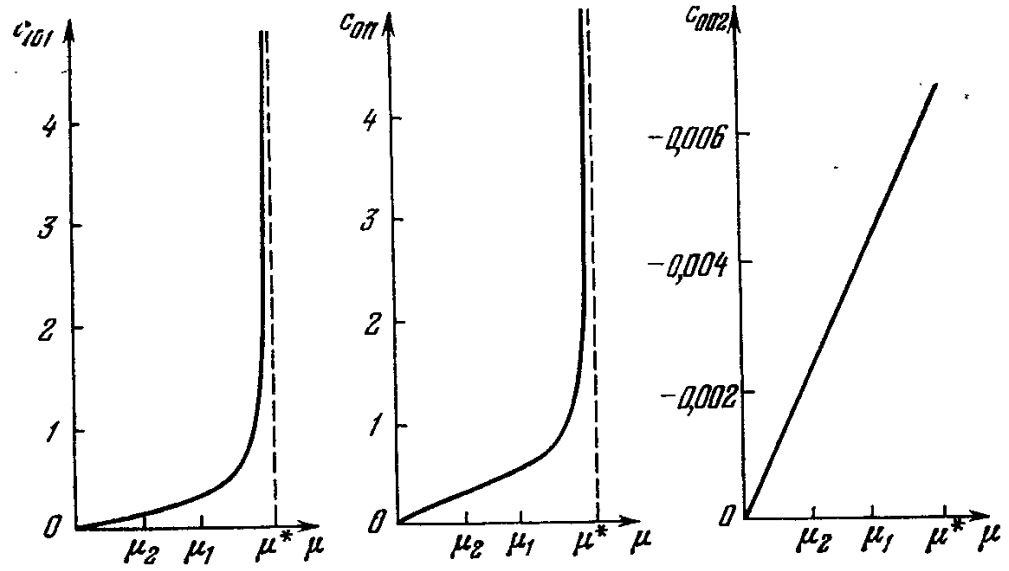

Рис. 7. Коэффициенты нормализованного гамильтониана, соответствующие пространственным переменным.

приводит к появлению нулевых знаменателей при получении производящей функции, задающей преобразование Биркгофа, и потому не мешает получению нормальной формы (1.3). При резонансах (1) и (2) нулевые знаменатели появляются. Соответствующими значениями μ будут значения μ_1 и μ_2, рассмотренные в предыдущей главе в случае плоской круговой задачи. Было показано, что при значениях μ, равных μ_1 и μ_2, в плоской задаче точки либрации неустойчивы. Эта неустойчивость, конечно, остается и в рассматриваемом сейчас случае пространственной задачи.

Пусть $\mu \neq \mu_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда при всех остальных значениях μ из области $0 < 27\mu(1 - \mu) < 1$ устойчивости в первом при-

ближении нормализованная до членов четвертого порядка включительно функция Гамильтона будет иметь вид (1.3). При этом, конечно, при всех μ $c_{200} = c_{20}$, $c_{110} = c_{11}$, $c_{020} = c_{02}$, а выражения для этих коэффициентов получены в [111] и приведены в предыдущей главе. Для остальных коэффициентов нормальной формы (1.3) получаем после проведения довольно длительных выкладок следующие выражения [63]:

$$c_{101} = -\frac{8\omega_1\omega_2^2}{3(1-2\omega_1^2)(4-\omega_1^2)},$$

$$c_{011} = \frac{8\omega_2\omega_1^2}{3(1-2\omega_2^2)(4-\omega_2^2)}, \tag{1.5}$$

$$c_{002} = -\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{3(4-\omega_1^2)(4-\omega_2^2)}.$$

Графики коэффициентов (1.5) в зависимости от μ представлены на рис. 7.

§ 2. Устойчивость для большинства начальных условий

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение.

Теорема. *В пространственной круговой ограниченной задаче трех тел треугольные точки либрации устойчивы для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий при всех* μ *из области устойчивости в первом приближении* (значения μ_1 и μ_2 исключаются).

Доказательство. При $\mu = \mu_i$ $(i = 1, 2)$ точки либрации неустойчивы, как уже об этом говорилось выше. Пусть $\mu \neq \mu_1$ и $\mu \neq \mu_2$. Тогда гамильтониан возмущенного движения может быть представлен в виде (1.3). Согласно исследованиям Арнольда, изложенным в главе 5, для доказательства устойчивости для большинства начальных условий достаточно проверить отличие от нуля определителя четвертого порядка

$$D_4 = \det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 N}{\partial r_i \partial r_j} & \dfrac{\partial L}{\partial r_i} \\ \dfrac{\partial L}{\partial r_j} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.1}$$

Раскрывая определитель (2.1) и используя выражения (1.1) и (1.4), получаем

$$D_4 = \omega_1^2(c_{011}^2 - 4c_{020}c_{002}) + \omega_2^2(c_{101}^2 - 4c_{200}c_{002}) + \omega_3^2(c_{110}^2 - 4c_{200}c_{020}) + 2\omega_1\omega_2(c_{101}c_{011} - 2c_{002}c_{110}) - 2\omega_1\omega_3(c_{011}c_{110} - 2c_{020}c_{101}) + 2\omega_2\omega_3(c_{110}c_{101} - 2c_{200}c_{011}). \tag{2.2}$$

Преобразуем выражение (2.2) к более простому виду, используя явные зависимости коэффициентов нормальной формы от ω_1 и ω_2 согласно формулам (4.6) главы 7 и формулам (1.5) настоящей главы. Выражение для D_4 можно записать в виде функции аргумента $u = \omega_1^{-2}\omega_2^{-2}$. Получаем

$$D_4 = \frac{f(u)}{5184(4-u)^2(25-4u)^2(1+12u)^2}, \tag{2.3}$$

где через $f(u)$ обозначен многочлен пятой степени от u:

$$f(u) = 73908288u^5 - 356526576u^4 + 2645643564u^3 - \\ - 5787985485u^2 - 759408680u - 317395600.$$

Из уравнения (4.3) главы 7 получаем

$$\omega_1^2\omega_2^2 = \frac{27}{4}\mu(1-\mu).$$

А так как в области устойчивости в первом приближении выполняется неравенство $0 < 27\mu(1-\mu) < 1$, то очевидно, что при всех μ в этой области выполнено неравенство $u > 4$.

Многочлен $f(u)$ и его производные при $u = 4$ имеют такие числовые значения:

$$f = 57769673472, \quad f^{\mathrm{I}} = 83259403696, \quad f^{\mathrm{II}} = 78068980614,$$
$$f^{\mathrm{III}} = 52599266568, \quad f^{\mathrm{IV}} = 26919340416, \quad f^{\mathrm{V}} = 8868994560.$$

Так как все эти значения положительны, то (см., например, [35]) при $u > 4$ уравнение $f(u) = 0$ не имеет корней. Тем самым доказана выполнимость неравенства $D_4 \neq 0$ при всех μ из области устойчивости в первом приближении (кроме $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$). А значит, доказана и сформулированная в начале параграфа теорема об устойчивости точек либрации для большинства начальных условий.

§ 3. Формальная устойчивость

Из результатов предыдущего параграфа следует, что тело P бесконечно малой массы будет образовывать с телами конечных масс S и J треугольник, близкий к равностороннему, для большинства достаточно малых отклонений от вершины равностороннего треугольника, соответствующего невозмущенному движению, и для достаточно малых относительных скоростей. И, согласно [4], для этих начальных условий, соответствующих несоизмеримым частотам, движение тела P будет условно-периодическим. Таким образом, с вероятностью, близкой к единице, треугольные точки либрации в пространственной круговой ограниченной задаче трех тел устойчивы. Но каково движение тела P для начальных условий, соответствующих соизмеримым (или почти соизмеримым) частотам?

Исследуемая механическая система обладает тремя степенями свободы. А в многомерных гамильтоновых системах, как уже подробно говорилось в пятой главе, может быть неустойчивость по Ляпунову, несмотря на то, что выполнены условия устойчивости для большинства начальных условий.

В этом параграфе мы рассмотрим задачу об устойчивости точек либрации с точки зрения формальной устойчивости и в результате докажем такое утверждение.

Теорема. *Область* $0 < 27\mu(1-\mu) < 1$ *устойчивости в первом приближении разбивается на пять интервалов*:

$$0 < \mu < 0{,}010913\ldots;\quad 0{,}016376\ldots < \mu < \mu_1 = 0{,}024293\ldots;$$
$$\mu_1 < \mu < \mu^* = 0{,}038520\ldots; \tag{3.1}$$

$$0{,}010913\ldots < \mu < \mu_2 = 0{,}013516\ldots;\ \mu_2 < \mu < 0{,}016376\ldots, \tag{3.2}$$

причем в интервалах (3.1) *треугольные точки либрации пространственной круговой ограниченной задачи трех тел формально устойчивы, а в интервалах* (3.2) *формальная устойчивость имеет место для почти всех значений* μ; *исключения, быть может, составляют значения* μ, *при которых частоты* ω_i $(i = 1, 2, 3;\ \omega_3 \equiv 1)$ *линейной задачи удовлетворяют соотношениям двукратного резонанса*

$$k_1'\omega_1 + k_2'\omega_2 + k_3'\omega_3 = 0,\quad k_1''\omega_1 + k_2''\omega_2 + k_3''\omega_3 = 0,$$
$$k_i', k_i'' \text{ — целые числа},\quad \sum_{i=1}^{3} |k_i'| \geqslant 7,\quad \sum_{i=1}^{3} |k_i''| \geqslant 7. \tag{3.3}$$

Справедливость теоремы мы покажем в несколько этапов. Сначала, следуя [58], покажем формальную устойчивость для значений μ, лежащих в интервалах (3.1). Для этого заметим, что при помощи преобразования Биркгофа в функции Гамильтона (1.3) можно нормализовать совокупность членов пятого, шестого и т. д. порядков. И если μ принадлежит область устойчивости в линейном приближении и $\mu \neq \mu_1$, $\mu \neq \mu_2$, то нормализованная во всех порядках функция Гамильтона запишется в виде

$$H = L + N + R(r_i,\ \varphi_i), \tag{3.4}$$

где L и N определены равенствами (1.1) и (1.4), а формальный ряд R начинается с членов не ниже пятого порядка относительно $\sqrt{r_i}$. Угловые переменные φ_i будут содержаться в R только в виде комбинаций

$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3, \tag{3.5}$$

где k_i — целые числа, для которых выполнено равенство

$$k_1\omega_1 - k_2\omega_2 + k_3 = 0 \qquad (|k_1| + |k_2| + |k_3| \geqslant 5). \tag{3.6}$$

Система с гамильтонианом (3.4) имеет очевидный формальный интеграл $H = \text{const}$, так как H не зависит от времени. Кроме того, учитывая (3.5) и (3.6), нетрудно проверить, что выражение L тоже будет интегралом (формальным).

Составим формальный интеграл G в виде

$$G = L^4 + (H - L)^2. \tag{3.7}$$

В разложении $G = G_8 + G_9 + \ldots$ функция G_8 имеет вид

$$G_8 = L^4 + N^2. \tag{3.8}$$

Оба слагаемых в правой части равенства (3.8) неотрицательны. Поэтому функция G_8 будет знакоопределенной в окрестности

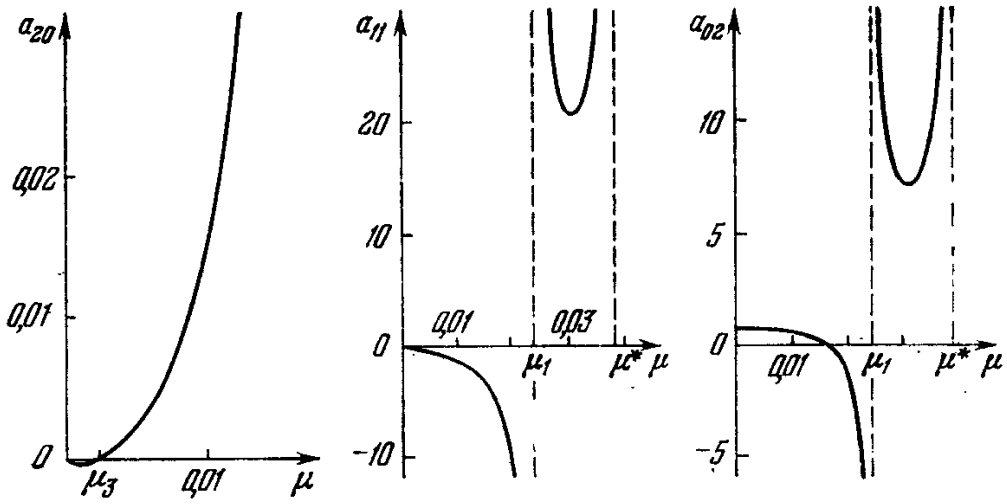

Рис. 8. Зависимость коэффициентов a_{20}, a_{11} и a_{02} от μ.

начала координат, если при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$ система уравнений

$$L = 0, \quad N = 0 \tag{3.9}$$

имеет только нулевое решение $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. Исследуем систему уравнений (3.9). Из первого уравнения $L = 0$ найдем выражение r_3 через r_1 и r_2 и подставим его во второе уравнение. Тогда система уравнений (3.9) перепишется так:

$$r_3 = \omega_2 r_2 - \omega_1 r_1, \quad a_{20} r_1^2 + a_{11} r_1 r_2 + a_{02} r_2^2 = 0. \tag{3.10}$$

В системе уравнений (3.10) введены следующие обозначения:

$$a_{20} = c_{200} - c_{101}\omega_1 + c_{002}\omega_1^2,$$
$$a_{11} = c_{110} + c_{101}\omega_2 - c_{011}\omega_1 - 2c_{002}\omega_1\omega_2,$$
$$a_{02} = c_{020} + c_{011}\omega_2 + c_{002}\omega_2^2.$$

Графики коэффициентов a_{20}, a_{11} и a_{02} представлены на рис. 8. Коэффициент a_{20} при $\mu = \mu^{**} = 0{,}00278$ обращается в нуль.

При этом значении μ коэффициенты системы уравнений (3.10) таковы:

$$\omega_1 = 0{,}99042, \quad \omega_2 = 0{,}13811, \quad b = -0{,}39924, \quad c = 0{,}56461$$

и система (3.10) имеет две серии решений:

1) r_1 произвольно, $r_2 = 0$, $r_3 = -\omega_1 r_1$;

2) $r_1 = 1{,}4142\, r_2$, r_2 произвольно, $r_3 = -1{,}2625\, r_2$.

Эти решения не удовлетворяют неравенствам $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$. Поэтому при $\mu = \mu^{**}$ система уравнений (3.10) при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$ имеет только нулевое решение.

При $\mu \neq \mu^{**}$ (и, конечно, $\mu \neq \mu_1$ и $\mu \neq \mu_2$) решения системы уравнений (3.10) могут быть описаны следующим образом:

$$r_1 = \alpha_j r_2, \quad r_3 = \beta_j r_2, \quad r_2 \text{ произвольно } (j = 1, 2),$$

$$\alpha_1 = \frac{-a_{11} + \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}}}{2a_{20}}, \quad \alpha_2 = \frac{-a_{11} - \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}}}{2a_{20}}, \tag{3.11}$$

$$\beta_j = \omega_2 - \alpha_j \omega_1.$$

Система уравнений (3.10) тогда и только тогда имеет ненулевое решение при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$, когда величины $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}$, α_j, β_j одновременно неотрицательны.

Расчеты показывают, что величина $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}$ положительна всегда, α_1 и β_1 всегда противоположны по знаку, а величины α_2 и β_2 одновременно положительны только при выполнении неравенств

$$0{,}010913\ldots < \mu < 0{,}016376\ldots, \quad \mu \neq \mu_2 = 0{,}013516\ldots \tag{3.12}$$

Таким образом, формальный интеграл (3.7) будет знакоопределенным при всех μ из области устойчивости в первом приближении, кроме значений μ_1 и μ_2 (исключенных из рассмотрения с самого начала, так как вопрос об устойчивости при $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$ уже решен), а также значений μ, принадлежащих интервалам (3.2). Таким образом, формальная устойчивость точек либраций для значений μ, лежащих в интервалах (3.1), доказана.

Рассмотрим теперь интервалы (3.2). Для доказательства утверждения теоремы о формальной устойчивости в интервалах (3.2) надо исследовать коэффициенты при членах шестого порядка относительно $\sqrt{r_i}$ в нормальной форме функции Гамильтона возмущенного движения.

Нормализованная до членов шестого порядка включительно функция Гамильтона нашей задачи имеет такой вид:

$$H = L + N + M + O\left((r_1 + r_2 + r_3)^{7/2}\right), \tag{3.13}$$

где L и N определены равенствами (1.1) и (1.4), а функция

$M(r_1,r_2,r_3)$ имеет такой вид:

$$M = c_{300}r_1^3 + c_{210}r_1^2r_2 + c_{120}r_1r_2^2 + c_{030}r_2^3 + c_{201}r_1^2r_3 + c_{111}r_1r_2r_3 + c_{021}r_2^2r_3 + c_{102}r_1r_3^2 + c_{012}r_2r_3^2 + c_{003}r_3^3. \quad (3.14)$$

Нормальная форма функции Гамильтона будет иметь вид (3.13),

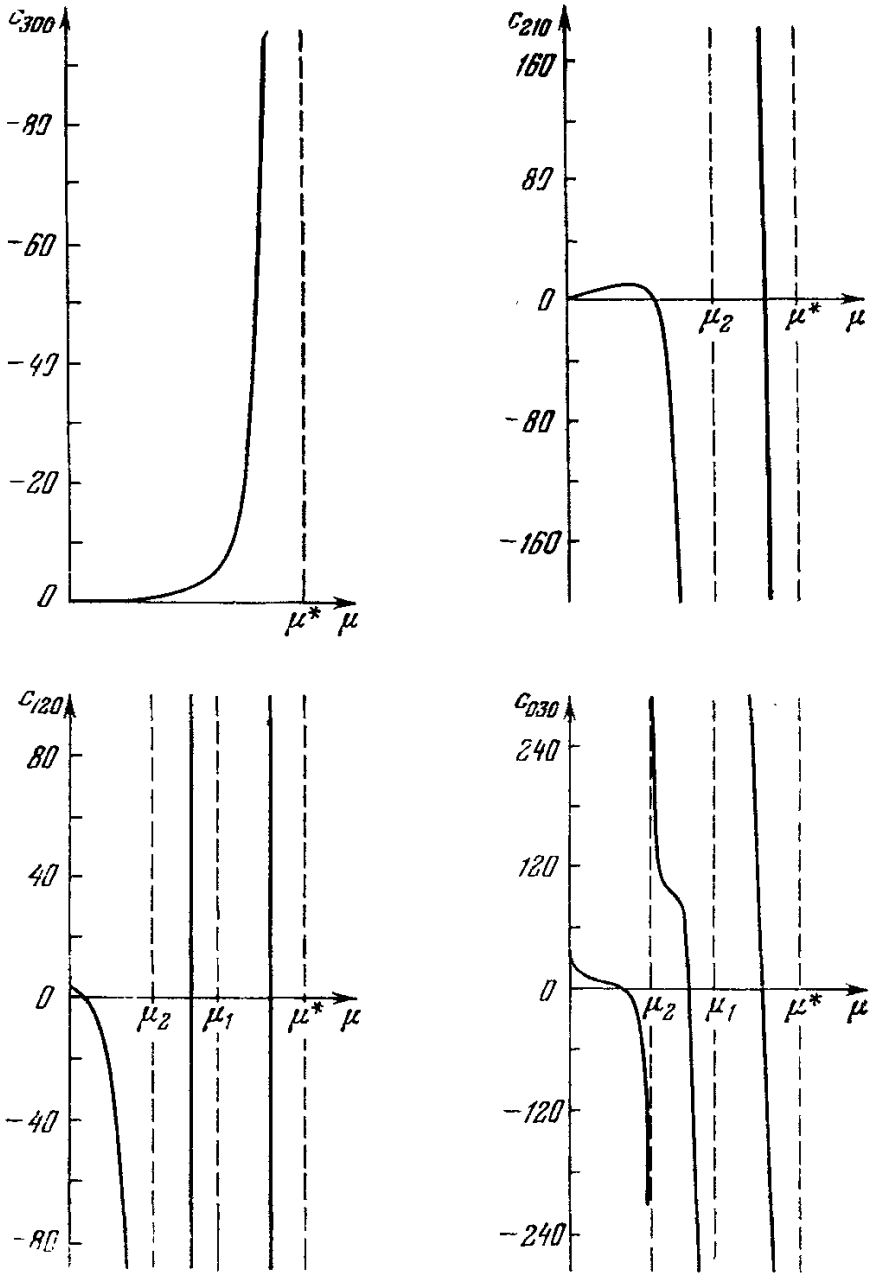

Рис. 9. Коэффициенты нормальной формы совокупности членов шестого порядка в разложении функции Гамильтона.

если частоты ω_i $(i = 1, 2, 3)$ не связаны резонансными соотношениями до шестого порядка включительно. В интересующих сейчас нас интервалах (3.2) изменения параметра μ эти условия отсутствия резонанса, как показали расчеты, выполнены.

Коэффициенты формы M третьего порядка (по r_i) в нормальной форме были получены при любых (нерезонансных) значениях μ. Эта работа проводилась на ЭВМ. Графики коэффициентов функции M представлены на рис. 9 и 10.

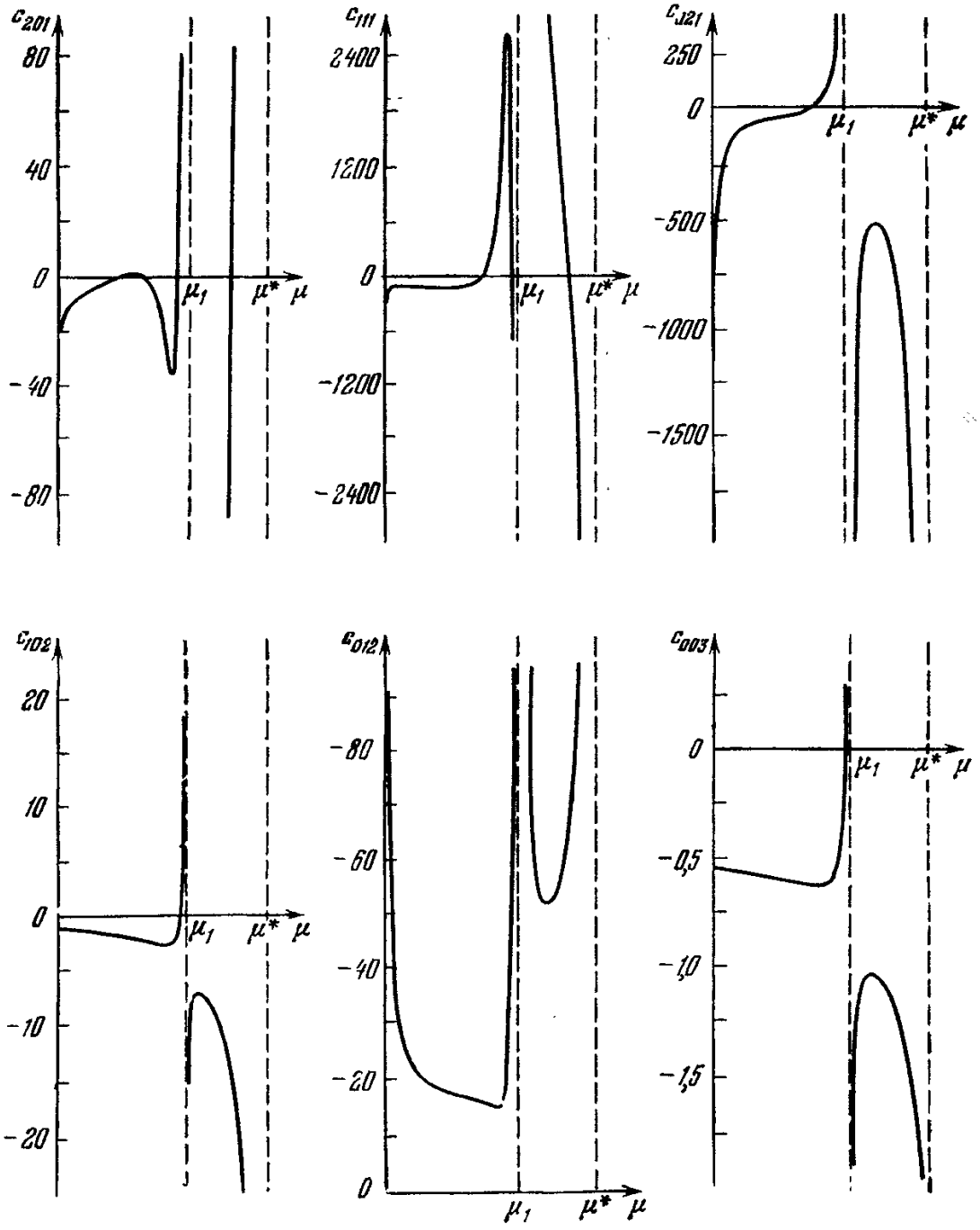

Рис. 10. Коэффициенты нормальной формы совокупности членов шестого порядка, соответствующие пространственным переменным.

Прежде чем строить и исследовать формальный интеграл, нужный для доказательства утверждения теоремы о формальной устойчивости точек либрации в интервалах (3.2), покажем,

следуя [67], что система уравнений

$$L = 0, \quad N = 0, \quad M = 0 \tag{3.15}$$

при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$ для значений μ из интервалов (3.2) имеет только тривиальное решение $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.

Как только что было показано выше, первые два уравнения системы (3.15) для значаний μ из интервалов (3.2) допускают нетривиальное решение $r_1 = \alpha_2 r_2$, $r_3 = \beta_2 r_2$, где α_2 и β_2 одновременно положительны. Подставив это решение в функцию M, получим, что третье из уравнений системы (3.15) переходит в уравнение

$$M(\alpha_2 r_2, r_2, \beta_2 r_2) \equiv F(\mu) r_2^3 = 0, \tag{3.16}$$

где $F(\mu) \equiv M(\alpha_2, 1, \beta_2)$. Если функция $F(\mu)$ в интервалах (3.2) не обращается в нуль, то система (3.15) несовместна. График функции $F(\mu)$ для значений μ из интервалов (3.2) представлен на рис. 11. Функция $F(\mu)$ в нуль не обращается. Таким образом, система уравнений (3.15) для значений μ, лежащих в интервалах (3.2), имеет только тривиальное решение $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.

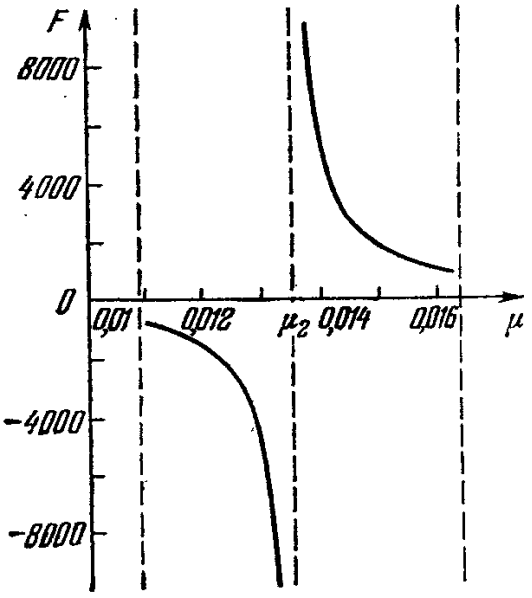

Рис. 11. Зависимости функции F от μ.

Теперь возьмем какое-либо значение μ из интервалов (3.2) и заметим, что возможны только три случая: 1) когда нет резонанса между частотами ω_i, 2) когда есть однократный резонанс $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 = 0$, $\sum_{i=1}^{3} |k_i| \geqslant 7$ и 3) когда частоты связаны двумя резонансными соотношениями (3.3) (двукратный резонанс).

В первом случае имеет место формальная устойчивость согласно результатам Мозера [157] (см. также § 2 пятой главы книги).

Рассмотрим второй случай. Если среди целых чисел k_i ($i = 1, 2, 3$) есть числа разных знаков, то опять, согласно работе Мозера [157], имеет место формальная устойчивость. Пусть все числа k_i имеют одинаковый знак, например, пусть все они положительны. Нетрудно проверить (см. также [13]), что система с нормализованным во всех порядках гамильтонианом (3.13) имеет три формальных интеграла:

$$(\mathbf{p}', \mathbf{r}) = \text{const}, \quad (\mathbf{p}'', \mathbf{r}) = \text{const}, \quad H - L = \text{const}, \tag{3.17}$$

где $(\mathbf{p}', \mathbf{k}) = 0$, $(\mathbf{p}'', \mathbf{k}) = 0$, $\mathbf{p}'^{\mathrm{T}} = (p_1', p_2', p_3')$, $\mathbf{p}''^{\mathrm{T}} = (p_1'', p_2'', p_3'')$, $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = (k_1, k_2, k_3)$, $\mathbf{r}^{\mathrm{T}} = (r_1, r_2, r_3)$. Из интегралов (3.17) составим формальный интеграл G вида

$$G = (\mathbf{p}', \mathbf{r})^4 + (\mathbf{p}'', \mathbf{r})^4 + (N + M + \ldots)^2. \qquad (3.18)$$

Слагаемые правой части интеграла (3.18) неотрицательны. Покажем, что в нашем случае они могут обратиться в нуль только в начале координат. Это и будет означать знакоопределенность формального интеграла G.

Легко видеть, что первые два слагаемых в (3.18) обращаются одновременно в нуль только на луче $\mathbf{r} = \rho\mathbf{k}$ $(\rho \geqslant 0)$. На этом луче третье слагаемое имеет вид

$$(N(k_1,k_2,k_3)\rho^2 + M(k_1,k_2,k_3)\rho^3 + \ldots)^2$$

и при достаточно малых $\rho \neq 0$ не равно нулю в силу несовместности системы (3.15) в квадранте $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$ (заметим, что на луче $\mathbf{r} = \rho\mathbf{k}$ функция L тождественно равна нулю). Итак, во втором случае также имеет место формальная устойчивость точек либрации.

В третьем случае, случае двукратного резонанса (3.3), мы располагаем только двумя формальными интегралами:

$$(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathrm{const}, \quad H - L = \mathrm{const}, \qquad (3.19)$$

где $(\mathbf{p}, \mathbf{k}') = 0$, $(\mathbf{p}, \mathbf{k}'') = 0$. Формальный интеграл, аналогичный интегралу (3.18), имеет вид

$$G = (\mathbf{p}, \mathbf{r})^4 + (N + M + \ldots)^2. \qquad (3.20)$$

Первое слагаемое в (3.20) обращается в нуль уже не на луче, а на плоскости $\mathbf{r} = \rho_1\mathbf{k}' + \rho_2\mathbf{k}''$. Второе слагаемое теперь уже может обратиться в нуль, несмотря на несовместность системы уравнений (3.15) при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$. А поэтому мы и не можем показать (нашим способом) формальную устойчивость в случае двукратного резонанса.

Проведенные рассуждения доказывают теорему.

Замечание. Наличие формальной устойчивости позволяет утверждать, что неустойчивость по Ляпунову не обнаруживается при учете в разложении функции Гамильтона членов до сколь угодно большого (но конечного) порядка. А если и существуют траектории, по которым тело P далеко уходит от вершины равностороннего треугольника, то движение по ним происходит крайне медленно.

Для получения оценок времени «удержания» тела P вблизи вершины равностороннего треугольника можно было бы использовать изложенные в пятой главе результаты Н. Н. Нехорошева по исследованию скорости диффузии Арнольда. Заметим для этого, что несовместность системы (3.9) в интервалах (3.1) и системы

(3.15) в интервалах (3.2) означает, что в этих интервалах выполнены условия крутизны функций $L + M$ и $L + N + M$ соответственно. Но мы встречаемся со следующим затруднением. Н. Н. Нехорошев показал справедливость экспоненциальной оценки скорости диффузии Арнольда для аналитических гамильтонианов, а в нашем случае движения вблизи положения равновесия, совпадающего с началом координат, функция Гамильтона не является аналитической относительно r_i (есть аналитичность только относительно $\sqrt{r_i}$). В автореферате работы [78] утверждается, что и в этом последнем случае можно показать возможность применения экспоненциальной оценки скорости диффузии Арнольда, если исключить резонансы до некоторого, достаточно высокого, конечного порядка. И тогда будет иметь место следующая оценка:

$$\left(\sum_{i=1}^{3}[r_i(\nu) - r_i(0)]^2\right)^{1/2} < \varepsilon \tag{3.21}$$

при всех значениях ν (напомним, что ν — истинная аномалия кеплеровского движения основных притягивающих масс S и J), для которых

$$0 \leqslant \nu \leqslant \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^a}\right). \tag{3.22}$$

Величина ε характеризует малость величины отклонения координат и скоростей тела P от их значений, соответствующих точке либрации. Положительные константы a и b допускают оценку

$$0 < a < b < \frac{2}{59}. \tag{3.23}$$

§ 4. Формальная устойчивость точек либрации при критическом отношении масс

Рассмотрим теперь, следуя работе [88], задачу об устойчивости точек либрации при критическом отношении масс μ^*, являющемся границей области устойчивости в линейном приближении. При $\mu = \mu^*$ частоты плоских колебаний равны между собой ($\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{2}/2$), а частота пространственных колебаний ω_3, как и при любых значениях μ, равна единице. Линейным вещественным каноническим преобразованием $q_j, p_j \to q'_j, p'_j$ приведем квадратичную часть функции Гамильтона к нормальной форме. Для этого переменные плоского движения q_j, p_j ($j = 1, 2$) преобразуем с помощью матрицы $\mathrm{N} = \| n_{ij} \|$ ($i, j = 1, \ldots, 4$), задающейся равенством (5.1) седьмой главы, а q_3, p_3 оставим без изменения. Тогда функция Гамильтона возмущенного

движения примет вид

$$H = \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_2'^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(q_1'p_2' - q_2'p_1') + \frac{1}{2}(q_3'^2 + p_3'^2) + \sum_{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\mu_1+\mu_2=3} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\mu_1\mu_2} q_1'^{\nu_1} q_2'^{\nu_2} q_3'^{\nu_3} p_1'^{\mu_1} p_2'^{\mu_2}. \quad (4.1)$$

При помощи преобразования Биркгофа $q_j', p_j' \to \tilde{q}_j, \tilde{p}_j$ можно в гамильтониане (4.1) уничтожить все члены третьего порядка, а члены четвертого порядка упростить. Функция Гамильтона, нормализованная до членов четвертого порядка включительно, в новых переменных будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2}(\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{q}_1\tilde{p}_2 - \tilde{q}_2\tilde{p}_1) + \frac{1}{2}(\tilde{q}_3^2 + \tilde{p}_3^2) + (\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2)[A(\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2) + B(q_1\tilde{p}_2 - \tilde{q}_2\tilde{p}_1) + C(\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2)] + (q_3^2 + \tilde{p}_3^2)[D(\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2) + E(q_1\tilde{p}_2 - \tilde{q}_2\tilde{p}_1) + F(\tilde{q}_3^2 + \tilde{p}_3^2)] + \ldots \quad (4.2)$$

В (4.2) не выписаны члены пятого и более высоких порядков, коэффициенты A, B, C — те же, что и в формуле (5.3) седьмой главы. Как будет видно ниже, для доказательства формальной устойчивости существен только коэффициент $A = 0{,}603\ldots$

Докажем формальную устойчивость точек либрации. Можно показать, что при помощи бесконечного числа шагов преобразования Биркгофа (возможно, расходящегося) функция Гамильтона (4.2) может быть приведена к следующей нормальной форме:

$$H = \frac{1}{2}(\tilde{q}_1^2 + q_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{q}_1\tilde{p}_2 - \tilde{q}_2\tilde{p}_1) + \frac{1}{2}(\tilde{q}_3^2 + \tilde{p}_3^2) + \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=2}^{\infty} a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(q_1^2 + \tilde{q}_2^2)^{\alpha_1}(\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2)^{\alpha_2}(q_1\tilde{p}_2 - q_2\tilde{p}_1)^{\alpha_3}(q_3^2 + \tilde{p}_3^2)^{\alpha_4}, \quad (4.3)$$

где α_i — целые неотрицательные числа.

Каноническая система с гамильтонианом (4.3) имеет три формальных интеграла:

$$H = \text{const}, \quad \tilde{q}_1\tilde{p}_2 - \tilde{q}_2\tilde{p}_1 = \text{const}, \quad \tilde{q}_3^2 + \tilde{p}_3^2 = \text{const}. \quad (4.4)$$

Следовательно, их комбинация

$$G \equiv H - \frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{q}_1\tilde{p}_2 - \tilde{q}_2\tilde{p}_1)$$

также будет формальным интегралом. В разложении

$$G = G_2 + G_4 + G_6 + \ldots$$

функция

$$G_2+G_4=\frac{1}{2}(\tilde{q}_1^2+\tilde{q}_2^2)+A(\tilde{p}_1^2+\tilde{p}_2^2)^2+\frac{1}{2}(\tilde{q}_3^2+\tilde{p}_3^2)+$$
$$+(\tilde{p}_1^2+\tilde{p}_2^2)[B(\tilde{q}_1\tilde{p}_2-q_2\tilde{p}_1)+C(q_1^2+q_2^2)]+$$
$$+(\tilde{q}_3^2+\tilde{p}_3^2)[D(\tilde{p}_1^2+\tilde{p}_2^2)+E(\tilde{q}_1\tilde{p}_2-\tilde{q}_2\tilde{p}_1)+F(\tilde{q}_3^2+\tilde{p}_3^2)]$$

при $A>0$ будет определенно-положительной функцией своих переменных. Отсюда следует формальная устойчивость треугольных точек либрации при критическом отношении масс μ^*.

Отметим в заключение, что приведенное выше доказательство формальной устойчивости отличается от доказательства, изложенного в работе А. Г. Сокольского [88]. Приведенный здесь новый вариант доказательства также сообщен автору А. Г. Сокольским.

§ 5. Выводы

Кратко сформулируем и обсудим результаты исследования устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел.

Как в плоской, так и в пространственной задаче условия устойчивости в линейном приближении записываются в виде неравенств

$$0<\mu<\mu^*=0{,}0385208\ldots \tag{5.1}$$

Строгий нелинейный анализ показал, что в случае плоской задачи точки либрации устойчивы по Ляпунову для всех значений параметра μ из области (5.1), кроме двух значений

$$\mu_1=0{,}0242938\ldots \quad \text{и} \quad \mu_2=0{,}0135160\ldots, \tag{5.2}$$

при которых имеет место неустойчивость. Так что задача об устойчивости треугольных точек либрации для значений параметра μ из области (5.1) в случае плоской задачи решена полностью.

В пространственной задаче неустойчивость при $\mu=\mu_i$ $(i=1, 2)$ конечно, остается, а при значениях μ, не равных μ_i и принадлежащих области (5.1), доказана устойчивость для большинства начальных условий. Кроме того, для почти всех μ из интервала (5.1) (исключения, быть может, составляют значения μ, соответствующие двукратному резонансу между частотами ω_1, ω_2 и ω_3) показана формальная устойчивость. Таким образом, если в пространственной задаче точки либрации и могут быть неустойчивыми, то эта неустойчивость в большинстве случаев крайне слабая.

Для значений параметра μ, больших критического значения μ^*, точки либрации неустойчивы, что обнаруживается уже в

линейной задаче, так как соответствующее характеристическое уравнение имеет корни с положительными вещественными частями. При $\mu = \mu^*$ все корни характеристического уравнения чисто мнимые, но среди них есть кратные, а линейная система неустойчива. Анализ показал, что эта неустойчивость исчезает, если в уравнениях возмущенного движения учитывать нелинейные члены. Показано, что при $\mu = \mu^*$ треугольные точки либрации формально устойчивы как в плоской, так и в пространственной задаче. По-видимому, в плоской задаче при $\mu = \mu^*$ можно доказать устойчивость по Ляпунову.

ГЛАВА 9

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ПЛОСКОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Краткая история рассматриваемой задачи

В этой главе мы проведем исследование устойчивости треугольных точек либрации для случая плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел. По сравнению со случаем круговой задачи, рассмотренной в двух предыдущих главах, здесь задача очень усложняется, так как независимая переменная явно содержится в гамильтониане возмущенного движения.

Исследование устойчивости треугольных точек либрации в эллиптической задаче трех тел началось очень давно. А. М. Ляпунов в 1889 году исследовал устойчивость (в первом приближении) треугольных точек либрации для случая пространственной неограниченной задачи трех тел [48]. Признаком устойчивости А. М. Ляпунов считал бесконечно малое отличие формы и размеров треугольника, образованного тремя телами, в возмущенном и невозмущенном движениях. Результаты А. М. Ляпунова нельзя непосредственно перенести на ограниченную задачу трех тел, где признаком устойчивости считается бесконечно малое отличие длин сторон треугольника, образованного телами, от тех длин, которые им соответствовали в невозмущенном движении в тот же момент времени. Однако при внимательном рассмотрении уравнений движения, исследованных А. М. Ляпуновым в его постановке задачи, можно весьма просто получить следующие выводы об устойчивости (в первом приближении) точек либрации и для случая ограниченной задачи трех тел: 1) при достаточно малых значениях μ треугольные точки либрации устойчивы, 2) при достаточно малых значениях эксцентриситета e треугольные точки либрации устойчивы, если

$$0 < \mu(1-\mu) < \frac{1}{36} - f_1(e)$$

или

$$\frac{1}{36} + f_2(e) < \mu(1-\mu) < \frac{1}{27} + f_3(e), \tag{1.1}$$

и неустойчивы в противном случае. В формулах (1.1) через $f_i(e)$ обозначены некоторые положительные функции e, обращающиеся в нуль при $e = 0$.

Приведем краткий обзор работ по исследованию устойчивости лагранжевых решений ограниченной эллиптической задачи трех тел. В 1964 году было проведено численное исследование в работе Дэнби [110]. В этой работе при помощи численного интегрирования исследовано характеристическое уравнение линеаризованной системы и в плоскости μ, e получены области устойчивости и неустойчивости. Результаты, полученные Дэнби, представлены

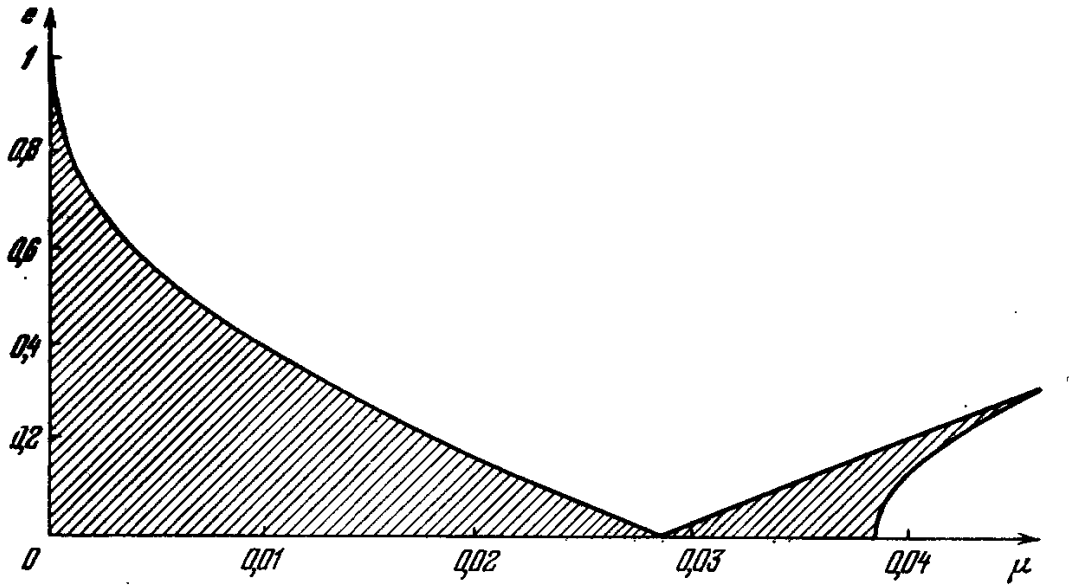

Рис. 12. Области устойчивости в линейном приближении.

на рис. 12. Области устойчивости на этом рисунке заштрихованы. Несколько позже в работах Гребеникова [19], Беннетта [103, 104] и Ланцано [150] были рассмотрены различные вопросы, связанные с устойчивостью в линейном приближении при малых e, а также численно исследованы характеристические показатели при произвольных значениях параметров e и μ. Совсем недавно появились новые работы по исследованию устойчивости треугольных решений [42, 99, 136, 160, 161]. В этих работах различными аналитическими способами в плоскости μ, e найдены границы областей устойчивости и неустойчивости. Наиболее точные построения осуществлены в работе Нейфеха и Кэмила [160]. В этой работе границы областей устойчивости и неустойчивости получены с точностью до четвертой степени эксцентриситета включительно и очень хорошо согласуются с результатами, полученными Дэнби при помощи численных расчетов.

Таким образом, устойчивость лагранжевых решений в первом приближении исследована достаточно полно. Обилие работ, посвященных этой задаче, объясняется ее важностью для небесной механики и трудно преодолимыми сложностями исследования линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений.

Но из достаточных условий устойчивости в первом приближении никаких заключений об устойчивости в строгом (нелинейном) смысле все же сделать нельзя. Строгое решение требует рассмотрения нелинейной задачи. И здесь исследование становится очень сложным и трудным, так как приходится рассматривать нелинейную неавтономную систему дифференциальных уравнений в критическом случае.

Некоторые замечания, касающиеся строгого решения задачи об устойчивости лагранжевых решений, сделаны в работе автора [62]. В этой работе при помощи численных расчетов проверены результаты работы Дэнби и в плоскости μ, e внутри областей устойчивости в первом приближении найдены кривые, на которых лагранжевы решения при строгом нелинейном анализе задачи могут оказаться неустойчивыми. Ниже в этой главе излагается полное исследование устойчивости лагранжевых решений в плоской эллиптической ограниченной задаче трех тел. Результаты этого исследования опубликованы в работах [59, 62, 65, 67].

§ 2. Линейная нормализация с точностью до первой степени эксцентриситета

Функция Гамильтона, соответствующая возмущенному движению в рассматриваемой задаче, записывается в виде (3.1) (см. главу 7), где пространственные q_3 и p_3 надо положить тождественно равными нулю, а эксцентриситет e может изменяться в интервале (0, 1). Мы проведем аналитическое (при малых эксцентриситетах) и численное (при произвольных e и μ) исследования.

В эллиптической задаче возможно явление параметрического резонанса. При малых значениях e границы областей неустойчивости можно найти аналитически, использовав результаты §§ 6 и 7 второй главы. Параметрический резонанс обнаруживается в окрестности тех значений параметра μ, для которых величины λ_1 и λ_2 в нормальной форме квадратичной части функции Гамильтона

$$H_2 = \frac{1}{2}\lambda_1(q_1^{*2} + p_1^{*2}) + \frac{1}{2}\lambda_2(q_2^{*2} + p_2^{*2}) \qquad (2.1)$$

связаны при $e = 0$ резонансными соотношениями второго порядка

$$2\lambda_1 = N, \quad 2\lambda_2 = N, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = N \quad (N \text{ — целое число}).$$

Очевидно (см. главу 7), что при $e = 0$ справедливы равенства $\lambda_1 = \omega_1$, $\lambda_2 = -\omega_2$, где ω_1 и ω_2 — корни уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0, \qquad (2.2)$$

а μ изменяется в области

$$0 < \mu < \mu_* = \frac{9 - \sqrt{69}}{18} = 0{,}038521\ldots \qquad (2.3)$$

На рис. 13 приведена зависимость частот ω_1 и ω_2 от μ. В области (2.3) выполнено только одно резонансное соотношение второго порядка $\omega_2 = 1/2$. При этом

$$\mu = \mu_0 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6} = 0{,}0285954\ldots$$

Расчеты по формулам § 7 главы 2 показывают, что при достаточно малых e границы области устойчивости в окрестности резонансного значения μ_0 с точностью до первой степени e имеют вид

$$\mu = \mu_0 \pm e \cdot 0{,}05641\ldots \qquad (2.4)$$

Эти границы в работе [160] получены с точностью до e^4. В [160] с точностью до членов порядка e^2 получена также граница области устойчивости, исходящая из граничной точки $\mu = \mu^*$.

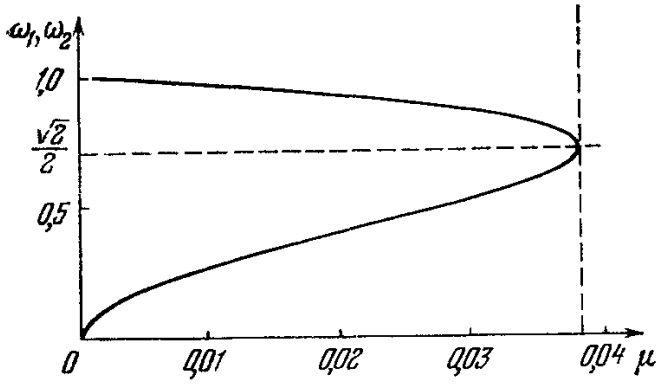

Рис. 13. Частоты ω_1 и ω_2 линейных колебаний в окрестности точек либрации.

Теперь рассмотрим задачу об устойчивости в нелинейной постановке. Эксцентриситет считаем малым, удовлетворяющим вместе с μ условиям устойчивости в первом приближении. Для решения задачи нужно функцию Гамильтона привести к нормальной форме, а затем, применив результаты главы 5, сделать выводы об устойчивости или неустойчивости точек либрации.

Сначала надо провести нормализацию квадратичной части функции Гамильтона. В этом параграфе построено линейное, вещественное, каноническое, 2π-периодическое по ν преобразование $q_i, p_i \to q_i^*, p_i^*$ $(i = 1, 2)$, приводящее квадратичную часть H_2 функции Гамильтона к нормальной форме (2.1). Нормализующее преобразование найдено с точностью до первой степени эксцентриситета.

Пусть $\omega_1 > \omega_2$. Сделаем сначала каноническую замену переменных $q_i, p_i \to q_i', p_i'$ по формулам (4.2) главы 7, а затем — по следующим формулам:

$$q_i' = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}\tilde{q}_i, \quad p_i' = \sqrt{\omega_i}\tilde{p}_i \qquad (i = 1, 2). \qquad (2.5)$$

В переменных $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ функция H_2 примет вид

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}\omega_1(\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2) + \\ + \frac{e\cos\nu}{1+e\cos\nu} \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2} \tilde{a}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \tilde{q}_1^{\nu_1} \tilde{q}_2^{\nu_2} \tilde{p}_1^{\mu_1} \tilde{p}_2^{\mu_2}. \quad (2.6)$$

Коэффициенты $\tilde{a}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ получаются такими:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_{2000} = -\alpha_1\omega_1(8\omega_1^4 - 2\omega_1^2 - 9), && \tilde{a}_{0200} = \alpha_2\omega_2(8\omega_2^4 - 2\omega_2^2 - 9), \\ &\tilde{a}_{0020} = 36\alpha_1\omega_1, && \tilde{a}_{0002} = -36\alpha_2\omega_2, \\ &\tilde{a}_{1100} = 16\beta\omega_1^2\omega_2^2, && \tilde{a}_{1010} = 16\alpha_1 k\omega_1^2, \\ &\tilde{a}_{1001} = -8\beta k\omega_1^2\omega_2, && \tilde{a}_{0110} = 8\beta k\omega_1\omega_2^2, \\ &\tilde{a}_{0101} = 16\alpha_2 k\omega_2^2, && \tilde{a}_{0011} = -36\beta\omega_1\omega_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В формулах (2.7) введены обозначения

$$\alpha_j = \frac{1}{2(2\omega_j^2 - 1)(4\omega_j^2 + 9)}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\omega_1\omega_2(16\omega_1^2\omega_2^2 + 117)(1 - 4\omega_1^2\omega_2^2)}}.$$

Теперь будем искать преобразование функции (2.7) к форме (2.1). Для удобства дальнейших вычислений перейдем сначала к комплексно сопряженным переменным q_j'', p_j'' по формулам

$$q_j'' = \tilde{p}_j + iq_j, \quad p_j'' = \tilde{p}_j - i\tilde{q}_j. \quad (2.8)$$

В комплексно сопряженных переменных функция Гамильтона вычисляется по формуле

$$H_2'' = 2i\mathcal{H}_2,$$

где $\mathcal{H}_2$ — функция (2.6), выраженная через q_j'', p_j'' согласно преобразованию (2.8). Получаем

$$H_2''(q_j'', p_j'', \nu) = i\omega_1 q_1'' p_1'' - i\omega_2 q_2'' p_2'' + \\ + 2i\frac{e\cos\nu}{1+e\cos\nu} \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2} a''_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{''\nu_1} q_2^{''\nu_2} p_1^{''\mu_1} p_2^{''\mu_2}. \quad (2.9)$$

В функции H_2'' коэффициенты таковы, что $a''_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \bar{a}''_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}$. Черта означает комплексно сопряженную величину. Выражения для коэффициентов получаются следующими:

$$a''_{2000} = \frac{1}{4}(-\tilde{a}_{2000} + \tilde{a}_{0020} - i\tilde{a}_{1010}),$$

$$\tilde{a}''_{0200} = \frac{1}{4}(-\tilde{a}_{0200} + \tilde{a}_{0002} - i\tilde{a}_{0101}),$$

$$a''_{1100} = \frac{1}{4}(-\tilde{a}_{1100} + \tilde{a}_{0011} - i\tilde{a}_{1001} - i\tilde{a}_{0110}),$$

$$\tilde{a}''_{1001} = \frac{1}{4}(\tilde{a}_{1100} + \tilde{a}_{0011} - i\tilde{a}_{1001} + i\tilde{a}_{0110}),$$

$$a''_{1010} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{2000} + \tilde{a}_{0020}), \quad \tilde{a}_{0101} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{0200} + \tilde{a}_{0002}). \tag{2.10}$$

Теперь найдем преобразование q''_j, $p''_j \to q_j^{**}$, p_j^{**} функции Гамильтона (2.9) к нормальной форме в комплексно сопряженных переменных

$$H_2^{**}(q_j^{**}, p_j^{**}) = i\lambda_1 q_1^{**} p_1^{**} + i\lambda_2 q_2^{**} p_2^{**}. \tag{2.11}$$

Пусть это преобразование задается при помощи производящей функции

$$q''_1 p_1^{**} + q''_2 p_2^{**} + S(q''_j, p_j^{**}, \nu),$$

где

$$S = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2} s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{''\nu_1} q_2^{''\nu_2} p_1^{**\mu_1} p_2^{**\mu_2},$$

причем коэффициенты $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ надо выбрать 2π-периодическими по ν. Связь переменных q''_j, p''_j и q_j^{**}, p_j^{**} получается из соотношений

$$q_j^{**} = q''_j + \frac{\partial S}{\partial p_j^{**}}, \quad p_j = p_j^{**} + \frac{\partial S}{\partial q''_j}, \tag{2.12}$$

имеет место тождество

$$H_2^{**}\left(q''_j + \frac{\partial S}{\partial p_j^{**}}, p_j^{**}\right) - H''_2\left(q''_j, p_j^{**} + \frac{\partial S}{\partial q''_j}, \nu\right) \equiv \frac{\partial S}{\partial \nu}. \tag{2.13}$$

Приравнивая одинаковые одночлены в обеих частях этого тождества, получим систему десяти дифференциальных уравнений для нахождения $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$. Правые части этой системы квадратичным образом зависят от $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ и содержат неопределенные еще величины λ_1, λ_2. Последние находятся из условий периодичности функций $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$.

Правые части системы дифференциальных уравнений при достаточно малых e будут аналитическими функциями e, если рассматривать значения μ из интервала (2.3), исключая граничную точку области параметрического резонанса $\mu_0 = 0{,}028595$. Действительно, легко проверить, что при этих значениях μ

$$|\omega_n \pm \omega_m| \neq N,$$

где $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $n = 1, 2$; $m = 1, 2$. Поэтому (см. § 6 второй главы) характеристические показатели будут аналитическими функциями e. Учитывая еще очевидную аналитичность H''_2

по e, получаем, что и функции $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ будут аналитическими по e.

Функции $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ и величины λ_1, λ_2 будем искать в виде рядов

$$s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = es^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + e^2 s^{(2)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + \ldots, \tag{2.14}$$

$$\lambda_1 = \omega_1 + e\lambda_1^{(1)} + e^2\lambda_1^{(2)} + \ldots, \quad \lambda_2 = -\omega_2 + e\lambda_2^{(1)} + e^2\lambda_2^{(2)} + \ldots \tag{2.15}$$

Подставив ряды (2.14) и (2.15) в тождество (2.13) и произведя разложение по степеням e, получим систему дифференциальных уравнений для $s^{(k)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$. Ограничимся нахождением нормализующего преобразования с точностью до первой степени эксцентриситета. Получаем систему уравнений

$$\frac{ds^{(1)}_{1010}}{d\nu} = -2i\cos\nu\, a''_{1010} + i\lambda_1^{(1)}, \quad \frac{ds^{(1)}_{0101}}{d\nu} = -2i\cos\nu\, a''_{0101} + i\lambda_2^{(1)}, \tag{2.16}$$

а для остальных восьми функций $s^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$

$$\frac{ds^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}}{d\nu} + i\left[(\nu_1-\mu_1)\omega_1 - (\nu_2-\mu_2)\omega_2\right] s^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = -2i\cos\nu\, a''_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}. \tag{2.17}$$

Из условий периодичности функций $s^{(1)}_{1010}$ и $s^{(1)}_{0101}$ получаем $\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 0$. Периодические решения системы (2.16) — (2.17) получаются следующими:

$$s^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \frac{2ia''_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}}{\left[(\nu_1-\mu_1)\omega_1 - (\nu_2-\mu_2)\omega_2\right]^2 - 1}\{\sin\nu + i\left[(\nu_1-\mu_1)\omega_1 - (\nu_2-\mu_2)\omega_2\right]\cos\nu\}. \tag{2.18}$$

Следует отметить, что функции $s^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ содержат только первые гармоники ν. Можно показать, рассматривая следующие приближения по e, что N-я гармоника появляется в функциях $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ с коэффициентом, пропорциональным эксцентриситету в степени, не меньшей N.

Теперь по комплекснозначной функции S найдем вещественное преобразование $\tilde{q}_j$, $\tilde{p}_j \to q_j^*$, p_j^* функции (2.6) к нормальной форме (2.1). Пусть она задается производящей функцией

$$\tilde{q}_1 p_1^* + \tilde{q}_2 p_2^* + K(\tilde{q}_j, p_j^*, \nu).$$

Так как функция K имеет порядок e, то из формул преобразования

$$q_j^* = \tilde{q}_j + \frac{\partial K}{\partial p_j^*}, \quad \tilde{p}_j = p_j^* + \frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_j}$$

с точностью до первой степени эксцентриситета получаем

$$\tilde{q}_j = q_j^* - \frac{\partial K^*}{\partial p_j^*}, \quad \tilde{p}_j = p_j^* + \frac{\partial K^*}{\partial q_j^*}, \tag{2.19}$$

где $K^* = K^{(1)}(q_j^*, p_j^*, \nu)$, а $K^{(1)}$ — коэффициент при первой степени e в разложении функции K по степеням эксцентриситета.

Выразим K^* через $S^{(1)}$. Из формул (2.12) с точностью до первой степени эксцентриситета находим

$$q_j'' = q_j^{**} - \frac{\partial S^{**}}{\partial p_j^{**}}, \quad p_j'' = p_j^{**} + \frac{\partial S^{**}}{\partial q_j^{**}}. \tag{2.20}$$

Здесь $S^{**} \equiv S^{(1)}(q_j^{**}, p_j^{**}, \nu)$. Далее, учитывая связь комплексных канонических переменных с вещественными

$$q_j'' = \tilde{p}_j + i\tilde{q}_j, \qquad p_j'' = \tilde{p}_j - i\tilde{q}_j,$$
$$q_j^{**} = p_j^* + iq_j^*, \quad p_j^{**} = p_j^* - iq_j^*$$

и обозначая через $W(q_j^*, p_j^*, \nu)$ функцию $S^{(1)}(p_j^* + iq_j^*, p_j^* - iq_j^*, \nu)$, находим из формул (2.20)

$$\tilde{q}_j = q_j^* - \frac{1}{2i}\frac{\partial W}{\partial p_j^*}, \quad \tilde{p}_j = p_j^* + \frac{1}{2i}\frac{\partial W}{\partial q_j^*}. \tag{2.21}$$

Сопоставляя формулы (2.19) и (2.21), получаем $K^* = \frac{1}{2i} W$.

Функция

$$K^* = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2} k_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{*\nu_1} q_2^{*\nu_2} p_1^{*\mu_1} p_2^{*\mu_2}$$

будет вещественной. При помощи формул (2.7), (2.10), (2.18) для ее коэффициентов получаем такие выражения:

$$\begin{aligned}
k_{2000} &= \gamma_1\omega_1[(16\omega_1^6 - 12\omega_1^4 - 88\omega_1^2 + 9)\sin\nu - 16k\omega_1^2\cos\nu],\\
k_{0200} &= -\gamma_2\omega_2[(16\omega_2^6 - 12\omega_2^4 - 88\omega_2^2 + 9)\sin\nu - 16k\omega_2^2\cos\nu],\\
k_{0020} &= 2\gamma_1\omega_1[(8\omega_1^6 - 2\omega_1^4 - 45\omega_1^2 + 18)\sin\nu + 8k\omega_1^2\cos\nu],\\
k_{0002} &= -2\gamma_2\omega_2[(8\omega_2^6 - 2\omega_2^4 - 45\omega_2^2 + 18)\sin\nu + 8k\omega_2^2\cos\nu],\\
k_{1100} &= -2\beta(9\sin\nu + 2k\cos\nu),\\
k_{1010} &= 2\gamma_1\omega_1^2[8k\sin\nu - (8\omega_1^4 - 2\omega_1^2 + 27)\cos\nu],\\
k_{1001} &= -2\beta\omega_2[2k\sin\nu + (4\omega_1^2 - 9)\cos\nu],\\
k_{0110} &= 2\beta\omega_1[2k\sin\nu + (4\omega_2^2 - 9)\cos\nu],\\
k_{0101} &= 2\gamma_2\omega_2^2[8k\sin\nu - (8\omega_2^4 - 2\omega_2^2 + 27)\cos\nu],\\
k_{0011} &= 8\beta\omega_1\omega_2(\sin\nu - k\cos\nu).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь введено обозначение $\gamma_j = [2(2\omega_j^2 - 1)(4\omega_j^2 - 1)(4\omega_j^2 + 9)]^{-1}$.

Таким образом, преобразование функции Гамильтона H_2 к нормальной форме с точностью до первой степени эксцентриситета найдено. Оно получается из трех пребразований: по формулам (4.2) главы 7, по формулам (2.5) и, наконец, по формулам (2.19). Коэффициенты функции K задаются формулами (2.22).

§ 3. Резонансные кривые

Для дальнейшего исследования надо привести к нормальной форме члены третьего и четвертого порядков в разложении функции Гамильтона. Нормальная форма будет различной в зависимости от того, будут параметры μ, e резонансными или нет. Оказывается, что в плоскости μ, e внутри области устойчивости линеаризованной задачи есть кривые, на которых выполняются резонансные соотношения третьего и четвертого порядков. Эти кривые при $e = 0$ исходят из точек $\mu^{(0)}$ оси $O\mu$, выписанных во второй строке табл. 2 и 3. На рис. 14 внутри области устойчивости

Таблица 2

Резонанс	$3\lambda_2 = -1$	$\lambda_2 + 2\lambda_2 = 0$	$2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$	$3\lambda_2 = -2$
$\mu^{(0)}$	0,014853	0,024294	0,035385	0,035385	0,038026
$\mu^{(2)}$	—0,085955	—0,286514	0,103135	0,300928	0,110288

Таблица 3

Резонанс	$4\lambda_2 = -1$	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$	$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2$	$2(\lambda_1 + \lambda_2) = 1$
$\mu^{(0)}$	0,008757	0,013516	0,016597	0,021286
$\mu^{(2)}$	—0,039023	—0,065356	—0,122576	—0,135998
Резонанс	$3\lambda_1 + \lambda_2 = 2$	$3\lambda_1 - \lambda_2 = 3$	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$	$4\lambda_1 = 3$
$\mu^{(0)}$	0,031232	0,035385	0,035385	0,037894
$\mu^{(2)}$	0,219357	—0,094658	0,169066	0,057200

линейной задачи построены резонансные кривые, которые были получены при помощи численных расчетов на ЭВМ при произвольных e. Найдем уравнения резонансных кривых при малых значениях эксцентриситета. Для этого λ_1 и λ_2 надо получить с

точностью до e^2, так как величины $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$ оказались равными нулю. Величины $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)}$ найдутся из условий периодичности функций $s_{1010}^{(2)}$ и $s_{0101}^{(2)}$. Действительно, из (2.13)—(2.15) получаем такие

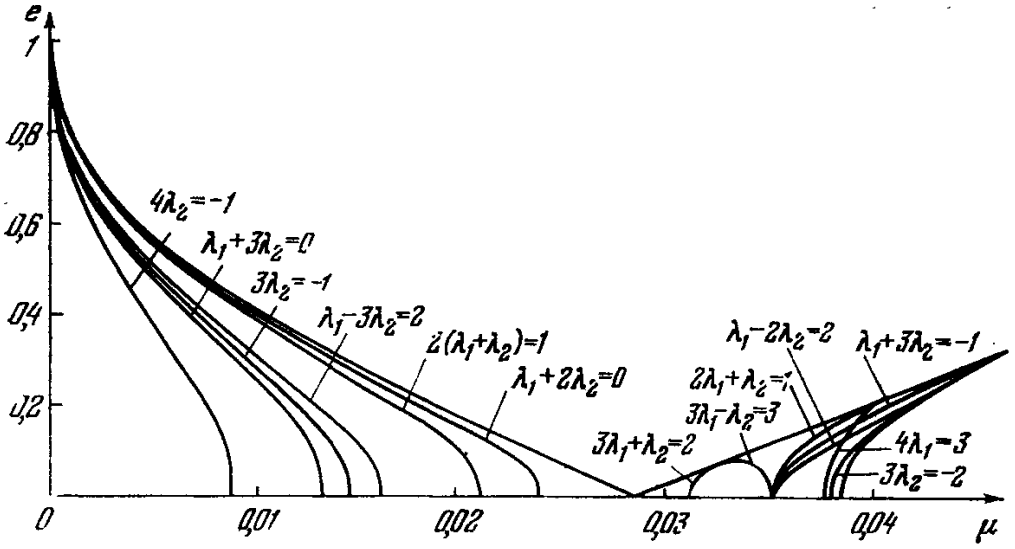

Рис. 14. Резонансные кривые.

дифференциальные уравнения для этих функций:

$$\begin{aligned}\frac{ds_{1010}^{(2)}}{d\nu} &= -2i\cos\nu\,(4a''_{0020}s_{2000}^{(1)} + a''_{1010}s_{1010}^{(1)} + a''_{1001}s_{0110}^{(1)} + a''_{0011}s_{1100}^{(1)}) + \\ &\quad + 2i\cos^2\nu a''_{1010} + i\lambda_1^{(2)},\\ \frac{ds_{0101}^{(2)}}{d\nu} &= -2i\cos\nu\,(4a''_{0002}s_{0200}^{(1)} + a''_{0110}s_{1001}^{(1)} + a''_{0101}s_{0101}^{(1)} + a''_{0011}s_{1100}^{(1)}) + \\ &\quad + 2i\cos^2\nu a''_{0101} + i\lambda_2^{(2)}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Подставив в правые части этих уравнений функции $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}^{(1)}$ и подобрав $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)}$ так, чтобы постоянные слагаемые в правых частях были равными нулю (условия периодичности $s_{1010}^{(2)}$ и $s_{0101}^{(2)}$), получим после некоторых преобразований, использующих формулы (2.7), (2.10) и уравнение (2.2), такие выражения для $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_2^{(2)}$:

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{\omega_1\omega_2^2(6\omega_1^2-7)}{4(4\omega_1^2-1)(2\omega_1^2-1)}, \quad \lambda_2^{(2)} = \frac{\omega_2\omega_1^2(6\omega_2^2-7)}{4(4\omega_2^2-1)(2\omega_2^2-1)}. \tag{3.2}$$

Резонансная кривая $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N$ при малых e будет иметь уравнение

$$\mu = \mu^{(0)} + e^2\mu^{(2)} + \ldots,$$

где $\mu^{(0)}$ — точка, из которой на оси $O\mu$ начинается резонансная

кривая. Учитывая (2.15), для величин $\mu^{(2)}$ получаем выражение

$$\mu^{(2)} = \frac{k_1\lambda_1^{(2)} + k_2\lambda_2^{(2)}}{k_2\frac{d\omega_2}{d\mu} - k_1\frac{d\omega_1}{d\mu}}. \tag{3.3}$$

В этом выражении правая часть вычисляется при $\mu = \mu^{(0)}$. Числовые значения величины $\mu^{(2)}$ для резонансных кривых третьего и четвертого порядков приведены в третьей строке табл. 2 и 3.

§ 4. Резонансы третьего порядка

Рассмотрим устойчивость лагранжевых решений при значениях параметров μ, e, принадлежащих резонансным кривым третьего порядка. При малых значениях эксцентриситета резонанс $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$ не может привести к неустойчивости, если в нормализованной функции Гамильтона учесть все члены только до третьего порядка относительно координат импульсов. Этот резонанс не приводит к неустойчивости и при учете в гамильтониане членов четвертого порядка, так как при $0 < e \ll 1$ резонансная кривая $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$ не пересекается с другими резонансными кривыми третьего и четвертого порядков.

Исследуем оставшиеся четыре резонанса третьего порядка. Исследование просто, хотя весьма громоздко. Основные трудности здесь связаны с проведением нормализации Биркгофа. Мы не будем приводить подробно все вычисления, так как они стандартны и очень громоздки. Укажем только на основные моменты, связанные с применением преобразования Биркгофа, и приведем конечный результат нормализации.

Во-первых, ясно, что коэффициенты нормальной формы функции Гамильтона будут аналитическими функциями e. Во-вторых, замечая, что N-я гармоника ν входит в производящую функцию линейного нормализующего преобразования, а также в H_3 и H_4 с коэффициентом, пропорциональным эксцентриситету в степени, не меньшей N, получаем, что при резонансе $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N$ отличие коэффициентов a_{k_1,k_2}, b_{k_1,k_2} в нормальной форме от нуля может обнаружиться только в N-м приближении по e.

Таким образом, неустойчивость при резонансе $3\lambda_0 = -2$ не может быть обнаружена, так как мы учитываем только первую степень эксцентриситета. Резонанс $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ проявляется уже в круговой задаче ($e = 0$). При малых e нормализованная функция Гамильтона будет иметь такой вид:

$$H = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + \sqrt{\rho_1}\rho_2[f_{1,2}\sin(\theta_1 + 2\theta_2) + g_{1,2}\cos(\theta_1 + 2\theta_2)] + \\ + O((\rho_1 + \rho_2)^2). \tag{4.1}$$

Здесь и в дальнейшем через ρ_i, θ_i обозначаются новые канонические переменные, введенные преобразованием Биркгофа. В

функции (4.1) приняты обозначения

$$f_{1,2} = -\frac{\sqrt{3}ka_1b_1a_2^2b_2^2}{192\omega_2\sqrt{2\omega_1}}(36\omega_2^6 + 245\omega_2^4 - 515\omega_2^2 + 176\omega_1\omega_2^3 + 288\omega_1\omega_2 - 54) + O(e^2),$$
$$g_{1,2} = \frac{\sqrt{3}ka_1b_1a_2^2b_2^2}{192\omega_2\sqrt{2\omega_1}}(88\omega_1\omega_2^6 + 448\omega_1^2\omega_2^3 + 74\omega_1\omega_2^4 + 45\omega_1\omega_2^2 - 594\omega_2 + 243\omega_1) + O(e^2). \quad (4.2)$$

Далее, так как на резонансной кривой $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ (как и на всех резонансных кривых) при малых e отличие μ от значения, соответствующего порождающей точке $\mu^{(0)}$, проявляется только при e^2, то, чтобы получить значения $f_{1,2}$, $g_{1,2}$ вдоль резонансной кривой с точностью до величин порядка e^2, нужно в формулах (4.2) положить $\mu = \mu^{(0)} = 0{,}024294$. Получим

$$f_{1,2} = 1{,}322 + O(e^2), \quad g_{1,2} = -0{,}298 + O(e^2).$$

Сделаем каноническое преобразование

$$\rho_i = R_i, \quad \theta_1 = \lambda_1\nu + \psi_1 + \delta, \quad \theta_2 = \lambda_2\nu + \psi_2, \quad (4.3)$$

где угол

$$\delta = -\arcsin\frac{g_{1,2}}{\sqrt{f_{1,2}^2 + g_{1,2}^2}}.$$

Теперь функция Гамильтона запишется в виде

$$H = a_{1,2}\sqrt{R_1R_2}\sin(\psi_1 + 2\psi_2) + O((R_1 + R_2)^2), \quad (4.4)$$

где коэффициент $a_{1,2} = 1{,}355 + O(e^2)$ и при достаточно малых e отличен от нуля. Поэтому (см. § 4 главы 5) для значений μ, e, лежащих на резонансной кривой $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, при достаточно малых e лагранжевы решения неустойчивы.

В случае резонансов $3\lambda_2 = -1$ и $2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ нормализованная функция Гамильтона имеет соответственно такой вид:

$$H = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + e\rho_2\sqrt{\rho_2}[f_{0,3}\sin(3\theta_2 + \nu) + g_{0,3}\cos(3\theta_2 + \nu)] + O((\rho_1 + \rho_2)^2),$$
$$H = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + e\rho_1\sqrt{\rho_2}[f_{2,1}\sin(2\theta_1 + \theta_2 - \nu) + g_{2,1}\cos(2\theta_1 + \theta_2 - \nu)] + O((\rho_1 + \rho_2)^2). \quad (4.5)$$

Значения коэффициентов на соответствующих резонансных кривых таковы:

$$f_{0,3} = 2{,}521 + O(e), \quad g_{0,3} = 0{,}780 + O(e),$$
$$f_{2,1} = -6{,}939 + O(e), \quad g_{2,1} = 2{,}372 + O(e).$$

Делая замену переменных, аналогичную (4.3), получим функции Гамильтона (4.5) в виде, аналогичном (4.4). При этом коэффициент $a_{k_1,k_2}=\sqrt{f^2_{k_1,k_2}+g^2_{k_1,k_2}}$ при малых e не будет равен нулю. Следовательно, на резонансных кривых $3\lambda_2=-1$ и $2\lambda_1+\lambda_2=1$ при достаточно малых e лагранжевы решения неустойчивы.

§ 5. Об устойчивости при резонансах четвертого порядка

В этом параграфе исследуется устойчивость лагранжевых решений при резонансах четвертого порядка. Резонансы $\lambda_1-3\lambda_2=2$ и $3\lambda_1-\lambda_2=3$ при малых значениях e не могут привести к неустойчивости при учете в нормальной форме функции Гамильтона членов не выше четвертого порядка относительно координат и импульсов [157].

Рассмотрим резонанс $\lambda_1+3\lambda_2=0$, обнаруживающийся уже в круговой задаче. На резонансной кривой $\lambda_1+3\lambda_2=0$ нормализованная функция Гамильтона получается такой:

$$H=\lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2+c_{20}\rho_1^2+c_{11}\rho_1\rho_2+c_{02}\rho_2^2-\\-\rho_2\sqrt{\rho_1\rho_2}\,[f_{1,3}\sin(\theta_1+3\theta_2)+g_{1,3}\cos(\theta_1+3\theta_2)]+\\+O((\rho_1+\rho_2)^{5/2}),$$

где коэффициенты с точностью до величин порядка e^2 имеют следующие числовые значения:

$$c_{20}=0{,}138,\quad c_{11}=-2{,}177,\quad c_{02}=0{,}247,$$
$$f_{1,3}=1{,}461,\quad g_{1,3}=4{,}235.$$

Делая замену переменных

$$\rho_i=R_i,\quad \theta_1=\lambda_1\nu+\psi_1+\gamma,\quad \theta_2=\lambda_2\nu+\psi_2,$$

где $\gamma=-\arcsin g_{1,3}/(g^2_{1,3}+f^2_{1,3})^{1/2}$, получаем функцию Гамильтона в виде

$$H=c_{20}R_1^2+c_{11}R_1R_2+c_{02}R_2^2+b_{1,3}R_2\sqrt{R_1R_2}\sin(\psi_1+3\psi_2)+\\+O((R_1+R_2)^{5/2}).$$

Для этой функции

$$3\sqrt{3}\,|b_{1,3}|=23{,}283+O(e^2),$$
$$|c_{20}+3c_{11}+9c_{02}|=4{,}171+O(e^2).$$

Поэтому при достаточно малых e условие неустойчивости (см. § 5 главы 5) выполняется и справедливо следующее утверждение: при значениях μ, e, принадлежащих резонансной кривой $\lambda_1+3\lambda_2=0$, для достаточно малых e лагранжево решение неустойчиво.

Теперь проверим выполнимость условий неустойчивости для остальных резонансных кривых четвертого порядка. Значения величины $c_{20}k_1^2 + c_{11}k_1k_2 + c_{02}k_2^2$ с точностью до величин порядка e^2 представлены в табл. 4.

Таблица 4

Резонанс	$4\lambda_1 = 3$	$2(\lambda_1+\lambda_2)=1$	$3\lambda_1 + \lambda_2 = 2$	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$	$4\lambda_2 = -1$
$c_{20}k_1^2 + c_{11}k_1k_2 + c_{02}k_2^2$	465,621	—71,366	82,782	202,874	7,517

Замечая, что при $e = 0$ коэффициент при тригонометрическом члене нормальной формы для этих резонансов обращается в нуль, получаем, что при достаточно малых значениях e имеет место устойчивость в рассматриваемом нелинейном приближении (при учете членов четвертого порядка в разложении функции Гамильтона).

§ 6. Исследование устойчивости при нерезонансных значениях параметров

Теперь рассмотрим устойчивость для значений параметров e и μ, лежащих в области устойчивости в первом приближении, но не принадлежащих резонансным кривым третьего и четвертого порядков. При таких значениях параметров функция Гамильтона возмущенного движения при помощи преобразования Биркгофа может быть приведена к форме

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}), \quad (6.1)$$

где с точностью до членов порядка e^2 коэффициенты c_{ij} вычисляются по формулам (4.6) седьмой главы, а $\lambda_1 = \omega_1$, $\lambda_2 = -\omega_2$.

Исследование устойчивости точек либрации при нерезонансных значениях параметров e и μ мы начнем с доказательства следующего утверждения.

Теорема. *В области устойчивости в первом приближении при μ, принадлежащем области* (2.3) *устойчивости в круговой задаче, и при значениях μ и e, не принадлежащих резонансным кривым третьего и четвертого порядков, треугольные точки либрации в плоской эллиптической ограниченной задаче трех тел устойчивы для большинства начальных условий, если эксцентриситет достаточно мал.*

Для доказательства достаточно проверить выполнимость неравенства $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0$ (см. § 1 главы 5) при $e = 0$. Пусть, как и в главе 8, $u = \omega_1^{-2}\omega_2^{-2}$. Тогда в области (2.3) $u > 4$. Использовав

явные выражения коэффициентов c_{ij} через ω_1, ω_2, получим

$$c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} = \frac{g(u)}{5184(4-u)^2(25-4u)^2}, \qquad (6.2)$$

где через $g(u)$ обозначен многочлен третьей степени

$$g(u) = 107172u^3 + 3298947u^2 - 8799272u - 384400.$$

Значения многочлена $g(u)$ и его производных при $u = 4$ таковы:

$$g = 24060672, \quad g^{\mathrm{I}} = 22736560, \quad g^{\mathrm{II}} = 9170022, \quad g^{\mathrm{III}} = 643032.$$

Так как все эти значения положительны, то многочлен $g(u)$ при $u > 4$ положителен и, следовательно, $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0$ при всех нерезонансных μ из области (2.3). Тем самым теорема об устойчивости для большинства начальных условий доказана.

Теперь, используя результаты теории многомерных гамильтоновых систем, изложенные в пятой главе, проведем еще анализ с точки зрения формальной устойчивости. Если в системе нет резонансов до четвертого порядка включительно, то функция Гамильтона, нормализованная до членов четвертой степени относительно q_i, p_i включительно, будет иметь вид (6.1) и знакоопределенность квадратичной формы $c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$ в квадранте $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ является достаточным условием формальной устойчивости [138]. Сначала рассмотрим случай отсутствия резонансов до четвертого порядка включительно.

Итак, пусть $\mu \neq \mu^{(0)}$, где $\mu^{(0)}$ — резонансные значения параметра μ, приведенные в табл. 2 и 3, а эксцентриситет e — малая величина. Знакоопределенность квадратичной формы $c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$ при $e = 0$ будет достаточным условием формальной устойчивости при $0 < e \ll 1$.

Так как при $e = 0$ для нерезонансных значений μ ($\mu \neq \mu_1$, $\mu \neq \mu_2$) из области (2.3) величина $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02}$ положительна, то условие знакоопределенности рассматриваемой квадратичной формы означает, очевидно, одинаковость знаков коэффициентов c_{ij} нормальной формы (6.1) при $e = 0$. Все коэффициенты c_{ij} имеют одинаковый знак (именно, положительны) в следующем интервале изменения μ (см. формулы (4.6) седьмой главы, а также рис. 6):

$$0{,}02429438\ldots = \mu_1 < \mu < \mu^* = 0{,}0385208\ldots \qquad (6.3)$$

Таким образом, мы показали, что в области устойчивости в первом приближении при μ, лежащем в интервале (6.3), и при значениях μ, e, не принадлежащих резонансным кривым третьего и четвертого порядков, треугольные точки либрации формально устойчивы, если эксцентриситет достаточно мал.

Если мы рассмотрим члены выше четвертого порядка в разложении функции Гамильтона в ряд относительно координат и

импульсов возмущенного движения, то можно показать формальную устойчивость для почти всех значений параметра μ из оставшегося интервала $0 < \mu < \mu_1$. Пусть μ лежит в этом интервале и при $e = 0$ не выполнены резонансные соотношения до шестого порядка включительно (соответствующие резонансные значения параметра $\mu^{(0)}$ приведены в табл. 5 и 6).

Таблица 5

Резонанс	$5\lambda_2 = -1$	$\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$	$\lambda_1 - 4\lambda_2 = 2$	$2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1$	$2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3$	$3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2$	$5\lambda_2 = -2$	$6\lambda_2 = -1$	$\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$
$\mu^{(0)}$	0,0057	0,0083	0,0093	0,0124	0,0190	0,0190	0,0203	0,0040	0,0055

Таблица 6

Резонанс	$\lambda_1 - 5\lambda_2 = 2$	$2(\lambda_1 + 2\lambda_2) = 1$	$2(\lambda_1 - 2\lambda_2) = 3$	$3(\lambda_1 + \lambda_2) = 2$	$2(2\lambda_1 + \lambda_2) = 3$	$\lambda_1 + 5\lambda_2 = -1$	$5\lambda_1 - \lambda_2 = 5$	$\lambda_1 - 5\lambda_2 = 3$	$3(\lambda_1 - \lambda_2) = 4$
$\mu^{(0)}$	0,0059	0,0078	0,0100	0,0115	0,0173	0,0190	0,0190	0,0218	0,0229

Тогда нормализованная до членов шестого порядка включительно функция Гамильтона имеет вид

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + c_{30} r_1^3 + c_{21} r_1^2 r_2 + c_{12} r_1 r_2^2 + c_{03} r_2^3 + O((r_1 + r_2)^{7/2}). \quad (6.4)$$

Если при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ и $e = 0$ система уравнений

$$\begin{aligned} c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 &= 0, \\ c_{30} r_1^3 + c_{21} r_1^2 r_2 + c_{12} r_1 r_2^2 + c_{03} r_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

не имеет решений, кроме тривиального $r_1 = r_2 = 0$, то для достаточно малых e, совершенно аналогично тому, как это сделано в § 3 предыдущей главы, можно доказать формальную устойчивость точек либрации для всех рассматриваемых сейчас параметров, за исключением, быть может, точек (e, μ), соответствующих двукратному резонансу $k_1'\lambda_1 + k_2'\lambda_2 = N'$, $k_1''\lambda_1 + k_2''\lambda_2 = N_2''$ ($|k_1'| + |k_2'| \geqslant 7$, $|k_1''| + |k_2''| \geqslant 7$).

В рассматриваемом сейчас интервале (6.3) изменения параметра μ ненулевые решения первого уравнения системы (6.5) можно записать в таком виде:

$$r_1 = \alpha_1(\mu) r_2, \quad r_1 = \alpha_2(\mu) r_2. \quad (6.6)$$

Расчеты показывают, что $\alpha_1(\mu) > 0$ во всем интервале (6.3), а α_2 — только в части этого интервала при $0 < \mu < \mu_{**} = 0{,}01574\ldots$ Таким образом, в интервале $0 < \mu < \mu_{**}$ первое уравнение системы (6.5) имеет две серии нетривиальных решений $r_1 = \alpha_k(\mu) r_2$ ($k = 1, 2$), а в интервале $\mu^{**} < \mu < \mu_1$ — одну серию решений $r_1 = \alpha_1(\mu)\, r_2$.

Чтобы выяснить вопрос о совместности системы (6.5), подставим решения первого уравнения $r_1 = \alpha_k r_2$ во второе уравнение. Тогда получим второе уравнение в виде $G_k(\mu) r_2^3 = 0$. Если $G_k(\mu) \neq 0$ ($k = 1, 2$), то система уравнений (6.5) имеет только тривиальное решение. Расчеты показали, что функция $G_1 = 0$ при $\mu = \mu' = 0{,}00861\ldots$ и $\mu = \mu'' = 0{,}01656\ldots$, а G_2 обращается в нуль только при одном значении $\mu = \mu''' = 0{,}00509\ldots$

Таким образом, результаты аналитического исследования формальной устойчивости при нерезонансных значениях параметров e и μ можно сформулировать в виде такого утверждения.

Теорема. *Если эксцентриситет достаточно мал, то в области устойчивости в первом приближении при значениях* μ, *не равных резонансным значениям* $\mu^{(0)}$, *приведенным в таблицах* 2, 3, 5, 6, *и при* μ, *не равных* μ', μ'', μ''', *а также, быть может, значениям* μ *из интервала* $(0, \mu_1)$, *соответствующим двукратному резонансу выше шестого порядка, точки либрации формально устойчивы.*

§ 7. Численное исследование при произвольных e и μ

Если значения эксцентриситета не малы, то исследование устойчивости необходимо проводить при помощи вычислений с использованием ЭВМ. При этом для фиксированных e и μ надо сначала при помощи ЭВМ найти линейное нормализующее преобразование, а затем произвести нормализацию нелинейной гамильтоновой системы. Соответствующие алгоритмы нормализации изложены во второй и четвертой главах. Там же получены нужные нам здесь критерии устойчивости и неустойчивости.

Характеристическое уравнение линейной системы является возвратным. Запишем его в виде

$$\rho^4 - a_1\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0. \tag{7.1}$$

Коэффициент a_1 равен следу фундаментальной матрицы линейной системы, вычисленной при $\nu = 2\pi$, a_2 — сумма всех ее главных миноров второго порядка.

В плоскости коэффициентов a_1, a_2 область устойчивости линейной системы задается системой неравенств [48]

$$-2 < a_2 < 6, \tag{7.2}$$
$$4(a_2 - 2) < a_1^2 < \frac{1}{4}(a_2 + 2)^2$$

и представляет собой внутренность криволинейного треугольника, изображенного на рис. 15.

Для значений a_1, a_2, лежащих в области устойчивости, характеристическое уравнение (7.1) имеет простые корни с модулями,

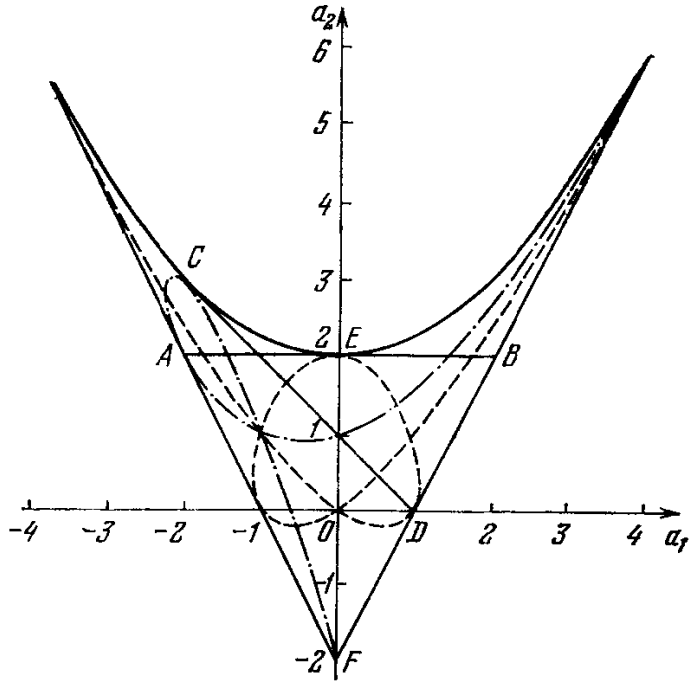

Рис. 15. Области устойчивости и резонансные кривые в плоскости коэффициентов характеристического уравнения:

равными единице. Вне треугольника, где уравнение (7.1) имеет

$C-D$ $\lambda_1 = N \pm \frac{1}{3}, \lambda_2 = N \pm \frac{1}{3}$; —·—·— $\lambda_1 \pm 2\lambda_2 = N$, $2\lambda_1 \pm \lambda_2 = N$,

$A-B$ $\lambda_1 = N \pm \frac{1}{4}$; $\lambda_2 = N \pm \frac{1}{4}$; $E-F$ $\lambda_1 \pm \lambda_2 = N + \frac{1}{2}$;

— — — $\lambda_1 \pm 3\lambda_2 = N$, $3\lambda_1 \pm \lambda_2 = N$ $(N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

хотя бы один корень с модулем, бо́льшим единицы, исследуемое движение неустойчиво. На границе криволинейного треугольника уравнение (7.1), не имея корней с модулями, большими единицы, имеет кратные корни с модулями, равными единице.

Пусть коэффициенты a_1 и a_2 лежат внутри криволинейного треугольника. Запишем корни уравнения (7.1) (мультипликаторы линейной системы) в виде

$$\rho_k = \exp(i2\pi\lambda k), \quad \rho_{k+2} = \exp(-i2\pi\lambda k). \tag{7.3}$$

Величины λ_k — вещественные числа ($\pm i\lambda_k$ — характеристиче-

ские показатели линейной системы). Коэффициенты характеристического уравнения (7.1) связаны с величинами λ_k посредством следующих соотношений:

$$a_1 = 2(\cos 2\pi\lambda_1 + \cos 2\pi\lambda_2), \quad a_2 = 2 + 4\cos 2\pi\lambda_1 \cos 2\pi\lambda_2. \quad (7.4)$$

Граница криволинейного треугольника соответствует параметрическому резонансу $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N$ (k_1, k_2, N — целые числа; $|k_1| + |k_2| = 1$ или 2). Эти резонансы обнаруживаются уже при анализе линейной задачи. Получим еще внутри криволинейного треугольника кривые, соответствующие резонансам третьего и четвертого порядков, обнаруживающимся при нелинейном анализе.

Из соотношений (7.4) получаем, что резонансные соотношения $3\lambda_k = N$, $4\lambda_k = N$ и $2(\lambda_1 \pm \lambda_2) = N$ осуществляются соответственно на прямых $a_2 = 1 - a_1$, $a_2 = 2$ и $a_1 = 0$. Резонансные соотношения $\lambda_i \pm 2\lambda_j = N$ и $\lambda_i \pm 3\lambda_j = N$ (i, $j = 1$, 2; $i \neq j$) осуществляются при значениях a_1 и a_2, удовлетворяющих соответственно равенствам $\cos 2\pi\lambda_i - \cos 4\pi\lambda_j = 0$ и $\cos 2\pi\lambda_i - \cos 6\pi\lambda_j = 0$. Все эти кривые изображены на рис. 15 внутри криволинейного треугольника.

Получим явные выражения величин λ_k через коэффициенты характеристического уравнения a_1 и a_2. Из равенств (7.4) следует, что $z = \cos 2\pi\lambda_1$ и $z = \cos 2\pi\lambda_2$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$4z^2 - 2a_1 z + (a_2 - 2) = 0. \quad (7.5)$$

Из этого уравнения и соотношений (7.4) величины λ_1 и λ_2 определяются неоднозначно. Для их однозначного определения воспользуемся непрерывностью λ_1 и λ_2 по параметру e. Рассмотрим предельный случай круговой задачи. При $e = 0$ корни уравнения (7.5) будут такими:

$$z_{1,2} = \frac{\cos 2\pi\omega_1 + \cos 2\pi\omega_2 \pm |\cos 2\pi\omega_1 - \cos 2\pi\omega_2|}{2}.$$

Нетрудно проверить, что $\cos 2\pi\omega_1 > \cos 2\pi\omega_2$. Поэтому

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Arccos} z_1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Arccos} z_2.$$

Далее, учитывая, что $1 > \omega_1 > \sqrt{2}/2 > \omega_2 > 0$, получаем

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2\pi}\arccos z_1 \text{ при любых } \omega_1 \text{ и } \omega_2,$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\arccos z_2 & \text{при } 0 < \omega_2 \leqslant \frac{1}{2}, \\ -1 + \frac{1}{2\pi}\arccos z_2 & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant \omega_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, неоднозначность в определении величин λ_1 и λ_2 устранена и при любых e внутри областей устойчивости линейной задачи, изображенных на рис. 12 они вычисляются по следующим формулам:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4} \quad \text{при любых значениях } \mu,$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4} & \text{при } \mu \leqslant \mu_0 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}, \\ -1 + \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{4} & \text{при } \mu \geqslant \mu_0. \end{cases} \tag{7.6}$$

Приведем сначала результаты численного исследования устойчивости для значений параметров e, μ, при которых выполнены резонансные соотношения третьего и четвертого порядков.

Прежде всего отметим, что резонансные кривые $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N$, для которых целые числа k_1 и k_2 имеют разные знаки, в подробном исследовании не нуждаются, так как для подобных резонансов имеет место формальная устойчивость [157], если отсутствуют другие резонансные соотношения любого порядка. В противном случае можно сделать утверждение об устойчивости при учете в разложении функции Гамильтона членов лишь до четвертого порядка включительно относительно координат и импульсов возмущенного движения.

В области устойчивости линеаризованной задачи в плоскости параметров e и μ существуют пять резонансных кривых третьего порядка и на четырех из них величины k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки. Резонансные кривые изображены на рис. 14. В результате численного анализа выяснено, что для всех четырех резонансных кривых $3\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $3\lambda_2 = -2$ имеет место неустойчивость по Ляпунову.

При резонансах четвертого порядка картина устойчивости более сложная. В области устойчивости линейной задачи существуют восемь кривых, на которых выполнены резонансные соотношения четвертого порядка. Эти кривые изображены на рис. 14. На шести из них в резонансных соотношениях $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N$ величины k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки. Проведенные расчеты показали, что на кривых резонансов четвертого порядка существуют как участки устойчивости в четвертом приближении (при учете в разложении гамильтониана членов до четвертого порядка), так и участки неустойчивости по Ляпунову. Результаты численных расчетов представлены в табл. 7.

На рис. 16 и 17 изображены все резонансные кривые третьего и четвертого порядков. На всех кривых, кроме $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ и

Таблица 7

Резонанс	Интервалы неустойчивости	Интервалы устойчивости в 4-м приближении
$4\lambda_2 = -1$	$0{,}022 < e < 0{,}611$	$0 < e < 0{,}022$; $0{,}611 < e < 0{,}8$
$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$	$0 \leqslant e < 0{,}141$	$0{,}141 < e < 0{,}8$
$2(\lambda_1 + \lambda_2) = 1$	$0{,}026 < e < 0{,}45$	$0 < e < 0{,}026$
$3\lambda_1 + \lambda_2 = 2$		$0 < e < 0{,}065$
$\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$	$0{,}196 < e < 0{,}207$	$0 < e < 0{,}196$; $0{,}207 < e < 0{,}24$
$4\lambda_1 = 3$		$0 < e < 0{,}19$

$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$, при $e = 0$ имеет место устойчивость по Ляпунову (см. главу 7). На резонансных кривых $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2$, $3\lambda_1 - \lambda_2 = 3$, $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$, изображенных на рисунках штрих-пунктирными

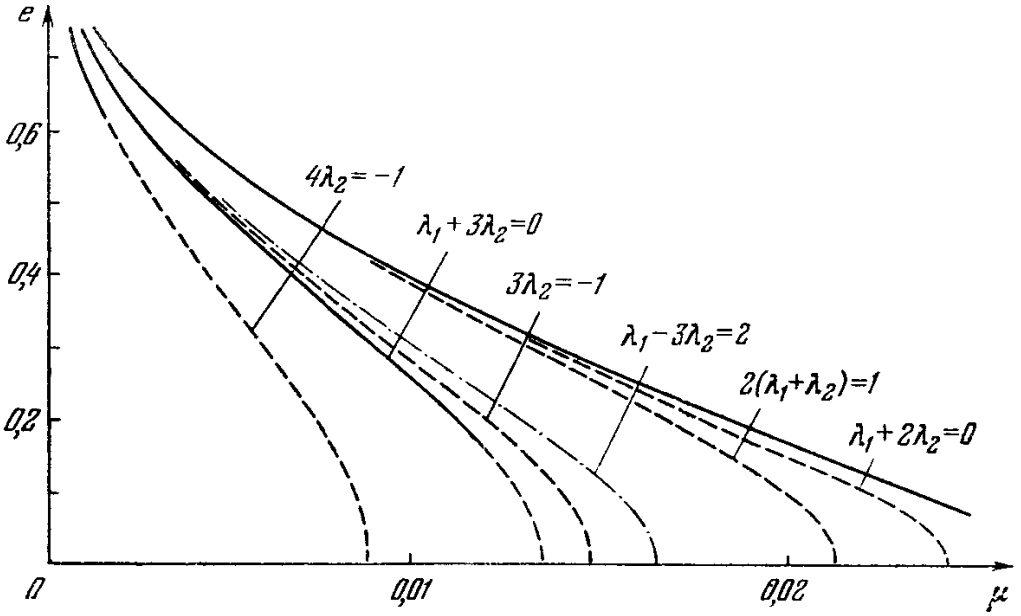

Рис. 16. Интервалы устойчивости и неустойчивости на резонансных кривых.

линиями, имеет место формальная устойчивость (при отсутствии других резонансных соотношений любого порядка). На резонансных кривых $3\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $3\lambda_2 = -2$ третьего порядка при $e \neq 0$ имеет место неустойчивость по Ляпунову. На рис. 16 и 17 эти кривые изображены пунктирными линиями. На резонансных кривых $4\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$, $2(\lambda_1 + \lambda_2) = 1$, $3\lambda_1 + \lambda_2 = 2$, $\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$ и $4\lambda_1 = 3$ четвертого порядка участки неустойчивости изображены пунктирными линиями, а участки устойчивости в четвертом приближении — сплошными линиями.

Было проведено также численное исследование устойчивости при значениях параметров, не лежащих на кривых, где выполнены

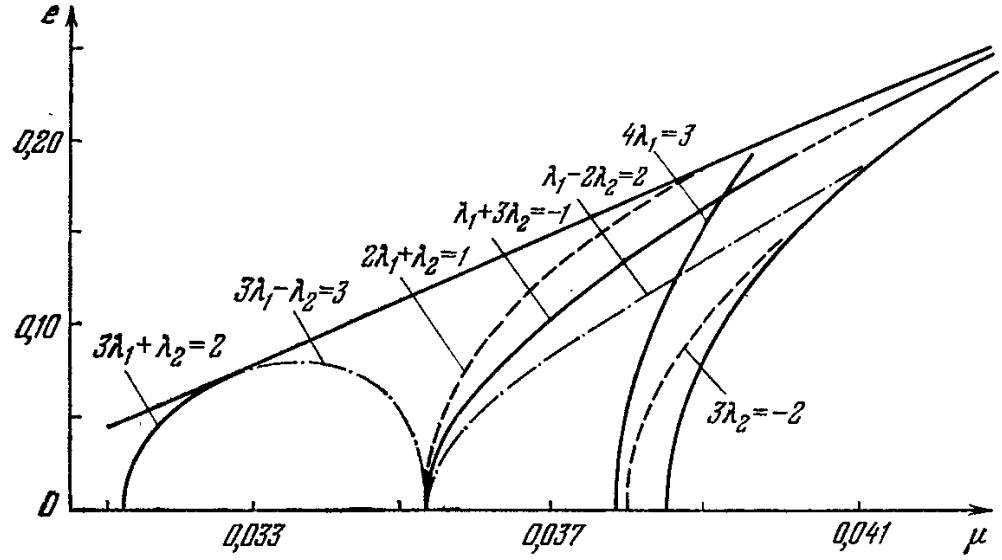

Рис. 17. Интервалы устойчивости и неустойчивости на резонансных кривых.

резонансные соотношения третьего и четвертого порядков. При этом из-за вычислительных трудностей, проявляющихся при

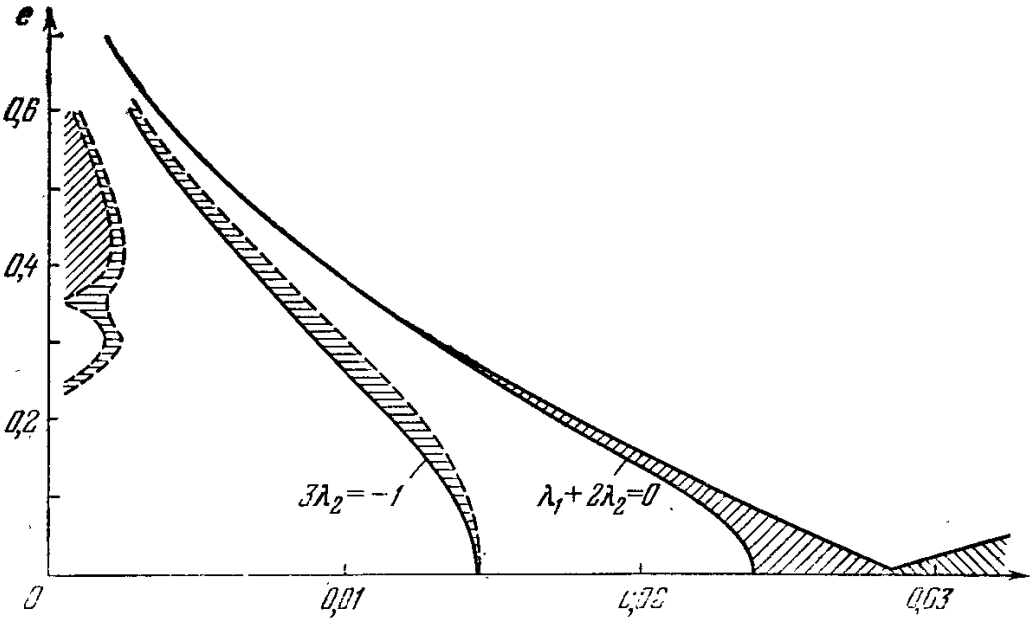

Рис. 18. Области формальной устойчивости.

больших значениях e или при малых значениях μ, а также вблизи границ областей устойчивости в линейном приближении, мы ограничились значениями параметров $e \leqslant 0{,}6$ и $0{,}001 < \mu < 0{,}042$.

Были проверены условия $D \equiv c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0$ устойчивости для большинства начальных условий, а также условие формальной устойчивости (знакоопределенность формы $c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$ в квадранте $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$). Результаты расчетов представлены на рис. 18 и 19. Устойчивость для большинства начальных условий имеет место почти всюду в области устойчивости линеаризованной задачи. Исключения составляют резонансные кривые,

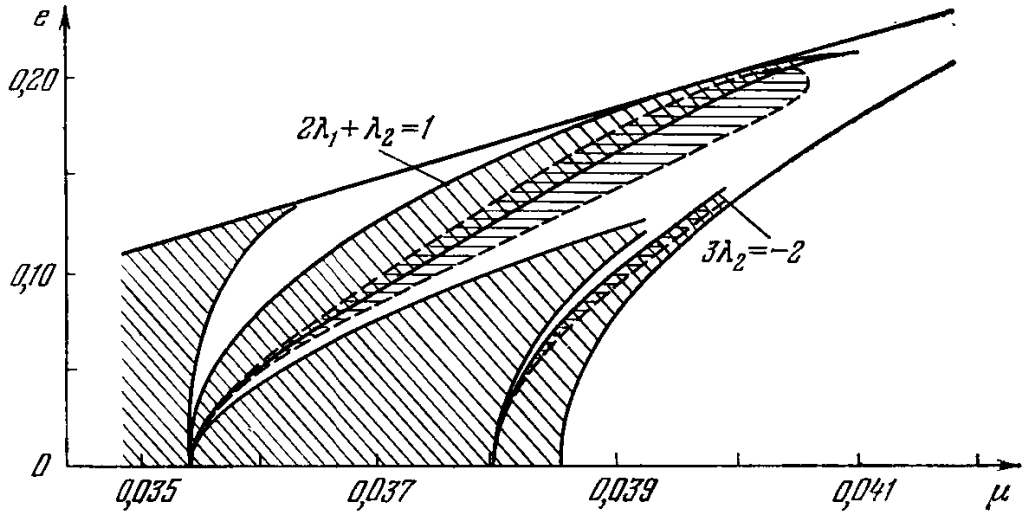

Рис. 19. Области формальной устойчивости.

которые мы уже рассмотрели, и, быть может кривые $D = 0$, изображенные на рис. 18 и 19 пунктирными линиями. Сплошными линиями на этих рисунках изображены кривые, на которых или выполнены резонансные соотношения третьего порядка (эти кривые надписаны), или те кривые, при переходе через которые все величины c_{ij} становятся одного знака (именно, положительными). Области формальной устойчивости на рис. 18 и 19 заштрихованы. При этом в областях, отмеченных горизонтальной штриховкой, выполнено условие $D < 0$, а в областях, отмеченных наклонной штриховкой $D > 0$, но все величины c_{ij} положительны.

Результаты, полученные при помощи численных расчетов, совпадают с результатами, полученными выше аналитическими методами при $0 \leqslant e \ll 1$.

§ 8. Обсуждение полученных результатов

Здесь кратко сформулируем и обсудим результаты аналитического и численного исследований устойчивости треугольных точек либрации, проведенных в настоящей главе.

Область устойчивости в первом приближении изображена на рис. 12. Мы провели подробное исследование устойчивости для значений параметров e и μ, лежащих внутри области устойчивости в первом приближении.

На рис. 14 построены кривые, соответствующие резонансам $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N$ третьего и четвертого порядков ($|k_1| + |k_2| = 3$ или 4). На тех резонансных кривых, для которых целые числа k_1 и k_2 имеют разные знаки, точки либрации устойчивы при учете в разложении функции Гамильтона членов до четвертого порядка включительно относительно координат и импульсов возмущенного движения; если же на таких кривых не выполняются другие резонансные соотношения более высокого порядка (выше четвертого), то имеет место формальная устойчивость. На кривых резонансов третьего порядка с одинаковыми знаками чисел k_1 и k_2 точки либрации оказались неустойчивыми по Ляпунову. На аналогичных кривых, соответствующих резонансам четвертого порядка, точки либрации либо неустойчивы по Ляпунову, либо устойчивы при учете в разложении гамильтониана членов до четвертого порядка включительно. Интервалы устойчивости и неустойчивости при резонансах четвертого порядка приведены в табл. 7. Устойчивость в случае кратных резонансов (соответствующих пересечению кривых резонансов третьего и четвертого порядков) не исследовалась.

Для значений параметров e и μ, при которых не выполнены резонансные соотношения третьего и четвертого порядков, показана устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий. При этом, кроме резонансных кривых третьего и четвертого порядков, пришлось исключить из рассмотрения кривые, на которых между коэффициентами нормальной формы выполнено соотношение $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} = 0$. Эти кривые изображены на рис. 18 и 19 пунктирными линиями. Для значений параметров e и μ, при которых нет резонансов третьего и четвертого порядков, было проведено исследование формальной устойчивости. На рис. 18 и 19 области формальной устойчивости отмечены штриховкой.

А каков ответ (кроме устойчивости по мере) на вопрос об устойчивости для значений параметров e и μ, которые лежат в незаштрихованной части плоскости e, μ на рис. 18 и 19 и при которых нет резонансов третьего и четвертого порядков? При достаточно малых e и значениях μ, не принадлежащих резонансным кривым пятого и шестого порядков (в табл. 5 и 6 приведены соответствующие порождающие точки $\mu^{(0)}$ при $e = 0$), а также при $\mu \neq \mu' = 0{,}00861$, $\mu \neq \mu'' = 0{,}01656\ldots$, $\mu \neq \mu''' = 0{,}00509\ldots$ и, быть может, значениям μ из интервала $(0, 0{,}0242938\ldots)$, соответствующим двукратным резонансам выше шестого порядка, в настоящей главе мы показали формальную устойчивость точек либрации. А какова ситуация при значениях e, не являющихся малыми и лежащих в незаштрихованных областях рис. 18 и 19?

Можно было бы в принципе провести нормализацию функции Гамильтона до членов шестого порядка включительно и показать,

что в незаштрихованных областях рис. 18 и 19 (вне кривых, соответствующих резонансам до шестого порядка включительно, и вне некоторого числа кривых, на которых система уравнений (6.5) имеет нетривиальное решение при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, и вне, быть может, тех точек (e, μ), в которых выполнены условия существования двукратных резонансов выше шестого порядка) имеет место формальная устойчивость. Но нормализация гамильтониана до членов шестого порядка в нашей задаче связана с чрезвычайно громоздкими вычислениями. Поэтому, исходя из того, что в «общем случае» результат исследования будет именно таким, как только что было сказано выше, мы и не проводили численного исследования при учете членов до шестого порядка в разложении функции Гамильтона.

В заключение выскажем еще некоторые соображения об устойчивости точек либрации для значений параметров e и μ, лежащих в незаштрихованных областях рис. 18 и 19 и принадлежащих кривым резонансов пятого и шестого порядков. Предположим, что резонансы однократные, т. е. выполняется только одно резонансное соотношение $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N$ при $|k_1| + |k_2| = 5$ или 6 и нет резонансных соотношений более высокого порядка. В «общем случае» такое предположение справедливо. Множество точек кратных резонансов имеет нулевую меру.

При резонансе пятого порядка функция Гамильтона в нормальной форме имеет вид

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \gamma r_1^{\frac{|k_1|}{2}} r_2^{\frac{|k_2|}{2}} \sin(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 - N\nu) + O((r_1 + r_2)^3).$$

А при резонансе шестого порядка нормальная форма будет такой:

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + c_{30} r_1^3 + c_{21} r_1^2 r_2 + c_{12} r_1 r_2^2 + c_{03} r_2^3 + \delta r_1^{\frac{|k_1|}{2}} r_2^{\frac{|k_2|}{2}} \sin(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 - N\nu) + O((r_1 + r_2)^{7/2}).$$

Если в резонансном соотношении $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N$ целые числа k_1 и k_2 имеют разные знаки, то, согласно Мозеру [157], имеет место формальная устойчивость. Если же k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки, то возможна неустойчивость, но для этого необходимо, чтобы величина $c_{20}k_1^2 + c_{11}k_1k_2 + c_{02}k_2^2$ равнялась нулю. В противном случае по теореме Брюно (см. главу 5) имеет место формальная устойчивость.

Число всех резонансных кривых пятого и шестого порядков равняется тридцати четырем: шестнадцать резонансных кривых пятого и восемнадцать — шестого порядков. Двадцати четырем

из них соответствуют резонансные соотношения с одинаковыми знаками k_1 и k_2: двенадцать резонансных соотношений пятого и двенадцать — шестого порядков.

Значения величины $c_{20}k_1^2 + c_{11}k_1k_2 + c_{02}k_2^2$ на всех резонансных кривых пятого и шестого порядков (с одинаковыми знаками у чисел k_1 и k_2) были вычислены на ЭВМ. При расчтах мы ограничились значениями $e \leqslant 0{,}5$. Значения параметров e и μ, при которых велиина $c_{20}k_1^2 + c_{11}k_1k_2 + c_{02}k_2^2$ обращается в нуль, представлены табл. 8. В ней же выписаны соответствующие резонансные соотношения.

Таблица 8

Резонанс	$3\lambda_1+2\lambda_2=2$	$5\lambda_2=-2$	$3\lambda_1+2\lambda_2=1$	$3\lambda_1+2\lambda_2=1$	$6\lambda_2=-1$	$4\lambda_1+2\lambda_2=3$	$\lambda_1+5\lambda_2=-1$	$2\lambda_1+4\lambda_2=-1$	$2\lambda_1+4\lambda_2=-1$	$5\lambda_1+\lambda_2=3$
e	0,192	0,061	0,141	0,191	0,498	0,179	0,078	0,135	0,181	0,144
μ	0,0161	0,0197	0,0392	0,0407	0,0015	0,0154	0,0183	0,0391	0,0406	0,0397

Для первых четырех пар резонансных значений e и μ табл. 8 в «общем случае» будет иметь место неустойчивость по Ляпунову, так как при резонансе пятого порядка условие неустойчивости $\gamma \neq 0$ в «общем случае» выполнено.

Для остальных шести пар резонансных значений e и μ, в зависимости от соотношений между коэффициентами нормальной формы функции Гамильтона, возможна как неустойчивость по Ляпунову, так и устойчивость в конечном порядке.

ГЛАВА 10

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Тождественный резонанс

В этой главе, следуя [64, 66], рассмотрим устойчивость треугольных точек либрации пространственной эллиптической задачи трех тел. Задача об устойчивости в этом случае по сравнению с уже рассмотренными в главах 7—9 случаями является самой сложной и громоздкой. Кроме увеличения числа степеней свободы изучаемой динамической системы, здесь возникает еще одна, характерная только для этой задачи, особенность: имеет место тождественный (т. е. существующий при всех e и μ) резонанс, возникающий из-за равенства периода кеплеровского движения основных притягивающих тел S и I и периода линейных колебаний тела P бесконечно малой массы по направлению, перпендикулярному плоскости их орбиты.

Упомянутый резонанс является резонансом первого порядка и в случае общей динамической системы он должен был бы привести к неустойчивости, которая была бы обнаружена уже при анализе линейной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения. Но в нашей конкретной задаче в линейном приближении этот резонанс не приводит к неустойчивости. Это происходит потому, что в линейной задаче плоские и пространственные колебания разделяются, а пространственное движение описывается при помощи функции Гамильтона

$$h = \frac{1}{2}(q_3^2 + p_3^2),$$

не содержащей возмущающих членов (имеющих частоту кеплеровского движения), которые могли бы привести к неустойчивости. В нелинейной задаче тождественный резонанс может привести к неустойчивости, но эффект неустойчивости проявляется только при учете в функции Гамильтона членов не ниже четвертого порядка по q_i, p_i и при учете в разложениях коэффициентов функции Гамильтона степеней эксцентриситета не ниже второй. Поэтому анализ устойчивости очень громоздок и труден. Ниже он проводится для случая малых значений e.

§ 2. Алгоритм линейной нормализации с точностью до второй степени эксцентриситета

Найдем линейное каноническое 2π-периодическое преобразование, нормализующее квадратичную часть гамильтониана возмущенного движения (см. разложение (3.1) в главе 7). С точностью до первой степени эксцентриситета такое преобразование найдено в § 2 предыдущей главы. Там же (в § 3) были найдены (с точностью до членов порядка e^2) выражения для величин λ_1 и λ_2 в нормальной форме квадратичной части гамильтониана

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(q_i^2 + p_i^2). \tag{2.1}$$

(Отметим, что в рассматриваемой пространственной задаче величина $\lambda_3 \equiv 1$). Теперь покажем, как найти нормализующее преобразование с точностью до членов порядка e^2.

Сначала сделаем преобразование $q_i,\ p_i \to q_i',\ p_i'$ по формулам (4.2) седьмой главы, а затем — преобразование $q_1',\ p_i' \to \tilde{q}_i,\ \tilde{p}_i$ по формулам (2.5) девятой главы. После этих двух преобразований квадратичная часть функции Гамильтона запишется в виде

$$H_2(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, \nu) = \bar{H}_2 + \frac{1}{2}(\tilde{q}_3^2 + \tilde{p}_3^2),$$

где $\bar{H}_2$ вычисляется по формуле (2.6) предыдущей главы. Так как часть гамильтониана H_2, соответствующая пространственным движениям, уже имеет нормальную форму, то в дальнейшем проведем нормализацию только функции $\bar{H}_2$.

Чтобы не вводить дополнительных обозначений, переменные, которые будут введены нормализующим преобразованием, обозначим, как и исходные переменные, через q_i, p_i. Пусть S — производящая функция преобразования $\tilde{q}_i,\ \tilde{p}_i \to q_i,\ p_i$:

$$S = \tilde{q}_1 p_1 + \tilde{q}_2 p_2 + \sum_{k_1+k_2+\mu_1+\mu_2=2} s_{k_1k_2\mu_1\mu_2}(\nu)\,\tilde{q}_1^{k_1}\tilde{q}_2^{k_2}p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}. \tag{2.2}$$

Функцию S ищем 2π-периодической по ν. Коэффициенты $s_{k_1k_2\mu_1\mu_2}(\nu)$ и величины λ_i представим в виде рядов

$$s_{k_1k_2\mu_1\mu_2} = ek_{k_1k_2\mu_1\mu_2}(\nu) + e^2 l_{k_1k_2\mu_1\mu_2}(\nu) + \ldots, \tag{2.3}$$

$$\lambda_1 = \omega_1 + e\lambda_1^{(1)} + e^2\lambda_1^{(2)} + \ldots,$$

$$\lambda_2 = -\omega_2 + e\lambda_2^{(1)} + e^2\lambda_2^{(2)} + \ldots \tag{2.4}$$

Величины $k_{k_1k_2\mu_1\mu_2}(\nu)$ найдены в предыдущей главе. Они вычисляются по формулам (2.22). Величины $\lambda_i^{(n)}$ находятся из условий периодичности функций $s_{k_1k_2\mu_1\mu_2}(\nu)$. В предыдущей главе найдено, что

$\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 0$, а $\lambda_i^{(2)}$ вычисляются по формулам (3.2). Кратко опишем теперь, как найти функции $l_{k_1k_2\mu_1\mu_2}(\nu)$. Подставив в тождество

$$H_2\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, p_i\right) \equiv \bar{H}_2\left(\tilde{q}_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \nu\right) + \frac{\partial S}{\partial \nu}$$

разложения (2.3), (2.4) и приравняв в его обеих частях члены при второй степени e, получим для функций $l_{k_1k_2\mu_1\mu_2}$ систему десяти линейных неоднородных дифференциальных уравнений, распадающуюся на три системы: две третьего и одну четвертого порядков.

Если величины $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_2^{(2)}$ вычисляются по формулам (3.2) девятой главы, то эти системы имеют π-периодическое решение.

После того как найдены функции $l_{k_1k_2\mu_1\mu_2}(\nu)$, получим выражение переменных $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$ через q_i, p_i. С точностью до членов порядка e^2 связь новых и старых переменных задается при помощи следующих формул:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{E} + e\mathbf{N}^{(1)} + e^2\mathbf{N}^{(2)}) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где элементы $n_{ij}^{(k)}$ матриц $\mathbf{N}^{(k)}$ получаются такими:

$$n_{11}^{(1)} = -k_{1010}, \quad n_{12}^{(1)} = -k_{0110}, \quad n_{13}^{(1)} = -2k_{0020}, \quad n_{14}^{(1)} = -k_{0011},$$
$$n_{21}^{(1)} = -k_{1001}, \quad n_{22}^{(1)} = -k_{0101}, \quad n_{23}^{(1)} = -k_{0011}, \quad n_{24}^{(1)} = -2k_{0002},$$
$$n_{31}^{(1)} = 2k_{2000}, \quad n_{32}^{(1)} = k_{1100}, \quad n_{33}^{(1)} = k_{1010}, \quad n_{34}^{(1)} = k_{1001},$$
$$n_{41}^{(1)} = k_{1100}, \quad n_{42}^{(1)} = 2k_{0200}, \quad n_{43}^{(1)} = k_{0110}, \quad n_{44}^{(1)} = k_{0101},$$
$$n_{11}^{(2)} = -l_{1010} + k_{1010}^2 + k_{1001}k_{0110}, \quad n_{12}^{(2)} = -l_{0110} + k_{1010}k_{0110} + k_{0110}k_{0101},$$
$$n_{13}^{(2)} = -2l_{0020} + 2k_{0020}k_{1010} + k_{0110}k_{0011}, \quad n_{14}^{(2)} = -l_{0011} + k_{1010}k_{0011} + 2k_{0110}k_{0002},$$
$$n_{21}^{(2)} = -l_{1001} + k_{1010}k_{1001} + k_{0101}k_{1001}, \quad n_{22}^{(2)} = -l_{0101} + k_{1001}k_{0110} + k_{0101}^2,$$
$$n_{23}^{(2)} = -l_{0011} + 2k_{0020}k_{1001} + k_{0101}k_{0011}, \quad n_{24}^{(2)} = -2l_{0002} + k_{1001}k_{0011} + 2k_{0002}k_{0101},$$
$$n_{31}^{(2)} = 2l_{2000} - 2k_{2000}k_{1010} - k_{1100}k_{1001}, \quad n_{32}^{(2)} = l_{1100} - 2k_{2000}k_{0110} - k_{1100}k_{0101},$$
$$n_{33}^{(2)} = l_{1010} - 4k_{2000}k_{0020} - k_{1100}k_{0011}, \quad n_{34}^{(2)} = l_{1001} - 2k_{2000}k_{0011} - 2k_{0002}k_{1100},$$

$$n_{41}^{(2)} = l_{1100} - 2k_{0200}k_{1001} - k_{1100}k_{1010}, \qquad n_{42}^{(2)} = 2l_{0200} - 2k_{0200}k_{0101} - k_{1100}k_{0110},$$

$$n_{43}^{(2)} = l_{0110} - 2k_{0200}k_{0011} - 2k_{0020}k_{1100}, \qquad n_{44}^{(2)} = l_{0101} - 4k_{0200}k_{0002} - k_{1100}k_{0011}.$$

Таким образом, линейное нормализующее преобразование с точностью до членов порядка e^2 найдено.

§ 3. Нормальная форма функции Гамильтона

После проведения линейной нормализации функция Гамильтона примет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(q_i^2 + p_i^2) + \sum_{m,\,n} h_{m,n}(\nu)\,q^m p^n + \ldots \qquad (3.1)$$

В этой формуле для краткости введено обозначение

$$h_{m,n}q^m p^n = h_{m_1n_2m_3n_1n_2n_3}q_1^{m_1}q_2^{m_2}q_3^{m_3}p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3},$$

суммирование происходит по целым неотрицательным числам m_i, n_i, сумма которых равна трем или четырем, а многоточием обозначены члены пятого и более высоких порядков относительно q_i, p_i. При этом для всех одночленов $h_{m,n}q^m p^n$ число $n_3 = 0$, а m_3 равно 0, 2 или 4, функции $h_{m,n}(\nu)$ — 2π-периодические по ν, а их разложения в ряды Фурье содержат первые и вторые гармоники ν с коэффициентами, пропорциональными соответственно первой и второй степеням эксцентриситета.

Нормализация членов третьей и четвертой степеней в H производится стандартным путем при помощи преобразования Биркгофа. Если число $r = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3$ не будет целым при целых k_i, сумма модулей которых не больше трех, то члены третьей степени в H можно исключить полностью.

Отметим, что так как в функцию (3.1) пространственные переменные входят только в четной степени, то число k_3, входящее в выражение для r, таково, что $|k_3|$ равен нулю или двум. Если $k_3 = 0$, то внутри области устойчивости в первом приближении r может быть целым числом на резонансных кривых третьего порядка, которые соответствуют плоской задаче трех тел. Эти кривые представлены на рис. 14.

Если же $|k_3| = 2$, то в силу того, что $\lambda_3 \equiv 1$, число r будет целым лишь тогда, когда либо λ_1, либо λ_2 будут целыми числами. Но это невозможно, так как при всех e и μ внутри области устойчивости в первом приближении $0 < |\lambda_i| < 1$ (см. формулы для λ_i в § 7 гл. 9). Таким образом, члены третьей степени в функции Гамильтона (3.1) можно уничтожить, если параметры e, μ не при-

надлежат резонансным кривым третьего порядка, представленным на рис. 14, и, следовательно, наличие резонанса $\lambda_3 \equiv 1$ в членах третьего порядка не проявится.

Обозначая через q_i', p_i' новые канонические переменные, вводимые преобразованием Биркгофа при уничтожении членов третьей степени, получаем, что функция Гамильтона в новых переменных будет иметь вид

$$H'(q_j', p_j') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (q_i'^2 + p_i'^2) + \sum_{m,\, n} h'_{m,\, n}(\nu)\, q'^m p'^n + \ldots \quad (3.2)$$

Здесь суммирование по m, n происходит для неотрицательных целых чисел m_i, n_i, сумма которых равна четырем, $h'_{m,\, n}(\nu)$ — 2π-периодические функции ν, в которые первые и вторые гармоники входят снова с коэффициентами, пропорциональными e и e^2 соответственно. Кроме того, q_3' и p_3' входят в члены четвертой степени функции (3.2) только в следующих четырех случаях:

$$m_3 = n_3 = 1;\ m_3 = 2,\ n_3 = 0;\ m_3 = 0,\ n_3 = 2;\ m_3 + n_3 = 4.$$

Теперь при помощи преобразования Биркгофа упростим члены 4-й степени в функции Гамильтона. Для удобства введем комплексно сопряженные канонические переменные q_j'', p_j'' по формулам

$$q_j'' = q_j' + ip_j', \quad p_j'' = q_j' - ip_j';$$

функция (3.2) в новых переменных примет вид

$$H'' = -i\lambda_1 q_1'' p_1'' - i\lambda_2 q_2'' p_2'' - i\lambda_3 q_3'' p_3'' + \sum_{m,\, n} h''_{m,\, n}(\nu)\, q''^m p''^n + \ldots \quad (3.3)$$

Величины q_3'', p_3'' входят в члены четвертой степени в четырех случаях: $m_3 = n_3 = 1$; $m_3 = 2$, $n_3 = 0$; $m_3 = 0$, $n_3 = 2$; $m_3 + n_3 = 4$. К функции H'' удобно применить преобразование Биркгофа. Если число

$$r = (m_1 - n_1)\lambda_1 + (m_2 - n_2)\lambda_2 + (m_3 - n_3)\lambda_3$$

не будет целым, то соответствующие члены четвертой степени могут быть исключены. Число r будет целым на кривых резонансов четвертого порядка, обнаруживающихся уже в плоской эллиптической задаче трех тел. Они представлены на рис. 14. Если параметры e, μ не принадлежат этим кривым, то все члены четвертой степени в H'', не содержащие q_3'', p_3'' (для них $m_3 = n_3 = 0$), можно уничтожить, кроме трех, которые зависят от произведений $q_1''p_1''$ и $q_2''p_2''$. Но коэффициенты при них можно сделать постоянными.

Рассмотрим теперь одночлены четвертой степени в H'', содержащие q_3'', p_3''. В этом случае из-за того, что имеет место резонанс

$\lambda_3 \equiv 1$, кроме трех одночленов, зависящих от произведений $q_j'' p_j''$ $(j = 1, 2, 3)$, нельзя уничтожить еще восемь одночленов, содержащих либо только q_3'' и p_3'', либо q_3'', p_3'' и произведения $q_1'' p_1''$ или $q_2'' p_2''$. Таким образом, если параметры e и μ не принадлежат кривым резонансов третьего или четвертого порядка, то в нормальной форме функции Гамильтона будет содержаться четырнадцать членов четвертого порядка. В табл. 9 приведены значения соответствующих им показателей степеней m_i, n_i. Пусть $\tilde{q}_j$, $\tilde{p}_j$ — канонические переменные, введенные преобразованием Биркгофа при упрощении членов четвертой степени. Если теперь перейти к вещественным «полярным» координатам по формулам

Таблица 9

$m_1 m_2 m_3 n_1 n_2 n_3$	$m_1 m_2 m_3 n_1 n_2 n_3$
2 0 0 2 0 0	1 0 1 1 0 1
0 2 0 0 2 0	1 0 0 1 0 2
1 1 0 1 1 0	0 0 4 0 0 0
0 1 2 0 1 0	0 0 2 0 0 2
0 1 1 0 1 1	0 0 0 0 0 4
0 1 0 0 1 2	0 0 3 0 0 1
1 0 2 1 0 0	0 0 1 0 0 3

$$\tilde{q}_j = i\sqrt{2\rho_j}\exp(-i\theta_j),$$

$$\tilde{p}_j = -i\sqrt{2\rho_j}\exp(i\theta_j) \quad (j = 1,2,3),$$

то получим такое выражение для нормализованной до членов четвертого порядка функции Гамильтона:

$$H = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + \rho_3 + A\rho_1^2 + B\rho_1\rho_2 + C\rho_2^2 + \rho_3(F_1\rho_1 + F_2\rho_2 + F_3\rho_3) + \bar{H}, \qquad (3.4)$$

где $\bar{H}$ 2π-периодична по угловым переменным θ_j и ν и имеет пятый порядок относительно $\sqrt{\rho_j}$. В функции Гамильтона (3.4) введены обозначения

$$F_i = D_i + E_i \sin(2\theta_3 - 2\nu) + G_i \cos(2\theta_3 - 2\nu) + K_i \sin(4\theta_3 - 4\nu) + L_i \cos(4\theta_3 - 4\nu).$$

Величины A, B, C, D_i, E_i, G_i, K_i, L_i не зависят от θ_1, θ_2, θ_3 и ν и аналитичны по e при достаточно малом его значении. Коэффициенты A, B, C, D_i при $e = 0$ вычислены в зависимости от μ в [63, 111] и приведены в седьмой и восьмой главах. При малых e в них возникает поправка порядка e^2. Коэффициенты E_i, G_i при $0 < e \ll 1$ имеют порядок e^2, а K_3 и L_3 — порядок e^4; K_1, K_2, L_1 и L_2 равны нулю.

§ 4. Исследование устойчивости системы с функцией Гамильтона (3.4)

После проведения нормализации задача об устойчивости треугольных точек либрации свелась к исследованию устойчивости положения равновесия $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ системы с функцией Гамильтона (3.4). Для исследования устойчивости сделаем сначала

замену переменных $\theta_3 = \nu + \psi$. Тогда уравнения движения сохраняют гамильтонов вид, но нормализованная часть функции Гамильтона не будет содержать истинную аномалию и член, линейный по ρ_3, и будет иметь вид

$$H = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + A\rho_1^2 + B\rho_1\rho_2 + C\rho^2 + \\ + \rho_3(F_1\rho_1 + F_2\rho_2 + F_3\rho_3) + \bar{H}, \quad (4.1)$$

где теперь

$$F_i = D_i + E_i \sin 2\psi + G_i \cos 2\psi + K_i \sin 4\psi + L_i \cos 4\psi.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Если* $F_3(\psi) \neq 0$ *при любых значениях* ψ, *то положение равновесия устойчиво при учете в нормальной форме* (4.1) *членов до четвертого порядка включительно по* $\sqrt{\rho_i}$; *если же существуют значения* ψ, *при которых* $F_3(\psi) = 0$, *но при этих значениях* $dF_3/d\psi \neq 0$, *то положение равновесия неустойчиво по Ляпунову.*

Первое утверждение сформулированной теоремы можно доказать при помощи теоремы Ляпунова об устойчивости. Для этого заметим, что если в нормальной форме отбросить члены выше четвертого порядка по $\sqrt{\rho_i}$, то укороченная функция Гамильтона $H - \bar{H}$ будет интегралом движения. Кроме того, ρ_1 и ρ_2 тоже будут интегралами. Для доказательства устойчивости функцию Ляпунова берем в виде

$$V = \rho_1^2 + \rho_2^2 + (H - \bar{H})^2. \quad (4.2)$$

Ясно, что $dV/dt \equiv 0$, а функция V определенно-положительна, если уравнение $F_3(\psi) = 0$ не имеет корней. Отсюда следует, что положение равновесия $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ устойчиво (для системы с укороченной функцией Гамильтона $H - \bar{H}$).

Второе утверждение теоремы доказывается несколько сложнее. Для доказательства используем теорему Четаева о неустойчивости. Пусть существуют значения ψ, при которых $F_3(\psi) = 0$, и при этих значениях производная $dF_3/d\psi \neq 0$. Из этого условия и периодичности функции $F_3(\psi) = 0$ следует, что среди корней уравнения $F_3(\psi) = 0$ существует по крайней мере одно значение, $\psi = \psi^*$, для которого $dF_3/d\psi < 0$.

Для доказательства неустойчивости функцию Четаева возьмем в виде

$$V = \rho_3[\cos(2\psi - 2\psi^*) - \cos 2\varepsilon] - (\rho_1 + \rho_2)^{4/5}. \quad (4.3)$$

Здесь ε — положительное сколь угодно малое число, которое подберем так, чтобы функция V удовлетворяла теореме Четаева о неустойчивости.

За область $V > 0$ примем область, определяемую такими условиями:

$$\rho_1 + \rho_2 < \rho_3^{5/4} [\cos(2\psi - 2\psi^*) - \cos 2\varepsilon]^{5/4}, \qquad (4.4)$$
$$\psi = \psi^* + \eta\varepsilon \quad (-1 < \eta < 1).$$

В этой области справедливы следующие оценки:

$$\cos(2\psi - 2\psi^*) - \cos 2\varepsilon = 2(1 - \eta^2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4),$$
$$\sin(2\psi - 2\psi^*) = 2\eta\varepsilon + O(\varepsilon^3),$$
$$F_3(\psi) = F_3'(\psi^*)\eta\varepsilon + O(\varepsilon^2), \qquad (4.5)$$
$$F_3'(\psi) = F_3'(\psi^*) + O(\varepsilon),$$
$$\rho_1 = O(\rho_3^{5/4}), \quad \rho_2 = O(\rho_3^{5/4}).$$

Теперь, учитывая уравнения движения с функцией Гамильтона (4.1) и принимая во внимание оценки (4.5), после проведения несложных вычислений, получаем в области $V > 0$ выражение для производной

$$\frac{dV}{dt} = \rho_3^2 [-2F_3'(\psi^*)(1 + 3\eta^2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) + O(\rho_3^{1/4})]. \qquad (4.6)$$

Из этого выражения видно, что если ε — достаточно малая (но фиксированная) величина, то в достаточно малой окрестности положения равновесия $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ производная dV/dt положительна в области $V > 0$. Согласно теореме Четаева, отсюда следует неустойчивость положения равновесия.

§ 5. Устойчивость точек либрации при малых e

Рассмотрим устойчивость точек либрации для малых значений эксцентриситета. Покажем, что если параметры e и μ находятся в области устойчивости в первом приближении и не принадлежат резонансным кривым третьего и четвертого порядков, то при достаточно малых значениях e (зависящих от μ) треугольные точки либрации устойчивы, если в нормальной форме функции Гамильтона пренебречь членами выше четвертого порядка по $\sqrt{\rho_i}$.

Пусть μ не равно ни одному из значений $\mu^{(0)}$, задаваемых табл. 2 и 3 главы 9, и принадлежит интервалу $0 < \mu < \mu^*$ устойчивости в первом приближении для круговой задачи. Тогда при малых значениях эксцентриситета отсутствуют резонансы третьего и четвертого порядка и нормальная форма функции Гамильтона будет иметь вид (4.1). Рассмотрим свойства нормальной формы при малых e. Согласно § 4, для доказательства устойчивости нужно проверить, что функция $F_3(\psi)$ отлична от нуля при любых значениях ψ.

В выражении для F_3 слагаемые, содержащие угол ψ, при малых значениях e могут быть сделаны сколь угодно малыми, а коэффициент D_3 при уменьшении e стремится к функции $c_{002}(\mu)$, имеющей вид (см. формулу для $c_{002}(\mu)$ в восьмой главе)

$$c_{002}(\mu) = -\frac{3\mu(1-\mu)}{16+9\mu(1-\mu)}. \qquad (5.1)$$

Следовательно, для любого фиксированного μ существует достаточно малое положительное число $e^*(\mu)$ такое, что при $0 \leqslant e < e^*(\mu)$ функция $F_3(\psi)$ будет отрицательной и, значит, уравнение $F_3(\psi) = 0$ не будет иметь корней. Отсюда и следует устойчивость лагранжевых решений.

§ 6. Неустойчивость точек либрации при малых μ и e

Из (5.1) видно, что величина $c_{002}(\mu)$ обращается в нуль при $\mu = 0$. Поэтому при малых e и μ возможно появление областей неустойчивости. Но тут уже качественных оценок, использующих малость эксцентриситета, недостаточно для исследования. Для того, чтобы неустойчивость могла быть обнаружена, следует получать числовые значения коэффициентов функции $F_3(\psi)$ или хотя бы исследовать их поведение при малых e и μ. Результаты такого исследования приводятся ниже. Оказывается, что при достаточно малых e и μ действительно существует область неустойчивости. Ниже будет получено приближенное уравнение границы этой области в плоскости e, μ.

Если учитывать степени эксцентриситета не выше второй, то коэффициенты K_3 и L_3 равны нулю и функция $F_3(\psi)$ может быть записана в виде

$$F_3(\psi) = c_{002} + e^2\alpha + e^2(\delta \sin 2\psi + \gamma \cos 2\psi), \qquad (6.1)$$

где α, δ, γ — некоторые функции μ, а c_{002} имеет вид (5.1).

Функция (6.1) при выполнении неравенства

$$|c_{002} + e^2\alpha| < e^2\sqrt{\delta^2+\gamma^2} \qquad (6.2)$$

может обратиться в нуль, если, например,

$$\psi = \psi^* = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\gamma} - \frac{1}{2}\arccos\frac{c_{002}+e^2\alpha}{e^2\sqrt{\delta^2+\gamma^2}} + \frac{\pi}{2}.$$

При этом $F_3'(\psi^*) < 0$. Таким образом, если e — достаточно малая величина, то неравенство (6.2) есть условие неустойчивости лагранжевых решений.

Было исследовано поведение функций, стоящих в обеих частях неравенства (6.2) при μ, стремящемся к нулю. При этом, если для

c_{002} это можно сделать, используя формулу (5.1), то для функций α и $\sqrt{\delta^2+\gamma^2}$ исследование очень громоздко и оно проводилось на вычислительной машине. Оказалось, что имеют место равенства

$$c_{002} = -0{,}1875\mu + \varepsilon_1(\mu), \quad \alpha = -0{,}0781\mu + \varepsilon_2(\mu),$$

$$\sqrt{\delta^2+\gamma^2} = 0{,}12\cdot 10^{-7} + \varepsilon_3(\mu),$$

где $\varepsilon_i(\mu)$ — бесконечно малые величины при μ, стремящемся к нулю, причем порядок малости ε_1 и ε_2 выше первого.

Из неравенства (6.2) получаем теперь такое условие неустойчивости при достаточно малых e и μ:

$$e^2 > 15625000\mu. \tag{6.3}$$

Полученная в плоскости e, μ область неустойчивости лагранжевых решений является очень узкой. При малых e и μ одной из ее границ является ось Oe, а другой — кривая, мало отличающаяся от параболы $e = 3953\sqrt{\mu}$.

Отметим в заключение, что обнаруженная неустойчивость лагранжевых решений является следствием резонанса, связанного с тем, что частота вращения тел S и J равна частоте колебаний тела P по направлению, перпендикулярному плоскости их вращения. Этот резонансный эффект проявляется только в эллиптической пространственной задаче. В случае круговой пространственной задачи этот резонанс к неустойчивости не приводит.

§ 7. Результаты численного исследования при произвольных e и μ. Устойчивость лагранжевых решений в системе Солнце—Юпитер

В этом параграфе кратко опишем численное исследование треугольных точек либрации в системе Солнце—Юпитер, а также результаты численного исследования при произвольных e и μ. Исследование было приведено на ЭВМ с применением метода точечных отображений (см. главу 6).

Итак, пусть параметры e и μ соответствуют системе Солнце — Юпитер: $e = 0{,}04825382$, $\mu = 0{,}00095388$. Сначала нужно найти линейное нормализующее пребразование. Алгоритм его получения изложен в § 5 главы 2. Линейная нормализация части гамильтониана, соответствующей пространственным переменным q_3, p_3, не требуется, так как пространственная часть гамильтониана H_2 уже с самого начала имеет нормальную форму. Займемся поэтому нормализацией части гамильтониана плоского движения.

Расчеты показывают, что фундаментальная матрица решений $X(\nu)$ соответствующей системы дифференциальных уравнений при

$\nu = 2\pi$ будет такой:

$$\mathbf{X}(2\pi) = \begin{Vmatrix} 10{,}246067 & 15{,}765014 & -16{,}830551 & 9{,}400540 \\ -5{,}435207 & -8{,}372406 & 9{,}934193 & -5{,}646301 \\ 5{,}056440 & 8{,}591016 & -8{,}181647 & 5{,}105433 \\ 8{,}833277 & 15{,}135589 & -16{,}094789 & 10{,}055308 \end{Vmatrix}. \quad (7.1)$$

Величины λ_1 и λ_2 вычисляем по формулам (7.6) предыдущей главы. Получаем

$$\lambda_1 = 0{,}996758, \quad \lambda_2 = -0{,}080802.$$

Теперь надо найти какое-либо решение системы уравнений (5.10) второй главы. Положим для определенности четвертые компоненты векторов $\mathbf{e}_k$ вещественными и равными единице. Тогда действительные и мнимые части собственных векторов получаются такими:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{Vmatrix} 1{,}256976 \\ -1{,}371205 \\ -0{,}036985 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{s}_1 = \begin{Vmatrix} 1{,}389429 \\ 0{,}273188 \\ 1{,}020730 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{Vmatrix} 1{,}052220 \\ -0{,}607786 \\ 0{,}576385 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{Vmatrix} -0{,}042113 \\ -0{,}040441 \\ -0{,}030937 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Для скалярных произведений $(\mathbf{r}_k, \mathbf{I}\,\mathbf{s}_k)$ получаем такие числовые значения:

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{I}\mathbf{s}_1) = 1{,}061233, \quad (\mathbf{r}_2, \mathbf{I}\mathbf{s}_2) = 0{,}032162.$$

Далее, из уравнений (5.9) главы 2 находим элементы матрицы D

$$d_{11} = 0{,}485361, \quad d_{22} = 2{,}788069.$$

Теперь уже можно выписать нормализующую матрицу $\mathbf{N} = \mathbf{X}(\nu) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\nu)$, где

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} -1{,}348748 & 0{,}234825 & 1{,}220173 & 5{,}867325 \\ -0{,}265189 & 0{,}225503 & -1{,}331058 & -3{,}389100 \\ -0{,}990844 & 0{,}172509 & -0{,}035902 & 3{,}214000 \\ 0 & 0 & 0{,}970721 & 5{,}576138 \end{Vmatrix}, \quad (7.2)$$

$$\mathbf{Q}(\nu) = \begin{Vmatrix} \cos\lambda_1\nu & 0 & -\sin\lambda_1\nu & 0 \\ 0 & \cos\lambda_2\nu & 0 & -\sin\lambda_2\nu \\ \sin\lambda_1\nu & 0 & \cos\lambda_1\nu & 0 \\ 0 & \sin\lambda_2\nu & 0 & \cos\lambda_2\nu \end{Vmatrix}.$$

Для получения матрицы $\mathbf{N}$ при каком-либо значении ν нужно на ЭВМ интегрировать систему линейных дифференциальных уравнений шестнадцатого порядка.

Применив далее алгоритм, изложенный в главе 6, получим производящую функцию точечного отображения в окрестности точки либрации

$$S(r_i^0, \varphi_i) = S_2 + S_3 + S_4 + \ldots, \quad (7.3)$$

где

$$S_2 = r_1^{(0)}(\varphi_1 - 2\pi\lambda_1) + r_2^{(0)}(\varphi_2 - 2\pi\lambda_2) + r_3^{(0)}(\varphi_3 - 2\pi), \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned}S_3 = {} & r_1^0\sqrt{r_1^0}\,(0{,}036399\sin\varphi_1 + 0{,}01804\cos\varphi_1 - 0{,}00846\sin 3\varphi_1 + \\ & + 0{,}102115\cos 3\varphi_1) + \\ & + r_1^0\sqrt{r_2^0}\,[8{,}405704\sin\varphi_2 + 2{,}566987\cos\varphi_2 + 1{,}668032\sin(2\varphi_1+\varphi_2) + \\ & + 7{,}148056\cos(2\varphi_1+\varphi_2) - \\ & - 4{,}391994\sin(2\varphi_1-\varphi_2) - 5{,}111227\cos(2\varphi_1-\varphi_2)] + \\ & + r_2^0\sqrt{r_1^0}\,[1{,}598739\sin\varphi_1 + 1{,}071356\cos\varphi_1 + 22{,}212749\sin(\varphi_1+2\varphi_2) + \\ & + 36{,}913857\cos(\varphi_1+2\varphi_2) - 45{,}757428\sin(\varphi_1-2\varphi_2) - \\ & - 3{,}059325\cos(\varphi_1-2\varphi_2)] + r_2^0\sqrt{r_2^0}\,(98{,}462795\sin\varphi_2 + \\ & + 27{,}099158\cos\varphi_2 + 70{,}044213\sin 3\varphi_2 + 62{,}756218\cos 3\varphi_2) + \\ & + r_3^0\sqrt{r_1^0}\,[0{,}036203\sin\varphi_1 + 0{,}022801\cos\varphi_1 - \\ & - 0{,}006181\sin(\varphi_1+2\varphi_3) - 0{,}00381\cos(\varphi_1+2\varphi_3) + \\ & + 0{,}019144\sin(\varphi_1-2\varphi_3) + 0{,}011722\cdot\cos(\varphi_1-2\varphi_3)] + \\ & + r_3^0\sqrt{r_2^0}\,[4{,}566664\sin\varphi_2 + 1{,}085301\cdot\cos\varphi_2 + \\ & + 0{,}137253\sin(\varphi_2+2\varphi_3) + 0{,}032885\cos(\varphi_2+2\varphi_3) - \\ & - 0{,}022454\sin(\varphi_2-2\varphi_3) - 0{,}004787\cos(\varphi_2-2\varphi_3)]. \quad (7.5)\end{aligned}$$

В выражении для S_4 выпишем только те одночлены, которые необходимы для получения нормальной формы функции Гамильтона

$$\begin{aligned}S_4 = {} & 85{,}43976r_1^{0^2} + 5293{,}02\,r_1^0r_2^0 + 25475{,}856r_2^{0^2} + \\ & + r_1^0r_3^0(39{,}69968 + 0{,}09557\sin 2\varphi_3 + 0{,}967033\cos 2\varphi_3 + \\ & + 0{,}000163\sin 4\varphi_3 + 0{,}0000005\cos 4\varphi_3) + \\ & + r_2^0r_3^0(929{,}176 - 3{,}333\sin 2\varphi_3 + 25{,}54123\cos 2\varphi_3 + \\ & + 0{,}00324\sin 4\varphi_3 + 0{,}00008\cos 4\varphi_3) + \\ & + r_3^{0^2}(10{,}65544 + 0{,}00087\sin 2\varphi_3 + 0{,}5505\cos 2\varphi_3 + \\ & + 0{,}00009\sin 4\varphi_3 - 0{,}00712\cos 4\varphi_3). \quad (7.6)\end{aligned}$$

Теперь, согласно алгоритму главы 6, проведем нормализацию полученного отображения и по его нормальной форме найдем нормальную форму соответствующей функции Гамильтона. Она имеет вид (3.4). Коэффициенты A, B и C с точностью до четырех знаков таковы:

$$A = 0{,}0057,\ B = -0{,}1483,\ C = 0{,}6159.$$

Для этих значений коэффициентов

$$B^2 - 4AC = 0{,}0079 \neq 0.$$

Таким образом (см. главу 5), в плоской задаче имеет место устойчивость треугольных точек либрации для большинства начальных условий.

Коэффициенты функций F_i с точностью до пяти знаков будут такими:

$$D_1 = 0{,}00580, \quad E_1 = 0{,}00001, \quad G_1 = 0{,}00001, \quad K_1 = 0, \quad L_1 = 0,$$
$$D_2 = 0{,}05509, \quad E_2 = -0{,}00038, \quad G_2 = -0{,}00029, \quad K_2 = 0, \quad L_2 = 0,$$
$$D_3 = -0{,}00017, \quad E_3 = 0, \quad G_3 = 0, \quad K_3 = 0, \quad L_3 = 0.$$

Функция $F_3(\psi)$ при всех ψ, очевидно, отрицательна. Поэтому (см. § 4) в пространственной задаче треугольные точки либрации устойчивы при учете в нормальной форме функции Гамильтона членов до четвертого порядка включительно по координатам и импульсам возмущенного движения.

Были проведены также численные расчеты с очень частой сеткой в плоскости e и μ для произвольных значений параметров. Неустойчивость точек либрации пространственной эллиптической задачи обнаружена не была. Но при расчетах, из-за резкого возрастания времени интегрирования, нельзя подойти произвольно близко к оси $\mu = 0$ и к резонансным кривым второго (граница области устойчивости линейной задачи) и третьего порядков. По-видимому, области неустойчивости, если и существуют, то их границы проходят очень близко к этим резонансным кривым. Отметим еще раз, что существование очень узкой области неустойчивости при малых μ и e в этой главе мы показали аналитическими методами.

ГЛАВА 11

ОСНОВЫ МЕТОДА ДЕПРИ—ХОРИ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

§ 1. Введение

Многие задачи небесной механики описываются каноническими дифференциальными уравнениями, задаваемыми функцией Гамильтона H, содержащей малый параметр ε:

$$H = H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \varepsilon), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{X}^T = (X_1, \ldots, X_n)$ — векторы координат и импульсов соответствующей механической задачи.

Пусть параметр ε входит в гамильтониан H аналитически. Если при $\varepsilon = 0$ рассматриваемая каноническая система интегрируема, то для качественного и количественного изучения движения при $|\varepsilon| \ll 1$ часто ищут каноническую замену переменных $\mathbf{x}, \mathbf{X} \to \mathbf{y}, \mathbf{Y}$, близкую к тождественной и приводящую функцию Гамильтона (1.1) к такой форме, которая позволила бы достаточно просто провести исследование тех или иных свойств движения в изучаемой механической задаче. В качестве примера можно привести неоднократно встречавшиеся в предыдущих главах преобразования, исключающие из функции Гамильтона нерезонансные члены.

Если исходная функция Гамильтона не содержит время t, то при традиционном подходе преобразование $\mathbf{x}, \mathbf{X} \to \mathbf{y}, \mathbf{Y}$ может быть найдено при помощи метода Цейпеля [9]. Преобразование $\mathbf{x}, \mathbf{X} \to \mathbf{y}, \mathbf{Y}$ задается при этом при помощи производящей функции S, зависящей от смешанных (новых и старых) переменных:

$$S = S(\mathbf{y}, \mathbf{X}; \varepsilon), \quad S(\mathbf{y}, \mathbf{X}; 0) = (\mathbf{y}, \mathbf{X}). \tag{1.2}$$

Через $(\mathbf{y}, \mathbf{X})$ в (1.2) обозначено скалярное произведение векторов $\mathbf{y}$ и $\mathbf{X}$. Преобразование $\mathbf{x}, \mathbf{X} \to \mathbf{y}, \mathbf{Y}$ задается неявно при помощи соотношений

$$\mathbf{x} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{y}}. \tag{1.4}$$

Отметим, что рассмотренное в главе 3 преобразование Биркгофа во многих отношениях аналогично преобразованию метода Цейпеля.

Можно отметить следующие существенные недостатки теории возмущений, основанной на применении метода Цейпеля. Во-первых, нахождение преобразования $x, X \to y, Y$ требует очень громоздких вычислений. В самом деле, для выражения переменных x, X через y, Y надо сначала обратить нелинейное уравнение (1.4), чтобы выразить вектор импульсов X через новые переменные y, Y, а потом результат обращения подставить в правую часть уравнения (1.3), чтобы явно выразить вектор координат x через y, Y. С практической точки зрения упомянутые операции обращения и подстановки являются весьма трудоемкими. Во-вторых, для получения обратного преобразования $y, Y \to x, X$ нужно выполнить такой же объем вычислений, как и при нахождении прямого преобразования. Здесь требуется сначала обратить уравнение (1.3), чтобы выразить y через x, X, а затем результат подставить в (1.4) для получения выражения Y через x, X. В-третьих, неявные соотношения (1.3) и (1.4) метода Цейпеля не дают общего алгоритма преобразования достаточно произвольной функции $f(x, X; \varepsilon)$ первоначальных фазовых переменных x, X в функцию новых переменных y, Y. На практике такой алгоритм очень часто необходим.

В последнее десятилетие в работах [108, 113, 142, 143, 155, 156] разработан новый способ построения канонического преобразования $x, X \to y, Y$, в котором устранены упомянутые недостатки метода Цейпеля. Основные достоинства этого способа состоят в следующем:

1) формулы замены переменных $x, X \to y, Y$ получаются в явной форме;

2) обратное преобразование не требует никаких дополнительных вычислений;

3) формулы преобразования пригодны не только для координат и импульсов, но и для любой функции от них, в частности для гамильтониана;

4) формулы метода задаются рекуррентно и необходимые вычисления могут быть достаточно просто реализованы на ЭВМ.

Метод, разработанный в [108, 113, 142, 143, 155, 156], основывается на простой идее, использующей тот факт, что преобразование фазового пространства, осуществляемое при помощи движений гамильтоновой системы, является каноническим [16]. Практическое осуществление канонических преобразований в работах [108, 113, 142, 143, 155, 156] опирается на использование рядов Ли и преобразования Ли.

Основы упомянутого метода разработаны независимо Хори [142] и Депри [113]. Дальнейшие работы [94, 108, 137, 143, 144, 155, 156, 171] содержат его более детальную разработку и отладку. Краткое изложение основных идей метода канонических преобразо-

ваний Депри — Хори содержится в лекциях К. В. Холшевникова [94] и монографии Джакалья [137].

Настоящая глава посвящена изложению основ метода Депри — Хори в теории возмущений канонических систем. Для ясности изложения предварительно рассматриваются ряды Ли и их некоторые свойства. Затем следует подробное изложение метода Депри в модификации Кэмила. И в заключение главы кратко рассматривается преобразование Хори. При изложении материала этой главы используются оригинальные публикации авторов метода, лекции К. В. Холшевникова [94], монография Джакалья [137], а также мало известная работа Кэмила [144].

§ 2. Ряды Ли как каноническое преобразование

Наряду с исходной канонической системой дифференциальных уравнений, задаваемой функцией Гамильтона (1.1), рассмотрим вспомогательную каноническую систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}}, \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}}, \tag{2.1}$$

где $W(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ — произвольная достаточно гладкая функция.

Пусть при $t = 0$ $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Обозначим решение системы (2.1) при $t = \varepsilon$ через

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon, W), \quad \mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon, W). \tag{2.2}$$

Произвольная функция от $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ в силу соотношений (2.2) становится некоторой функцией от $\mathbf{y}$, $\mathbf{Y}$, а также от ε и W:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon, W), \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon, W)) = \bar{f}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon, W). \tag{2.3}$$

Здесь и далее в настоящем параграфе чертой обозначается результат замены переменных, осуществляемой согласно формулам (2.2). Так как функции $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{X}}$ в (2.2) являются решениями гамильтоновой системы (2.1), то преобразование (2.2) будет каноническим [16]. Мы ограничимся рассмотрением случая малых значений $|\varepsilon|$.

Понятие ряда Ли вытекает из решения задачи Коши

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}|_{t=0} = \mathbf{Z}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{z}^{\mathrm{T}} = (z_1, \ldots, z_m)$ и $\mathbf{g}^{\mathrm{T}} = (g_1, \ldots, g_m)$ — аналитическая функция своих аргументов в окрестности точки $\mathbf{Z}$. Решение задачи (2.4) при $t = \varepsilon$ дается *рядом Ли* [139]

$$\mathbf{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D^n \mathbf{Z} = \exp(\varepsilon D)\,\mathbf{Z}, \tag{2.5}$$

сходящимся при достаточно малом ε. Здесь D — *оператор Ли*

$$D = \sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbf{Z}) \frac{\partial}{\partial Z_i}, \qquad D^0 = 1, \quad D^{n+1} = DD^n. \tag{2.6}$$

Если система уравнений (2.4) имеет вид (2.1), то результат применения оператора D к функции f запишется так:

$$L_W f = (f \cdot W), \tag{2.7}$$

где $(f \cdot W)$ — скобка Пауссона

$$(f \cdot W) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{Y}}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{y}}\right). \tag{2.8}$$

Выражение (2.7) называется *производной Ли функции* f, *порожденной функцией* W, а оператор L_W — *оператором Ли*.

Имеют место следующие, легко проверяемые свойства оператора Ли:

$$\begin{aligned}
&1) \quad L_W(\alpha f + \beta g) = \alpha L_W f + \beta L_W g \qquad (\alpha, \beta \text{ — const}),\\
&2) \quad L_W(fg) = gL_W f + fL_W g,\\
&3) \quad L_W(f \cdot g) = (L_W f \cdot g) + (f \cdot L_W g),\\
&4) \quad L_W L_V f = L_V L_W f + L_{(W \cdot V)} f.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Используя (2.9), нетрудно доказать свойства степеней оператора Ли:

$$\begin{aligned}
&1) \quad L_W^n(\alpha f + \beta g) = \alpha L_W^n f + \beta L_W^n g \qquad (\alpha, \beta \text{ — const}),\\
&2) \quad L_W^n(fg) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_W^m f L_W^{n-m} g,\\
&3) \quad L_W^n(f \cdot g) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (L_W^m f \cdot L_W^{n-m} g).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{2.11}$$

Пусть функции W и f — аналитические. Тогда очевидно, что при достаточно малом ε ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} L_W^m f = \exp(\varepsilon L_W) f \tag{2.12}$$

будет сходящимся. Легко проверить, что имеют место следующие

свойства оператора $\exp(\varepsilon L_W)$:

$$\begin{aligned}
&1)\ \exp(\varepsilon L_W)(\alpha f+\beta g)=\alpha\exp(\varepsilon L_W)f+\beta\exp(\varepsilon L_W)g \\
&\qquad\qquad(\alpha,\ \beta\ -\ \text{const}), \\
&2)\qquad \exp(\varepsilon L_W)(fg)=\exp(\varepsilon L_W)f\exp(\varepsilon L_W g), \\
&3)\qquad \exp(\varepsilon L_W)(f\cdot g)=(\exp(\varepsilon L_W)f\cdot\exp(\varepsilon L_W)g).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Каноническое преобразование (2.2) при помощи ряда Ли запишется в виде

$$\mathbf{x}=\exp(\varepsilon L_W)\,\mathbf{y},\quad \mathbf{X}=\exp(\varepsilon L_W)\,\mathbf{Y}. \tag{2.14}$$

Преобразование, обратное (2.14), получается, очевидно, заменой знака ε на обратный или, что то же самое, изменением на обратный знака функции W. Таким образом, имеем

$$\mathbf{y}=\exp(\varepsilon L_{-W})\,\mathbf{x},\quad \mathbf{Y}=\exp(\varepsilon L_{-W})\,\mathbf{X}. \tag{2.15}$$

Важным достоинством ряда Ли является то, что он позволяет не только получить преобразование (2.14), но и произвольную функцию f от решения. Для любой аналитической функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ справедливо следующее соотношение:

$$\bar{f}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon)=f(\exp(\varepsilon L_W)\,\mathbf{y}, \exp(\varepsilon L_W)\mathbf{Y})=\exp(\varepsilon L_W)f(\mathbf{y}, \mathbf{Y}). \tag{2.16}$$

В самом деле, очевидно, что

$$L_W\bar{f}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon)=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}^*},\ L_W\mathbf{z}^*\right), \tag{2.17}$$

где $\mathbf{z}^*$ — $2n$-мерный вектор, $\mathbf{z}^{*\mathrm{T}}=(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n)$, а $L_W\mathbf{z}^*$ — $2n$-мерный вектор, k-я компонента которого равна $(z_k\cdot W)$.

Продифференцировав (2.14) по ε, получим

$$\frac{\partial \mathbf{z}^*}{\partial\varepsilon}=L_W\mathbf{z}^*. \tag{2.18}$$

Из соотношений (2.17) и (2.18) следует, что

$$L_W\bar{f}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon)=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}^*},\ \frac{\partial \mathbf{z}^*}{\partial\varepsilon}\right)=\frac{\partial\bar{f}}{\partial\varepsilon}. \tag{2.19}$$

Аналогично подсчитывается, что

$$L_W^n\bar{f}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon)=\frac{\partial^n\bar{f}}{\partial\varepsilon^n}$$

или

$$\left.\frac{\partial^n\bar{f}}{\partial\varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0}=L_W^n\bar{f}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, 0)=L_W^n f(\mathbf{y}, \mathbf{Y}). \tag{2.20}$$

Следовательно, разложение функции $\bar{f}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon)$ в ряд Тейлора относительно ε дает соотношения

$$\bar{f}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial^n \bar{f}}{\partial \varepsilon^n}\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_W^n f(\mathbf{y}, \mathbf{Y}) = \exp(\varepsilon L_W) f(\mathbf{y}, \mathbf{Y}).$$

Формула (2.16) доказана.

Пусть теперь функция f зависит от ε и при малых ε представима в виде ряда

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}). \tag{2.21}$$

Тогда при каноническом преобразовании (2.14)

$$\bar{f}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_W^m f_{n-m}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}). \tag{2.22}$$

Соотношение (2.22) легко получить, заметив, что, согласно (2.16)

$$\bar{f}_n(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} L_W^m f_n(\mathbf{y}, \mathbf{Y}). \tag{2.23}$$

Подставив затем (2.23) в (2.21) и приведя подобные члены, получим представление (2.22).

§ 3. О теории возмущений Депри

В этом параграфе получим общие соотношения, лежащие в основе теории возмущений, разработанной Депри в статье [113]. В методе Депри используется преобразование Ли, которое может быть определено посредством системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\eta} &= W_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta), \\ \frac{d\mathbf{X}}{d\eta} &= -W_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta), \\ \frac{dt}{d\eta} &= 0, \\ \frac{dR}{d\eta} &= -W_t(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta) \end{aligned} \tag{3.1}$$

с такими начальными условиями при $\eta = 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}(t; \varepsilon), \quad \mathbf{X} = \mathbf{Y}(t; \varepsilon), \quad t = t, \quad R = 0.$$

Здесь $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ — исходные координаты и импульсы, $\mathbf{y}$, $\mathbf{Y}$ — координаты и импульсы, полученные после преобразования ($\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{y}$,

$\mathbf{Y}$ — n-мерные векторы) $R = K(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t; \varepsilon) - H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta)$ — остаточная функция, K, H — преобразованный и первоначальный гамильтонианы, W — производящая функция преобразования Ли (она отличается от производящих функций классических способов канонических преобразований, таких, например, как способ Биркгофа или Цейпеля), t — независимая переменная, ε — постоянный малый параметр, η — переменный малый параметр $(0 \leqslant \eta \leqslant \varepsilon)$.

Убедимся непосредственно, что преобразование является каноническим. Действительно, имеют место соотношения

$$\frac{d}{d\eta} d\mathbf{x} = dW_{\mathbf{x}} = (W_{\mathbf{xx}}, d\mathbf{x}) + (W_{\mathbf{xX}}, d\mathbf{X}) + W_{\mathbf{x}t}dt,$$

$$\frac{d}{d\eta} \delta\mathbf{x} = \delta W_{\mathbf{x}} = (W_{\mathbf{xx}}, \delta\mathbf{x}) + (W_{\mathbf{xX}}, \delta\mathbf{X}),$$

$$\frac{d}{d\eta} d\mathbf{X} = -dW_{\mathbf{x}} = -(W_{\mathbf{xx}}, d\mathbf{x}) - (W_{\mathbf{xX}}, d\mathbf{X}) - W_{\mathbf{x}t}dt,$$

$$\frac{d}{d\eta} \delta\mathbf{X} = -\delta W_{\mathbf{x}} = -(W_{\mathbf{xx}}, \delta\mathbf{x}) - (W_{\mathbf{xX}}, \delta\mathbf{X}),$$

$$\frac{d}{d\eta} \delta R = -\delta W_t = -(W_{\mathbf{x}t}, \delta\mathbf{x}) - (W_{\mathbf{X}t}, \delta\mathbf{X}).$$

Из этих соотношений следует, что приращения $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{X}$, $\delta\mathbf{x}$, $\delta\mathbf{X}$ и δR, вызванные приращениями $d\mathbf{y}$, $d\mathbf{Y}$, $\delta\mathbf{y}$ и $\delta\mathbf{Y}$ удовлетворяют равенству

$$\frac{d}{d\eta} [(d\mathbf{x}, \delta\mathbf{X}) - (d\mathbf{X}, \delta\mathbf{x}) + dt\, \delta R] = 0. \tag{3.2}$$

Из этого соотношения следует, что величина $(d\mathbf{x}, \delta\mathbf{X}) - (d\mathbf{X}, \delta\mathbf{x}) + dt\, \delta R$ не зависит от η и равна своему значению, вычисленному при $\eta = 0$. Отсюда получаем

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \delta\mathbf{X}\right) - \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}, \delta\mathbf{x}\right) - \delta H = \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt}, \delta\mathbf{Y}\right) - \left(\frac{d\mathbf{Y}}{dt}, \delta\mathbf{y}\right) - \delta K. \tag{3.3}$$

Следовательно, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ удовлетворяют системе канонических уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}, \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \tag{3.4}$$

то система уравнений для $\mathbf{y}$ и $\mathbf{Y}$ также будет иметь каноническую форму

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{y}}. \tag{3.5}$$

Когда функция W не зависит от η, система уравнений (3.1) порождает ряды Ли (см. § 2); если же W зависит от η, то по терминологии, введенной Депри [113], система уравнений (3.1) порож-

дает преобразование Ли. Таким образом, можно сказать, что ряды Ли представляют собой частный случай преобразования Ли.

Пусть теперь $f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, представимая в виде ряда

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \tag{3.6}$$

где

$$f_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = \left[\frac{\partial^n}{\partial \eta^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta) \right]_{\eta=0}.$$

Подставив в (3.6) выражения переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ через $\mathbf{y}$, $\mathbf{Y}$ и ε, получаемые при помощи преобразования Ли, представим функцию f в виде ряда

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t), \tag{3.7}$$

где

$$f^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = \left[\frac{d^n}{d\eta^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta) \right]_{\eta=0}$$

и

$$\frac{df}{d\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta) = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \frac{d\mathbf{x}}{d\varepsilon} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}, \frac{d\mathbf{X}}{d\varepsilon} \right). \tag{3.8}$$

Отметим, что $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; 0)$ и $f^{(0)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = f(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t; 0)$.

Покажем, как по набору функций $f_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)$ разложения (3.6) построить набор функций $f^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t)$, входящих в разложение (3.7). Используя уравнения (3.1), перепишем соотношение (3.8) в виде

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + L_W f, \tag{3.9}$$

где L_W — оператор Ли, определяемый скобкой Пуассона

$$L_W f = (f \cdot W) = (f_{\mathbf{x}}, W_{\mathbf{X}}) - (f_{\mathbf{X}}, W_{\mathbf{x}}). \tag{3.10}$$

Положив в (3.7) f равным $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ и R и используя (3.1), получим

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{y}^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t), \tag{3.11}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{Y}^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t), \tag{3.12}$$

$$H = K - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} R^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t), \tag{3.13}$$

где для $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(n)} &= \left(\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} W_{\mathbf{x}}\right)_{\eta=0}, \\ \mathbf{Y}^{(n)} &= -\left(\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} W_{\mathbf{x}}\right)_{\eta=0}, \\ R^{(n)} &= -\left(\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} W_t\right)_{\eta=0}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Пусть теперь функция W представима в виде ряда

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} W_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \tag{3.15}$$

а функция f снова имеет вид (3.6). Тогда, как легко проверить, соотношение (3.9) перепишется в следующей форме:

$$\frac{df}{d\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} f_n^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \tag{3.16}$$

где для $n \geqslant 0$

$$f_n^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = f_{n+1} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_{m+1} f_{n-m},$$

$$L_i f = (f \cdot W_i).$$

Вообще, для $k \geqslant 1$, и $n \geqslant 0$ можно получить, что

$$\frac{d^k}{d\eta^k} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} f_n^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \tag{3.17}$$

где

$$f_n^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = f_{n+1}^{(k-1)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_{m+1} f_{n-m}^{(k-1)}.$$

Положив в последнем соотношении $\eta = 0$, получим следующее рекуррентное соотношение, называемое в [143, 144] уравнением Депри:

$$f_n^{(k)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = f_{n+1}^{(k-1)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_{m+1} f_{n-m}^{(k-1)}, \tag{3.18}$$

где для $i \geqslant 1$

$$L_i f = (f_{\mathbf{y}}, W_{i\mathbf{Y}}) - (f_{\mathbf{Y}}, W_{i\mathbf{y}}).$$

В уравнении Депри

$$f_n^{(0)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = f_n(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t), \quad f_0^{(k)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = f^{(k)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t).$$

Следовательно, уравнение Депри позволяет выразить функции $f^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t)$ через функции $f_n(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = [f_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{y} \\ \mathbf{X}=\mathbf{Y}}}$, входящие в разложение (3.6). Процедуру вычислений очень удобно представить на треугольнике (см. рис. 20). Например,

$$
\begin{aligned}
f^{(1)} &= f_1 + L_1 f_0, \\
f_1^{(1)} &= f_2 + L_1 f_1 + L_2 f_0, \\
f^{(2)} &= f_1^{(1)} + L_1 f^{(1)}, \qquad (3.19) \\
f_2^{(1)} &= f_3 + L_1 f_2 + 2L_2 f_1 + L_3 f_0, \\
f_1^{(2)} &= f_2^{(1)} + L_1 f_1^{(1)} + L_2 f^{(1)}, \\
f^{(3)} &= f_1^{(2)} + L_1 f^{(2)}.
\end{aligned}
$$

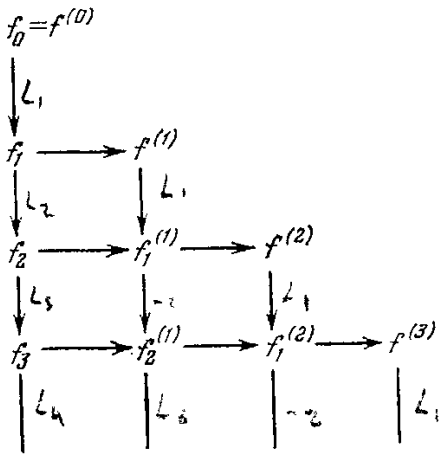

Рис. 20. f — треугольник (рекуррентное преобразование функции f при помощи преобразования Ли).

Аналогичные вычисления для функций H, R, $\mathbf{y}$, $\mathbf{Y}$ иллюстрируются на рис. 21.

Обратное преобразование можно записать в таком виде:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \qquad (3.20)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{X}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t). \qquad (3.21)$$

Чтобы найти связь между $\mathbf{x}^{(n)}$, $\mathbf{y}^{(n)}$ и $\mathbf{X}^{(n)}$, $\mathbf{Y}^{(n)}$, исключим из (3.11)—(3.12) и (3.20)—(3.21) величины $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ и $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ и определим функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t, \varepsilon)$ и $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t, \varepsilon)$ при помощи следующих соотношений:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{y}^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t), \qquad (3.22)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{X}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{Y}^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \qquad (3.23)$$

Функции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{U}$ можно представить так:

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{u}_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t), \qquad (3.24)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{Y} - \mathbf{X} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{U}_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{U}^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \qquad (3.25)$$

Из равенств (3.22)—(3.25) получаем соотношения, позволяющие установить очень простую связь коэффициентов прямого и

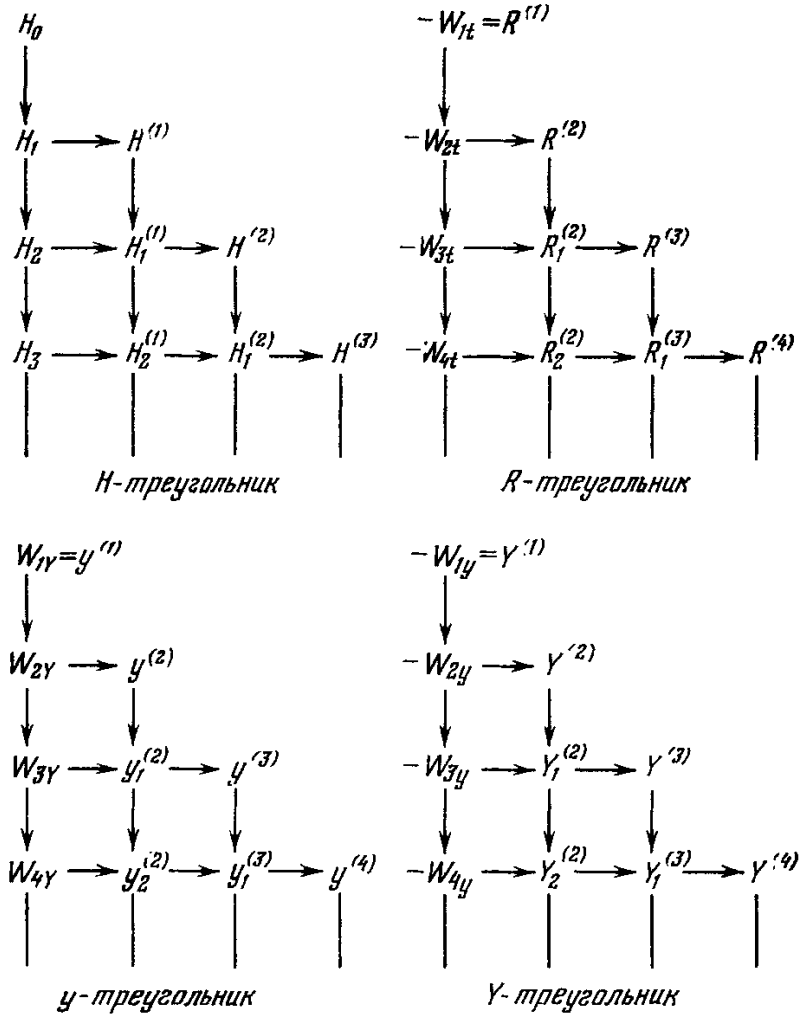

Рис. 21. Треугольники для вычисления коэффициентов $y^{(n)}$, $Y^{(n)}$ гамильтониана H и остаточной функции R.

обратного преобразований:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \quad \mathbf{u}^{(n)} = -\mathbf{y}^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t), \tag{3.26}$$

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{X}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \quad \mathbf{U}^{(n)} = -\mathbf{Y}^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \tag{3.27}$$

§ 4. Упрощение алгоритма Депри

В алгоритме Депри, изложенном в предыдущем параграфе, функции $f^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t)$ определяются по функциям $f_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)$ при помощи уравнения Депри (3.18), содержащего некоторые вспомогательные функции $f_n^{(k)}$. Необходимые рекуррентные вычисления удобно приводить, используя уравнение (3.18) и треугольник, изображенный на рис. 20. Кэмил в работах [143, 144]

предложил упрощение алгоритма Депри. В его модификации алгоритма Депри функции $f^{(n)}$ выражаются только через функции f_n, $f^{(n-1)}$, . . ., $f^{(0)}$ путем введения вспомогательных линейных операторов. Подход, осуществленный Кэмилом, упрощает нахождение обратного преобразования и существенно сокращает вычисления, необходимые при использовании преобразования Ли в теории возмущений.

В этом параграфе изложим основные идеи, предложенные Кэмилом в его работе [143]. Перепишем уравнение Депри (3.18) в такой форме:

$$f_n^{(k)} = f_{n-1}^{(k+1)} - \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m L_{m+1} f_{n-m-1}^{(k)} \qquad (n \geqslant 1,\ k \geqslant 0). \tag{4.1}$$

Путем исключения функций, стоящих в правой части уравнения (4.1), можно получить выражение $f_n^{(k)}$ через функции $f^{(k+n)}$, $f^{(k+n-1)}$,. . . . . ., $f^{(k)}$. В результате получим

$$f_n^{(k)} = f^{(n+k)} - \sum_{j=1}^{n} C_n^j G_j f^{(k+n-j)} \quad (n \geqslant 1,\ k \geqslant 0), \tag{4.2}$$

где G_j есть линейный оператор, являющийся функцией L_j, L_{j-1}, ..., L_1. Подставив (4.2) в уравнение (4.1), получим такие рекуррентные соотношения:

$$G_j = L_j - \sum_{m=1}^{j-1} C_{j-1}^{m-1} L_m G_{j-m} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{4.3}$$

Например,

$$\begin{aligned} G_1 &= L_1, \\ G_2 &= L_2 - L_1 L_1, \\ G_3 &= L_3 - L_1 (L_2 - L_1 L_1) - 2 L_2 L_1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

При $k = 0$ и $k = 1$ из уравнения (4.2) получаем

$$f^{(n)} = f_n + \sum_{j=1}^{n} C_n^j G_j f^{(n-j)}, \tag{4.5}$$

$$f_n^{(1)} = f^{(n+1)} - \sum_{j=1}^{n} C_n^j G_j f^{(n-j+1)}. \tag{4.6}$$

Если функцию $G_j f^{(i)}$ обозначить через $f_{j,i}$, то уравнения (4.5) — (4.6) можно переписать так:

$$f^{(n)} = f_n + \sum_{j=1}^{n} C_n^j f_{j,\,n-j}, \tag{4.7}$$

$$f_n^{(1)} = f^{(n+1)} - \sum_{j=1}^{n} C_n^j f_{j,\,n-j+1}, \tag{4.8}$$

где

$$f_{j,i} = L_j f^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{j-1}^{m-1} L_m f_{j-m,\,i}.$$

Подставляя в (4.8) вместо f величины $\mathbf{y}$ и $\mathbf{Y}$, можно при помощи треугольного алгоритма (рис. 20) получить такие рекуррентные соотношения для вычисления функций $\mathbf{y}^{(n)}$ и $\mathbf{Y}^{(n)}$, входящих в разложения (3.11) и (3.12):

$$\mathbf{y}^{(n)} = W_{n\mathbf{Y}} + \sum_{j=1}^{n-1} C_{n-1}^{j} \mathbf{y}_{j,\,n-j}, \tag{4.9}$$

$$\mathbf{Y}^{(n)} = -W_{n\mathbf{y}} + \sum_{j=1}^{n-1} C_{n-1}^{j} \mathbf{Y}_{j,\,n-j} \tag{4.10}$$

$$(n \geqslant 1),$$

где

$$\mathbf{y}_{j,\,i} = L_j \mathbf{y}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{j-1}^{m-1} L_m \mathbf{y}_{j-m,\,i}, \tag{4.11}$$

$$\mathbf{Y}_{j,\,i} = L_j \mathbf{Y}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{j-1}^{m-1} L_m \mathbf{Y}_{j-m,\,i}. \tag{4.12}$$

Если теперь положить в уравнении (4.7) $f = \mathbf{u}$ и $f = \mathbf{U}$ (из соотношений (3.22) и (3.23)), то получим

$$\mathbf{x}^{(n)} = -\mathbf{y}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \mathbf{y}_{j,\,n-j}, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{X}^{(n)} = -\mathbf{Y}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \mathbf{Y}_{j,\,n-j}, \tag{4.14}$$

где $\mathbf{y}_{j,\,n-j}$ и $\mathbf{Y}_{j,\,n-j}$ определены равенствами (4.11) и (4.12). Функции $\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)$ и $\mathbf{X}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)$, входящие в обратное преобразование (3.20)—(3.21), получаются по простым формулам

$$\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = [\mathbf{x}^{(n)}]_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{x} \\ \mathbf{Y}=\mathbf{X}}}, \quad \mathbf{X}^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = [\mathbf{X}^{(n)}]_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{x} \\ \mathbf{Y}=\mathbf{X}}}. \tag{4.15}$$

Пусть функция Гамильтона $H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \varepsilon)$ задана в форме

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} H_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t). \tag{4.16}$$

Преобразованная функция Гамильтона может быть найдена в виде

$$K(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} K_n(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \tag{4.17}$$

Получим связь между функциями K_n и H_n.

После применения преобразования Ли функция H запишется (см. (3.7)) в виде

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} H^{(n)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \tag{4.18}$$

Из этого равенства и соотношения (3.13) получаем для $n \geqslant 1$

$$K_0 = H_0, \tag{4.19}$$

$$K_n = H_n + R^{(n)}. \tag{4.20}$$

Полагая в (4.8) $f = H + R$, получаем

$$H_n^{(1)} + R_n^{(1)} = K_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} C_n^j K_{j,\, n-j+1}. \tag{4.21}$$

Но при помощи H- и R-треугольников (см. рис. 21) получаем

$$H_n^{(1)} = H_{n+1} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m L_{m+1} H_{n-m} \qquad (n \geqslant 0), \tag{4.22}$$

$$R_n^{(1)} = -[W_{n+1}]_t \qquad (n \geqslant 0). \tag{4.23}$$

И, таким образом, из (4.21) — (4.23) получаем рекуррентные соотношения для вычисления преобразованного гамильтониана

$$K_0 = H_0, \tag{4.24}$$

$$K_n = H_n + \sum_{j=1}^{n-1} (C_{n-1}^{j-1} L_j H_{n-j} + C_{n-1}^j K_{j,\, n-j}) - \frac{DW_n}{Dt}, \tag{4.25}$$

где

$$\frac{DW_n}{Dt} = \frac{\partial W_n}{\partial t} - L_n H_0, \tag{4.26}$$

$$K_{j,i} = L_j K_i - \sum_{m=1}^{j-1} C_{j-1}^{m-1} L_m K_{j-m,\, i}. \tag{4.27}$$

§ 5. Формальная техника применения преобразования Ли

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}, \qquad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{5.1}$$

с гамильтонианом

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \varepsilon) = H_0(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \varepsilon H_1(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} H_2(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \\ + \frac{\varepsilon^3}{3!} H_3(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \ldots \tag{5.2}$$

Построим в явном виде несколько членов рядов, задающих преобразование, приводящее гамильтониан к виду

$$K(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t; \varepsilon) = K_0(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \varepsilon K_1(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} K_2(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \\ + \frac{\varepsilon^3}{3!} K_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \ldots \qquad (5.3)$$

Каноническое преобразование $\mathbf{x}, \mathbf{X} \to \mathbf{y}, \mathbf{Y}$ представим в виде рядов

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{y}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathbf{y}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathbf{y}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \ldots, \qquad (5.4)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \varepsilon \mathbf{Y}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathbf{Y}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathbf{Y}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \ldots, \qquad (5.5)$$

а обратное — при помощи рядов

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathbf{x}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathbf{x}^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \ldots, \qquad (5.6)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathbf{X}^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \ldots \qquad (5.7)$$

Далее, любую аналитическую функцию

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \varepsilon) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \varepsilon f_1(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f_2(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \\ + \frac{\varepsilon^3}{3!} f_3(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) + \ldots \qquad (5.8)$$

после преобразования $(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \to (\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ запишем в виде ряда

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \varepsilon) = f^{(0)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \varepsilon f^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \\ + \frac{\varepsilon^3}{3!} f^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) + \ldots \qquad (5.9)$$

Рекуррентные вычисления начинаются с того, что выписываются очевидные соотношения

$$K_0(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = H_0(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t), \qquad (5.10)$$

$$f^{(0)}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = f_0(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \qquad (5.11)$$

Далее (см. (4.25)), нахождение членов первого порядка приводит к рассмотрению следующего линейного уравнения в частных производных:

$$K_1(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = H_1(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) - \frac{DW_1}{Dt}. \qquad (5.12)$$

Наложив на функцию K_1 какие-либо требования (например, чтобы она тождественно обращалась в нуль, не содержала коротко-

периодических членов или удовлетворяла каким-либо другим ограничениям, вытекающим из содержания рассматриваемой физической задачи), можно из (5.12) вычислить функцию $W_1(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t)$ и подсчитать следующие функции:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= W_{1\mathbf{Y}}, & \mathbf{Y}^{(1)} &= -W_{1\mathbf{y}}, \\ \mathbf{x}^{(1)} &= -\mathbf{y}^{(1)}, & \mathbf{X}^{(1)} &= -\mathbf{Y}^{(1)}, \\ f_{1,0} &= L_1 f^{(0)}, & f^{(1)} &= f_1 + f_{1,0}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

необходимые для использования теории возмущений с точностью до членов первого порядка относительно ε.

Для вычисления членов второго порядка предварительно находим

$$K_{1,1} = L_1 K_1. \tag{5.14}$$

Дифференциальное уравнение для нахождения $W_2(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t)$ имеет вид

$$K_2 = H_2 + L_1 H_1 + K_{1,1} - \frac{DW_2}{Dt}. \tag{5.15}$$

Выбрав W_2, как это требуют условия исследуемой задачи, найдем из (5.15) функцию W_2. Члены второго порядка искомых разложений будут затем подсчитываться согласно формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{1,1} &= L_1 \mathbf{y}^{(1)}, & \mathbf{Y}_{1,1} &= L_1 \mathbf{Y}^{(1)}, \\ \mathbf{y}^{(2)} &= W_{2\mathbf{Y}} + \mathbf{y}_{1,1}, & \mathbf{Y}^{(2)} &= -W_{2\mathbf{y}} + \mathbf{Y}_{1,1}, \\ \mathbf{x}^{(2)} &= -\mathbf{y}^{(2)} + 2\mathbf{y}_{1,1}, & \mathbf{X}^{(2)} &= -\mathbf{Y}^{(2)} + 2\mathbf{Y}_{1,1}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$f_{1,1} = L_1 f^{(1)}, \quad f_{2,0} = L_2 f^{(0)} - L_1 f_{1,0}, \quad f^{(2)} = f_2 + 2f_{1,1} + f_{2,0}.$$

Чтобы найти члены третьего порядка, сначала следует вычислить такие функции:

$$K_{1,2} = L_1 K_2, \tag{5.17}$$

$$K_{2,1} = L_2 K_1 - L_1 K_{1,1}. \tag{5.18}$$

Дифференциальное уравнение для $W_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t)$ имеет вид

$$K_3 = H_3 + L_1 H_2 + 2L_2 H_1 + 2K_{1,2} + K_{2,1} - \frac{DW_3}{Dt}. \tag{5.19}$$

Найдя из этого уравнения функцию W_3, можно вычислить затем члены третьего порядка искомых разложений

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{1,2} &= L_1 \mathbf{y}^{(2)}, & \mathbf{Y}_{1,2} &= L_1 \mathbf{Y}^{(2)}, \\ \mathbf{y}_{2,1} &= L_2 \mathbf{y}^{(1)} - L_1 \mathbf{y}_{1,1}, & \mathbf{Y}_{2,1} &= L_2 \mathbf{Y}^{(1)} - L_1 \mathbf{Y}_{1,1}, \\ \mathbf{y}^{(3)} &= W_{3\mathbf{Y}} + 2\mathbf{y}_{1,2} + \mathbf{y}_{2,1}, & \mathbf{Y}^{(3)} &= -W_{3\mathbf{y}} + 2\mathbf{Y}_{1,2} + \mathbf{Y}_{2,1}, \\ \mathbf{x}^{(3)} &= -\mathbf{y}^{(3)} + 3\mathbf{y}_{1,2} + 3\mathbf{y}_{2,1}, & \mathbf{X}^{(3)} &= -\mathbf{Y}^{(3)} + 3\mathbf{Y}_{1,2} + 3\mathbf{Y}_{2,1}, \\ f_{1,2} &= L_1 f^{(2)}, & f_{2,1} &= L_2 f^{(1)} - L_1 f_{1,1}, \\ f_{3,0} &= L_3 f^{(0)} - L_1 f_{2,0} - 2L_2 f_{1,0}, & f^{(3)} &= f_3 + 3f_{1,2} + 3f_{2,1} + f_{3,0}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Процедуру построения разложений (5.3) — (5.7) и (5.9) можно аналогично продолжить до любого порядка относительно ε, используя соотношения (3.6), (3.7), (3.11)—(3.13), (3.20), (3.21), (4.7), (4.17) и (4.24) — (4.27).

§ 6. О теории возмущений, основанной на рядах Ли

В этом параграфе получим общие формулы метода возмущений Хори, основанного на рядах Ли. В методе Хори [142] функции f и W (см. § 3) явным образом от η не зависят. Поэтому имеют место соотношения (см. также § 2)

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{X})\big|_{\eta=\varepsilon} = f(\mathbf{y}, \mathbf{Y}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[\frac{d^n f(\mathbf{x}, \mathbf{X})}{d\eta^n}\right]_{\eta=0}, \tag{6.1}$$

$$\frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{X})}{d\eta} = L_W f(\mathbf{x}, \mathbf{X}). \tag{6.2}$$

Так как правая часть равенства (6.2) не зависит от η, то

$$\frac{d^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{X})}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta}\left[\frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{X})}{d\eta}\right] = L_W [L_W f(\mathbf{x}, \mathbf{X})] = L_W^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \tag{6.3}$$

и, вообще, для $k \geqslant 1$

$$\frac{d^k f(\mathbf{x}, \mathbf{X})}{d\eta^k} = L_W^k f(\mathbf{x}, \mathbf{X}). \tag{6.4}$$

Чтобы построить необходимые разложения теории возмущений Хори, положим

$$\varepsilon W(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \sum_{n=}^{\infty} W_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}), \tag{6.5}$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}). \tag{6.6}$$

Тогда из (6.2) получим

$$\varepsilon \frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{X})}{d\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}), \tag{6.7}$$

где

$$f_n^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \sum_{m=0}^{n} L_{m+1} f_{n-m}(\mathbf{x}, \mathbf{X}). \tag{6.8}$$

Вообще, для $k \geqslant 1$

$$\varepsilon^k \frac{df^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{X})}{d\eta^k} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{X}), \tag{6.9}$$

где

$$f_n^{(k)}(\mathrm{x}, \mathrm{X}) = \sum_{m=0}^{n} L_{m+1} f_{n-m}^{(k-1)}(\mathrm{x}, \mathrm{X}). \tag{6.10}$$

Следовательно,

$$\varepsilon^k \left(\frac{d^k f(\mathrm{x}, \mathrm{X})}{d\eta^k} \right)_{\eta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(\mathrm{y}, \mathrm{Y}), \tag{6.11}$$

где

$$f_n^{(k)}(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) = \sum_{m=0}^{n} L_{m+1} f_{n-m}^{(k-1)}(\mathrm{y}, \mathrm{Y}). \tag{6.12}$$

Так как преобразование $\mathrm{x}, \mathrm{X} \to \mathrm{y}, \mathrm{Y}$ не зависит от t, то из уравнения (3.13) следует, что

$$H(\mathrm{x}, \mathrm{X}) = K(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) \tag{6.13}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(\mathrm{x}, \mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\mathrm{y}, \mathrm{Y}). \tag{6.14}$$

Подставляя $f = H(\mathrm{x}, \mathrm{X})$ в уравнение (6.1) и используя (6.11), получим

$$K_0(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) = H_0(\mathrm{y}, \mathrm{Y}), \tag{6.15}$$

$$K_n(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) = H_n(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(n-m)!} H_m^{(n-m)}(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) \quad (n \geqslant 1), \tag{6.16}$$

где

$$H_m^{(i)}(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) = \sum_{j=0}^{m} L_{j+1} H_{m-j}^{(i-1)}(\mathrm{y}, \mathrm{Y}). \tag{6.17}$$

Эти соотношения и дадут формулы, необходимые для построения преобразованного гамильтониана в методе Хори. Перепишем соотношение (6.16) в виде

$$K_n(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) = H_n(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) + \\ + \sum_{m=0}^{n-2} \left[L_{m+1} H_{n-m-1}(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) + \frac{1}{(n-m)!} H_m^{(n-m)}(\mathrm{y}, \mathrm{Y}) \right] + L_n H_0(\mathrm{y}, \mathrm{Y}). \tag{6.18}$$

При подсчете $H_m^{(n-m)}$ по формуле (6.17) следует положить

$$H_i^{(1)} = K_{i+1} - H_{i+1} - \sum_{m=0}^{i-1} \frac{1}{(i-m+1)!} H_m^{(i-m+1)}. \tag{6.19}$$

Выпишем первые члены разложения преобразованного гамильтониана

$$K_0 = H_0,$$
$$K_1 = H_1 + L_1 H_0,$$
$$K_2 = H_2 + L_1 H_1 + \frac{1}{2} L_1 (L_1 H_0) + L_2 H_0, \tag{6.20}$$
$$K_3 = H_3 + L_1 H_2 + L_2 H_1 + \frac{1}{6} L_1 (L_1 (L_1 H_0)) + L_3 H_0 +$$
$$+ \frac{1}{2} L_1 (L_2 H_0) + \frac{1}{2} L_1 (L_1 H_1) + \frac{1}{2} L_2 (L_1 H_0).$$

Разумеется, соотношения (6.20) справедливы не только для гамильтониана, но и для любой функции от x, X.

ГЛАВА 12

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ, БЛИЗКИЕ К ТРЕУГОЛЬНЫМ ТОЧКАМ ЛИБРАЦИИ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Введение

В главах 7—10 подробно исследована задача об устойчивости треугольных точек либрации. По-видимому, для задач, связанных с исследованием треугольных точек либрации, следующим важным вопросом является вопрос о существовании, построении и устойчивости периодических движений, близких к точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел. Рассмотрению этого вопроса посвящена настоящая глава.

В 1899 году Шарлье (см., например, [9(.]), а затем в 1901 году Пламмер [163], использовав фундаментальные результаты Ляпунова [49] и Пуанкаре [82], установили существование двух семейств малых периодических движений, близких к треугольным точкам либрации плоской круговой ограниченной задачи трех тел. Затем последовало большое число работ в основном зарубежных авторов, в которых результаты Шарлье и Пламмера развивались и уточнялись. По-видимому, завершающей работой «немашинного» этапа исследования периодических движений вблизи треугольных точек либрации можно считать работу Ю. А. Рябова 1952 года [83]. Методы, основанные на использовании ЭВМ, были созданы в работах Депри, Рэйба, Хенрарда, Шмидта и др. [114—123, 140, 165—167, 172], и к настоящему времени задача построения периодических движений, близких к треугольным точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел, получила большое развитие.

В работах Депри [114, 115] предложен метод аналитического продолжения, который тесно связан с классическими процедурами Ляпунова и Пуанкаре и по сути дела сводится к рекуррентному вычислению коэффициентов разложения периодического движения в ряд по орбитальному параметру. В [114, 115] описан приспособленный для ЭВМ алгоритм нахождения этих коэффициентов, который позволяет учитывать в разложении периодического движения большие степени орбитального параметра.

Наверное, более интересна и эффективна другая модификация метода аналитического продолжения, основанная на использовании теории возмущений Депри — Хори и описанная в работах Депри и Хенрарда [116, 117].

Применение метода аналитического продолжения позволило сделать вывод о том, что из-за медленной сходимости рядов,

описывающих периодическое движение, для построения периодических орбит с большими амплитудами этот метод мало пригоден, даже если учитывать очень большие степени малого орбитального параметра. В этом случае на помощь приходит метод численного продолжения, впервые примененный в работах Рэйба [165—167] и наиболее полно описанный в работе Депри и Хенрарда [119].

В работах [114—121, 165—167] методы аналитического и численного продолжения использованы для построения периодических орбит, рождающихся из треугольных точек либрации систем Солнце — Юпитер и Земля — Луна. Кроме того, в этих работах найдены характеристические показатели, соответствующие построенным орбитам.

В статье Депри [122] исследованы периодические движения при значениях отношения масс основных тел, больших критического значения μ^*, а в работах [140, 172] рассмотрен вопрос о существовании периодических движений при таких значениях отношения масс μ, для которых их существование не следует из теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле.

В обзорной статье Депри и Хенрарда [123] обсуждаются результаты исследований периодических орбит плоской круговой ограниченной задачи трех тел, которые были получены после 1966 года. Результаты более раннего периода описаны в монографии Себехея [175].

Все вышеупомянутые работы посвящены исследованию периодических движений в рамках плоской круговой ограниченной задачи и не был рассмотрен вопрос об устойчивости периодических движений в строгой нелинейной постановке.

В настоящей главе рассматривается задача о построении и устойчивости малых периодических движений, близких к треугольным точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел в плоском и пространственном случаях. Задача об устойчивости решается в строгой нелинейной постановке. При изложении результатов мы следуем работам [68, 69].

§ 2. Три типа периодических движений

Существование периодических движений, близких треугольным точкам либрации ограниченной круговой задачи трех тел доказывается при помощи *теоремы А. М. Ляпунова о голоморфном интеграле* [22, 49].

Теорема (А. М. Ляпунов). *Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений вида*

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y, \\ \frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + X_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),\end{gathered} \tag{2.1}$$

где λ *— положительная постоянная,* a_{jk} *— постоянные вещественные коэффициенты, а* X, Y *и* X_j *— голоморфные функции величин* x, y, x_j, *разложения которых не содержат членов ниже второго порядка малости и обладают постоянными вещественными коэффициентами. Пусть выполнены следующие два условия:*

а) *Уравнение*

$$D(\sigma) = |a_{jk} - \sigma\delta_{jk}| = 0, \tag{2.2}$$

где δ_{jk} *— символ Кронекера, не имеет корней вида* $i\lambda N$, *где* i *— мнимая единица, а* N *— целое число.*

б) *Система* (2.1) *имеет не зависящий от времени голоморфный интеграл, в котором совокупность членов второго порядка содержит переменные* x *и* y.

Тогда уравнения (2.1) *имеют периодическое решение, представимое рядами вида*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x^{(k)}, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y^{(k)}, \quad x_j = \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k x_j^{(k)}, \tag{2.3}$$

где ε *— достаточно малая произвольная постоянная, а все* $x^{(k)}$ $y^{(k)}$, $x_j^{(k)}$ *— периодические функции времени с общим периодом* τ, *являющимся голоморфной функцией* ε. *Функции* $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $x_j^{(k)}$ *представляются конечными рядами косинусов и синусов целых кратностей величины* θ, *определяемой формулами*

$$\theta = \frac{2\pi(t - t_0)}{\tau}, \quad \tau = \frac{2\pi}{\lambda + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \varepsilon^k}, \tag{2.4}$$

причем все g_k *— вполне определенные постоянные, а* t_0 *— вторая произвольная постоянная.*

Величина ε называются *орбитальным параметром* или «амплитудой» периодического движения (2.3).

В дальнейшем рассматривается движение вблизи L_4, однако все выводы верны и для L_5. Гамильтониан движения в окрестности треугольной точки либрации L_4 определяется формулой (3.1) главы 7, в которой надо положить $e = 0$. Мы будем исследовать периодические движения для значений параметра μ, лежащих в области $0 < \mu < \mu^* = 0{,}0385208$ устойчивости точек либрации в линейном приближении. Уравнения движения тела бесконечно малой массы вблизи L_4 при $0 < \mu < \mu^*$ всегда можно записать в виде (2.1). Введем далее обозначения

$$\lambda_1 = \omega_1, \quad \lambda_2 = -\omega_2, \quad \lambda_3 = 1, \tag{2.5}$$

где ω_1 и ω_2 — корни уравнения (4.3) из седьмой главы ($0 < \omega_2 < \sqrt{2}/2 < \omega_1 < 1$).

Для решения вопроса о существовании периодических движений, близких к L_4, применяем теорему Ляпунова о голоморфном интеграле, за который в рассматриваемой задаче можно принять функцию Гамильтона H.

Рассмотрим сначала плоскую задачу. В этом случае характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$. Чтобы сделать заключения о существовании периодических движений, надо проверить только выполнимость условия а) теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле, т. е. требования отсутствия резонансных соотношений вида

$$\lambda_i = N\lambda_l, \tag{2.6}$$

где N — произвольное целое число, а λ_i, λ_l принимают значения λ_1 или λ_2 $(i \neq l)$.

Будем называть периодические движения, соответствующие частоте ω_1, *периодическими движениями* I *типа*. Их период $\tau_1 \approx \approx 2\pi/\omega_1$. Обычно их называют *короткопериодическими движениями*. Периодические движения, соответствующие ω_2, будем называть *периодическими движениями* II *типа*. Их период $\tau_2 \approx 2\pi/\omega_2$ (*долгопериодические движения*).

Для периодических движений I типа $(l = 1, i = 2)$ соотношение (2.6) принимает вид $\omega_2 = N\omega_1$. Это равенство не выполнено ни при каких целых N, так как $0 < \omega_2 < \sqrt{2}/2 < \omega_1 < 1$. Таким образом, из теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле получаем, что периодические движения I типа существуют при всех μ из рассматриваемого интервала $0 < \mu < \mu^*$.

Для периодических движений II типа $(l = 2, i = 1)$ соотношение (2.6) можно переписать так: $\omega_1 = N\omega_2$. С учетом уравнения (4.6) главы 7 это соотношение принимает вид [22, 83]

$$27\mu(1-\mu) = \frac{4N^2}{(N^2+1)^2} \qquad (N = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.7}$$

Тогда получаем, что периодические движения II типа существуют при всех μ из интервала $0 < \mu < \mu^*$, кроме, быть может, значений μ, удовлетворяющих равенству (2.7).

Теперь рассмотрим пространственную задачу. При всех μ из интервала $0 < \mu < \mu^*$ по-прежнему будут существовать периодические движения I типа, а при μ, не удовлетворяющем равенству (2.7), и периодические движения II типа. Из-за того, что пространственные переменные q_3, p_3 входят в гамильтониан H четным образом, периодические движения I и II типов и в пространственной постановке задачи остаются в плоскости вращения основных притягивающих масс. Но в пространственной задаче существуют еще периодические движения III типа, период которых $\tau_3 \approx 2\pi/\lambda_3 = = 2\pi$.

При решении вопроса об устойчивости периодических движений I—III типов следует рассматривать пять различных задач:

1а) задача об устойчивости периодических движений I типа в плоском случае;

1б) задача об устойчивости периодических движений I типа в пространственном случае;

2а) задача об устойчивости периодических движений II типа в плоском случае;

2б) задача об устойчивости периодических движений II типа в пространственном случае;

3) задача об устойчивости периодических движений III типа, существующих только в пространственном случае.

Задачи 1а) и 1б) существенно различны. В задаче 1а) изучаемая механическая система имеет две, а в задаче 1б) — три степени свободы. Аналогичная ситуация и с задачами 2а) и 2б).

Каждое из рассматриваемых периодических движений зависит от двух параметров: отношения масс основных тел μ и «амплитуды» ε (в задаче об устойчивости зависимость периодического движения от начального момента времени t_0 несущественна).

§ 3. Схема исследования устойчивости

Ясно, что по отношению к возмущениям координат и импульсов, соответствующих периодическим движениям, эти движения будут неустойчивы по Ляпунову, так как их период зависит от начальных условий (величина ε в выражении для периода (2.4) зависит от начальных условий). Однако представляет интерес задача об орбитальной устойчивости.

При решении задачи об устойчивости будем использовать подход, который применен А. Д. Брюно, в работах [10, 14]. В этих работах, в отличие от классической постановки задачи об устойчивости периодических движений автономных гамильтоновых систем, значение постоянной энергии не фиксируется, а она может изменяться в некотором интервале. Тем самым не используется понижение числа степеней свободы гамильтоновой системы, как это делается при изоэнергетической редукции. Такой подход позволяет исследовать полную окрестность периодического движения, используя канонические преобразования, а в окрестности периодического движения можно ввести такие локальные координаты, что гамильтониан возмущенного движения будет иметь нормальную форму, аналогичную нормальной форме в окрестности положения равновесия. Таким образом, задача об орбитальной устойчивости периодических движений сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову по отношению к локальным координатам.

В нашей задаче схематически конструктивное применение локального метода можно представить в виде последовательности следующих операций:

1) получение исследуемого периодического движения в переменных действие — угол;

2) введение в окрестности периодического движения локальных координат и получение функции Гамильтона возмущенного движения;

3) переход к новой независимой переменной «угол», линейная нормализация и получение выводов об устойчивости в линейном приближении;

4) возвращение к старой независимой переменной и проведение нелинейной нормализации функции Гамильтона;

5) на основании свойств коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона получение выводов об орбитальной устойчивости периодического движения.

§ 4. Орбиты первого приближения

Если в функции Гамильтона (3.1) главы 7, описывающей движение вблизи L_4, сделать (при $e = 0$) замену переменных по формулам (4.2) главы 7, а затем по формулам

$$q_j = \frac{1}{\sqrt{\omega_j}} q_j^*, \quad p_j = \sqrt{\omega_j}\, p_j^* \qquad (j = 1, 2), \tag{4.1}$$

то она примет такой вид:

$$H^* = H_2^* + H_3^* + \ldots + H_m^* + \ldots, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned} H_2^* &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \lambda_k (q_k^{*2} + p_k^{*2}), \\ H_m^* &= \sum_{\nu_1 + \ldots + \mu_3 = m} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\mu_1\mu_2\mu_3} q_1^{*\nu_1} q_2^{*\nu_2} q_3^{*\nu_3} p_1^{*\mu_1} p_2^{*\mu_2} p_3^{*\mu_3} \\ &\qquad (m \geqslant 3). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона H_2^* имеет вид

$$q_k^* = \alpha_k \cos(|\lambda_k| \nu + \beta_k), \quad p_k^* = (-1)^k \alpha_k \sin(|\lambda_k| \nu + \beta_k) \tag{4.4}$$
$$(k = 1, 2, 3),$$

где α_k, β_k — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий.

Если начальные условия таковы, что все α_k при $k \neq l$ равны нулю, то уравнения (4.4) будут описывать первое приближение периодического движения I, II или III типа (l — номер типа пе-

риодического движения, равный соответственно 1, 2, 3). Периодические движения III типа в первом приближении представляют собой линейные колебания (с частотой, равной единице) в направлении, перпендикулярном плоскости вращения основных тел. Рассмотрим подробнее периодические движения I и II типов. В координатах q_k, p_k (см. главу 7) эти движения можно записать в виде

$$q_1 = \frac{\alpha_l}{2z_l}(4\omega_l^2 + 9)\cos(\omega_l \nu + \beta_l),$$

$$q_2 = -\frac{2\alpha_l}{z_l}\left\{\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\cos(\omega_l\nu+\beta_l) + 2\omega_l \sin(\omega_l\nu+\beta_l)\right\}, \quad (4.5)$$

$$q_3 = 0 \quad (l = 1, 2), \quad z_l = \sqrt{\lambda_l (2\lambda_l^2 - 1)(4\lambda_l^2 + 9)}.$$

В системе координат $L_4 q_1 q_2 q_3$ уравнения (4.5) представляют собой записанные в параметрическом виде уравнения эллипсов с

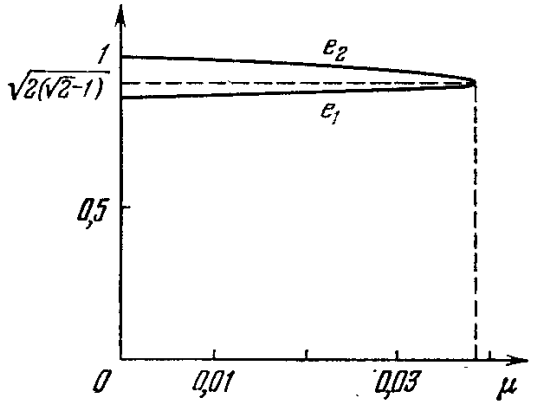

Рис. 22. Зависимость эксцентриситетов орбит первого приближения e_1 и e_2 от отношения масс основных тел μ.

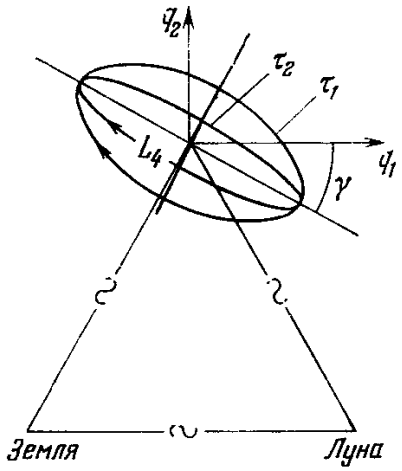

Рис. 23. Ляпуновские орбиты первого приближения вблизи точки L_4 в системе Земля — Луна.

центром в L_4. Большие полуоси эллипсов наклонены к оси $L_4 q_1$ под углом γ, определяемым соотношением

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \sqrt{3}(1 - 2\mu)$$

и при $0 < \mu < \mu^*$ равным приблизительно 30°. Эксцентриситеты эллипсов вычисляются по формулам

$$e_l = \sqrt{\frac{2\sqrt{9 - 4\omega_1^2\omega_2^2}}{(2\omega_l^2 + 3) + \sqrt{9 - 4\omega_1^2\omega_2^2}}} \qquad (l = 1, 2)$$

и одинаковы для всех начальных условий. Графические зависимости эксцентриситетов эллипсов e_l от параметра μ приведены на рис. 22. Из рис. 22, в частности, видно, что при всех μ эксцент-

риситет короткопериодических орбит меньше эксцентриситета долгопериодических орбит. На рис. 23 схематически представлены эллиптические короткопериодические ($\tau_1 = 2\pi/\omega_1$) и долгопериодические ($\tau_2 = 2\pi/\omega_2$) орбиты первого приближения для соотношения масс системы Земля — Луна ($\mu = 0{,}0121507\ldots$, $e_1 = 0{,}87\ldots$, $e_2 = 0{,}98\ldots$).

§ 5. Построение периодических движений

Для построения периодических движений нелинейной задачи воспользуемся методом канонических преобразований, но в виде, несколько отличном от преобразований работ [116, 117].

Представим формы H_m^* из (4.2) в таком виде:

$$H_m^* = \sum_{s=0}^{m} H_{s,\,m-s}^*, \tag{5.1}$$

где $H_{s,\,m-s}^*$ означает совокупность членов степени s по переменным (координата и импульс q_l^*, p_l^*) с номером l (l — номер типа периодического движения) и степени $m - s$ по остальным переменным. Сделаем теперь такое каноническое преобразование:

$$q_k^*,\ p_k^* \to q_k,\ p_k \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{5.2}$$

чтобы во всех формах новой функции Гамильтона H нормализовать члены $H_{m,0}$ и уничтожить члены $H_{m-1,1}$. Такое преобразование будет сходящимся [28, 72].

Преобразование (5.2), как и вообще все дальнейшие нелинейные нормализующие канонические преобразования этой главы, проводилось методом Депри — Хори. Этот метод использовался в модификации Мерсмана [156].

Рассмотрим подробнее преобразование (5.2). Производящую функцию T этого преобразования, зависящую только от новых переменных, представим в виде

$$T = T_3 + \ldots + T_m + \ldots \tag{5.3}$$

Тогда операторное уравнение для определения коэффициентов производящей функции и новой функции Гамильтона имеет вид

$$D_0 T_m = \bar{H}_m^* - H_m \qquad (m = 3,\ \ldots), \tag{5.4}$$

где оператор D_0 определяется следующим образом:

$$D_0 T_m = -(H_2^* \cdot T_m) = -\sum_{k=1}^{3} \left[\frac{\partial H_2^*}{\partial q_k} \frac{\partial T_m}{\partial p_k} - \frac{\partial H_2^*}{\partial p_k} \frac{\partial T_m}{\partial q_k} \right]. \tag{5.5}$$

В (5.4) функции $\bar{H}_m^*$ выражаются через функции

$$H_2^*, \ldots, H_m^*, H_3, \ldots, H_{m-1}, \quad T_3, \ldots, T_{m-1}. \tag{5.6}$$

Операторное уравнение для определения коэффициентов производящей функции и новой функции Гамильтона будет иметь вид (5.4) независимо от алгоритма нормализации, будь то классический алгоритм Биркгофа, алгоритм Депри — Хори или какой-нибудь другой алгоритм нелинейных канонических преобразований. С формальной точки зрения отличие между этими алгоритмами нормализации заключается только в способе вычисления функций $\bar{H}_m^*$ через функции (5.6). При использовании алгоритма Депри — Хори в модификации Мерсмана нужные нам в дальнейшем формы $\bar{H}_m^*$ выражаются через функции (5.6) с помощью соотношений

$$\bar{H}_3^* = H_3^*,$$

$$\bar{H}_4^* = H_4^* + \frac{1}{2} D_3(H_3^* + H_3), \tag{5.7}$$

$$\bar{H}_5^* = H_5^* + \frac{1}{2} D_3\left[H_4^* + H_4 + \frac{1}{6} D_3(H_3^* - H_3)\right] + \frac{1}{2} D_4(H_3^* + H_3).$$

Здесь

$$D_n f = (f \cdot T_n). \tag{5.8}$$

Если уравнения (5.4) для всех m уже решены и найдены соответствующие члены разложения производящей функции в ряд (5.3), то полученное таким образом преобразование (5.2) будет иметь вид

$$q_k^* = q_k + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m q_k, \quad p_k^* = p_k + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m p_k, \tag{5.9}$$

где D — оператор, определяемый формулой

$$D = \sum_{n=3}^{\infty} D_n,$$

а операторы D^m определяются так:

$$D^0 f \equiv f, \quad D^1 f \equiv Df \equiv (f \cdot T), \ldots, D^{m+1} f \equiv D\,(D^m f), \ldots$$

Здесь f — произвольная функция переменных q_k, p_k.

Уравнение (5.4) для определения коэффициентов производящей функции T преобразования (5.2) и коэффициентов новой функции Гамильтона $\bar{H}$ в каждом порядке m относительно координат и импульсов распадается на группы, соответствующие членам $H_{i,j}^*$ в представлении (5.1); это означает, что нормализацию этих членов можно проводить независимо друг от друга. При нормализации членов $H_{i,j}$ в выражениях для коэффициентов производящей функции преобразования (5.2) появляются знаменатели вида

$$d_{i,j} = \lambda_l(\nu_l - \mu_l) + \sum_{k \neq l} \lambda_k(\nu_k - \mu_k),$$

где

$$\nu_l + \mu_l = i, \quad \sum_{k \neq l} (\nu_k + \mu_k) = j.$$

Пусть резонансы вида (2.6) отсутствуют, т. е. пусть выполнено требование а) теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле. В этом случае во всех формах H_m новой функции Гамильтона члены вида $H_{m-1,1}$ можно уничтожить полностью, потому что соответствующие этим членам знаменатели $d_{i,j}$ в нуль не обращаются. Кроме того, так как числа λ_l $(l = 1, 2, 3)$ не обращаются в нуль при рассматриваемых значениях параметра μ, то в случае нечетного m члены $H_{m,0}$ также можно уничтожить полностью. В случае четного m эти члены можно нормализовать и представить в виде

$$H_{m,0} = c_{m,l} \cdot 2^{-\frac{m}{2}} (q_l^2 + p_l^2)^{\frac{m}{2}}, \tag{5.10}$$

где $c_{m,l}$ $(m = 4, 6, \ldots; l = 1, 2, 3)$ — величины, зависящие лишь от параметра задачи μ и являющиеся инвариантами функции Гамильтона невозмущенного периодического движения относительно канонических преобразований. Эти величины с точностью до множителя $m \cdot 2^{1-m}$ равны постоянным g_k, фигурирующим в выражении (2.4) для периода τ рассматриваемого периодического движения.

После проведения преобразования (5.2) первые члены разложения новой функции Гамильтона

$$H = H_2 + \ldots + H_m + \ldots \tag{5.11}$$

имеют вид

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \lambda_k (q_k^2 + p_k^2),$$

$$H_3 = H_{1,2} + H_{0,3},$$

$$H_4 = \frac{1}{4} c_l (q_l^2 + p_l^2)^2 + H_{2,2} + H_{1,3} + H_{0,4},$$

$$H_5 = H_{3,2} + H_{2,3} + H_{1,4} + H_{0,5},$$

где по-прежнему в формах $H_{i,j}$ первый индекс означает их степень по переменным с номером l, второй индекс — степень этих форм по остальным переменным, а $c_l = c_{4,l}$.

Так как совокупность переменных q_i, p_i $(i = 1, 2, 3;\ i \neq l)$ входит в функцию Гамильтона (5.11) в степени не ниже второй, дифференциальные уравнения движения допускают частные решения, соответствующие периодическим движениям, для которых $q_i = p_i = 0$, а изменение переменных q_l, p_l описывается

следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dq_l}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_l} = \lambda_l p_l + p_l \sum_{m=2}^{\infty} m 2^{1-m} c_{2m,\,l} (q_l^2 + p_l^2)^{m-1},$$
$$\frac{dp_l}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_l} = -\lambda_l q_l - q_l \sum_{m=2}^{\infty} m 2^{1-m} c_{2m,\,l} (q_l^2 + p_l^2)^{m-1}. \tag{5.12}$$

В переменных «действие» I — «угол» w, связанных с q_l, p_l формулами

$$q_l = \sqrt{2I} \sin w, \quad p_l = \sqrt{2I} \cos w, \tag{5.13}$$

уравнения (5.12) принимают вид

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = \lambda_l + \sum_{m=2}^{\infty} m c_{2m,\,l} I^{m-1}. \tag{5.14}$$

Решение уравнений (5.14) записывается так:

$$I = I_0 = \text{const}, \quad w = \Omega\,(I_0)(t - t_0) + w_0, \tag{5.15}$$

где частота и период периодического движения (5.15) вычисляются по формулам (за единицу времени принята величина периода обращения тел конечных масс по их круговым орбитам)

$$\Omega\,(I_0) = \lambda_l + \sum_{m=2}^{\infty} m c_{2m,\,l} I_0^{m-1}, \quad \tau = 2\pi/|\,\Omega\,|. \tag{5.16}$$

Из (5.16), в частности, видно, что при $I_0 \to 0$ период движения стремится к величинам $2\pi/\omega_1$, $2\pi/\omega_2$ или 2π соответственно для периодических движений I, II или III типа.

§ 6. Гамильтониан возмущенного движения

Будем исследовать устойчивость периодического движения (5.15) по отношению к возмущениям частоты периодического движения (или, что то же самое, по отношению к возмущениям переменной «действие» I_0 невозмущенного периодического движения) и по отношению к возмущениям q_i, p_i ($i = 1, 2, 3$; $i \neq l$).

Пусть $\varepsilon = \sqrt{2I_0}$ — малая, но конечная, величина (рассматриваются малые периодические движения). Пусть I — переменная «действие» возмущенного периодического движения, связана с I_0 соотношением

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + r_l, \tag{6.1}$$

где r_l — возмущение переменной «действие». Знак величины r_l

произволен. При этом q_i, p_i $(i = 1, 2, 3;\ i \neq l)$ — величины первого, а r_l — второго порядка малости, и по самому своему смыслу все эти величины, в отличие от ε, являются бесконечно малыми величинами.

Декартовы координаты q_l, p_l возмущенного периодического движения через r_l и ε записываются в виде

$$\begin{aligned} q_l &= \sqrt{2I}\sin w = \left[\varepsilon + \frac{r_l}{\varepsilon} - \frac{r_l^2}{2\varepsilon^3} + O(r_l^3)\right]\sin w, \\ p_l &= \sqrt{2I}\cos w = \left[\varepsilon + \frac{r_l}{\varepsilon} - \frac{r_l^2}{2\varepsilon^3} + O(r_l^3)\right]\cos w. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Частота (5.16) исследуемого периодического движения, записанная через ε, принимает вид

$$\Omega_l = \lambda_l + \sum_{m=2}^{\infty} m 2^{1-m} c_{2m,\,l}\varepsilon^{2(m-1)} = \lambda_l + c_l\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4). \tag{6.3}$$

Подставляя в гамильтониан (5.11) вместо q_l, p_l величины (6.2) и собирая члены одинакового порядка по q_i, p_i $(i \neq l)$ и $\sqrt{|r_l|}$, получаем функцию Гамильтона возмущенного движения в виде

$$K = K_2 + K_3 + K_4 + \ldots, \tag{6.4}$$

где

$$K_2 = \Omega_l r_l + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{3}\lambda_i(q_i^2 + p_i^2) + \sum_{m=1}^{\infty}\widehat{H}_{m,\,2}, \tag{6.5}$$

$$K_3 = H_{0,3} + \sum_{m=1}^{\infty}\widehat{H}_{m,\,3}, \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} K_4 = r_l^2\left[c_l + \sum_{m=3}^{\infty} m(m-1)2^{1-m}c_{2m,\,l}\varepsilon^{2(m-2)}\right] + \\ + \frac{r_l}{\varepsilon^2}\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{\widehat{H}}_{m,\,2} + H_{0,4} + \sum_{m=1}^{\infty}\widehat{H}_{m,\,4}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

В (6.5)—(6.7) значок «$\wedge$» означает, что вместо q_l и p_l в соответствующие формы надо подставить выражения $\varepsilon\sin w$ и $\varepsilon\cos w$, а

$$\widehat{H}_{m,\,2} = \left(q_l\frac{\partial}{\partial q_l} + p_l\frac{\partial}{\partial p_l}\right)H_{m,\,2}. \tag{6.8}$$

Функция Гамильтона (6.4) имеет период 2π по переменной w. В (6.4) точками обозначены члены, порядок малости которых относительно величин q_i, p_i $(i \neq l)$ и $\sqrt{|r_l|}$ не ниже пятого.

Итак, первые два этапа схемы исследования орбитальной устойчивости локальным методом (см. § 3) пройдены.

§ 7. Резонансы

При исследовании устойчивости особыми являются такие значения параметра μ, при которых возможны резонансы первого (ляпуновское условие существования периодического движения), второго (порождающие точки для параметрического резонанса), третьего и четвертого (порождающие точки для резонансов, проявляющихся в нелинейной задаче) порядков. В общем виде такие резонансы можно записать следующим образом:

$$n_i\lambda_i + n_j\lambda_j = N\lambda_l \qquad (i, j, l = 1, 2, 3;\ i \neq l,\ j \neq l), \quad (7.1)$$

где $n = |n_i| + |n_j|$ — порядок резонанса, N — любое целое число ($N \neq 0$ при $n = 1, 2$), а l — номер периодического движения (соответственно I, II или III типа). Резонансное соотношение (7.1) перепишем в виде

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3 = 0, \quad (7.2)$$

где k_1, k_2, k_3 — целые числа, с точностью до знака равные числам n_i, n_j, N из (7.1), а ω_1, ω_2 находятся из уравнения (4.3) главы 7:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1+M}{2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1-M}{2}}. \quad (7.3)$$

Здесь введено обозначение $M = \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}$. В интересующей нас области $0 < \mu < \mu^*$ выполняются неравенства $0 < M < 1$, а

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3(4M^2+23)}}{18}. \quad (7.4)$$

При решении вопроса о том, какие из резонансов (7.2) надо учитывать для полного исследования устойчивости движений в многомерных гамильтоновых системах, полезно руководствоваться следующими двумя соображениями:

1) в конкретной задаче частоты линейной системы зависят от параметров известным образом и, следовательно, в рассматриваемой области параметров на них наложены какие-то ограничения; поэтому из всех резонансов (7.2) надо отобрать только принципиально возможные;

2) структура функции Гамильтона в конкретной задаче часто такова, что некоторые из принципиально возможных резонансов не проявляются в процессе нормализации функции Гамильтона и, следовательно, рассматривать их не имеет смысла.

В рассматриваемой здесь задаче для решения вопроса о принципиальной возможности резонанса (7.2) разрешим уравнение (7.2) относительно M и получим

$$M_{1,2} = \frac{-(k_1^2-k_2^2)(k_1^2+k_2^2-2k_3^2) \pm 4k_1k_2k_3\sqrt{k_1^2+k_2^2-k_3^2}}{(k_1^2+k_2^2)^2}, \quad (7.5)$$

а в плоской задаче ($k_3 \equiv 0$)

$$M = \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_2^2 + k_1^2}. \tag{7.6}$$

Тогда из всех резонансов (7.2) принципиально возможными будут только такие, для которых хотя бы одна из величин (7.5) (или величина (7.6) для плоской задачи), подсчитанная по данным k_1, k_2, k_3, будет заключена в интервале $0 < M < 1$.

Далее, функция Гамильтона является четной относительно пространственных переменных q_3, p_3. Это означает, что из всех принципиально возможных резонансов имеет смысл рассматривать только такие, для которых величина k_3 четна.

Все резонансы, проявляющиеся в исследуемых задачах 1а), 1б), 2а), 2б) и 3), приведены в табл. 10—14. При рассмотрении периодических движений I (или II) типа в пространственной задаче

Таблица 10

$\tau \approx \frac{2\pi}{\omega_1}$, плоская задача

n	Резонанс	M	Форма H_m^*	Порядок ε	Примечание
1	$\omega_2 = 0$	1	H_2^*		$\mu = 0$
	$\omega_2 = \omega_1$	0	H_2^*		$\mu = \mu^*$
2	$2\omega_2 = \omega_1$	3/5	H_3^*	1	
3	$3\omega_2 = \omega_1$	4/5	H_4^*	1	
	$3\omega_2 = 2\omega_1$	5/13	H_5^*	2	
4	$4\omega_2 = \omega_1$	15/17	H_5^*	1	
	$4\omega_2 = 3\omega_1$	7/25	H_7^*	3	

надо учитывать как резонансы из табл. 11 (или 13), так и резонансы из табл. 10 (или 12). В первом столбце этих пяти таблиц выписан порядок резонанса, во втором — явное выражение резонансного соотношения через частоты ω_1, ω_2, $\omega_3 \equiv 1$, в третьем — значение параметра M, соответствующее этому резонансу и вычисленное по формуле (7.5) или (7.6), в четвертом столбце указана та форма H_m^*, в которой первый раз проявляется этот резонанс *), а в пя-

*) Резонанс (7.1) проявляется первый раз при учете такой формы H_m^* из (4.2), для которой $m = |N| + |n_i| + |n_j|$.

Таблица 11

$\tau \approx \frac{2\pi}{\omega_1}$, пространственная задача

n	Резонанс	M	Форма H^*_m	Порядок ε	Примечание
3	$2+\omega_2=3\omega_1$	$\frac{6\sqrt{6}-4}{25}$	H^*_6	3	
4	$2(1-\omega_2)=\omega_1$	7/25	H^*_5	1	
	$2(1+\omega_2)=3\omega_1$	119/169	H^*_7	3	
	$2(1+\omega_2)=4\omega_1$	7/25	H^*_8	4	
	$4=5\omega_1$	7/25	H^*_9	5	

Таблица 12

$\tau \approx \frac{2\pi}{\omega_2}$, плоская задача

n	Резонанс	M	Форма H^*_m	Порядок ε	Примечание
1	$\omega_1=N\omega_2$	$1-\frac{2}{N^2+1}$	H^*_{N+1}		$\mu=\frac{1-\sqrt{1-\frac{16N^2}{27(N^2+1)^2}}}{2}$, $N=1,2,3,\ldots$
2	$2\omega_1=N\omega_2$	$1-\frac{8}{N^2+4}$	H^*_{N+2}	N	$N=2k+3$, $k=0,1,2,\ldots$
3	$3\omega_1=N\omega_2$	$1-\frac{18}{N^2+9}$	H^*_{N+3}	N	$N=3k+4$, $N=3k+5$, $k=0,1,2,\ldots$
4	$4\omega_1=N\omega_2$	$1-\frac{32}{N^2+16}$	H^*_{N+4}	N	$N=4k+5$, $N=4k+7$, $k=0,1,2,\ldots$

том — порядок по ε, в котором обнаруживается эффект данного резонанса *) (см. §§ 8—10).

Для исследования устойчивости в строгом нелинейном смысле при нерезонансных значениях параметров (как это будет видно

*) Резонансный эффект, соответствующий соотношению (7.1), обнаруживается при учете в разложении функции Гамильтона (6.4) членов, порядок которых не ниже $\varepsilon^{|N|}$.

Таблица 13

$\tau \approx \frac{2\pi}{\omega_2}$, пространственная задача

n	Резонанс	M	Форма H_m^*	Порядок ε	Примечание
2	$2 = N\omega_2$	$1 - \frac{8}{N^2}$	H_{N+2}^*	N	$N = 3, 4, 5, \ldots$
3	$2 - \omega_1 = N\omega_2$	$1 - \frac{2(5N^2 - 3) + 8N\sqrt{N^2 - 3}}{(N^2 + 1)^2}$	H_{N+3}^*	N	$N = 2, 3, 4, \ldots$
	$2 + \omega_1 = N\omega_2$	$1 - \frac{2(5N^2 - 3) - 8N\sqrt{N^2 - 3}}{(N^2 + 1)^2}$	H_{N+3}^*	N	$N = 3, 4, 5, \ldots$
4	$2(1 + \omega_1) = N\omega_2$	$1 - \frac{32N^2}{(N^2 + 4)^2}$	H_{N+4}^*	N	$N = 5, 6, 7, \ldots$
	$4 = N\omega_2$	$1 - \frac{32}{N^2}$	H_{N+4}^*	N	$N = 2k + 1$ $k = 3, 4, 5, \ldots$

Таблица 14

$\tau \approx 2\pi$, задача только пространственная

n	Резонанс	M	Форма H_m^*	Порядок ε	Примечание
1	$\omega_2 = 0$	1	H_2^*		$\mu = 0$
2	$\omega_1 - \omega_2 = 0$	0	H_2^*	0	$\mu = \mu^*$
3	$\omega_1 - 2\omega_2 = 0$	3/5	H_3^*	0	
	$\omega_1 + 2\omega_2 = 2$	7/25	H_5^*	2	
	$3\omega_2 = 2$	1/9	H_5^*	2	
4	$\omega_1 - 3\omega_2 = 0$	4/5	H_4^*	0	
	$3\omega_1 - \omega_2 = 2$	$(6\sqrt{6} - 4)/25$	H_6^*	2	
	$\omega_1 + 3\omega_2 = 2$	$(6\sqrt{6} + 4)/25$	H_6^*	2	
	$4\omega_2 = 2$	1/2	H_6^*	2	

в § 10) достаточно учитывать в разложении функции Гамильтона (4.2) члены до четвертого порядка включительно.

Из табл. 10, 11 и 14 видно, что для полного решения задачи (т. е. и при резонансных значениях параметров) об устойчивости периодических движений I и III типов достаточно учесть конечное число членов разложения гамильтониана (члены H_7^* в задаче 1а), члены H_9^* в задаче 1б) и члены H_6^* в задаче 3)). Как видно из табл. 12, 13, в задачах 2а), 2б) число резонансов счетно (точкой накопления резонансов на оси $O\mu$ является точка $\mu = 0$). Это означает, что никакого конечного числа членов разложения функции Гамильтона недостаточно для окончательного решения задачи об устойчивости периодических движений II типа. Однако даже на основании анализа конечного числа членов разложения гамильтониана можно сделать достаточно полные выводы об устойчивости и неустойчивости в резонансных случаях (см. § 11). Мы ограничимся рассмотрением в функции Гамильтона (4.2) членов до H_5^* включительно.

§ 8. Линейная нормализация. Параметрический резонанс

В этом параграфе исследуется устойчивость линейной системы с функцией Гамильтона (6.5).

Прежде всего заметим, что в линейной системе возможен параметрический резонанс

$$n_i\lambda_i + n_j\lambda_j = N\lambda_l \qquad (i, j, l = 1, 2, 3;\ i \neq l,\ j \neq l), \tag{8.1}$$

где $|n_i| + |n_j| = 2$, а N — произвольное ненулевое целое число. Из табл. 10—14 видно, что в нашей задаче параметрический резонанс комбинационного типа (т. е. когда $n_i \cdot n_j \neq 0$) не встречается. Поэтому соотношение (8.1) можно переписать так:

$$2\lambda_i = N\lambda_l \qquad (i, l = 1, 2, 3;\ i \neq l). \tag{8.2}$$

Теперь опишем процедуру нормализации квадратичной части K_2 функции Гамильтона (6.4).

Функцию Гамильтона (6.5) линеаризованной системы представим в виде

$$K_2 = \Omega_l r_l + \sum_{m=0}^{\infty} F_{m,\,2}\varepsilon^m, \tag{8.3}$$

а частоту периодического движения (6.3) для дальнейших вычислений удобнее переписать следующим образом:

$$\Omega_l = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_l^{(n)}\varepsilon^n, \quad \Omega_l^{(0)} = \lambda_l, \quad \Omega_l^{(2n-1)} = 0, \quad \Omega_l^{(2n)} = (n+1)\,2^{-n}c_{2n+2,\,l}. \tag{8.4}$$

В (8.3) функция $F_{0,2}$ не зависит от w и имеет вид

$$F_{0,2} = \frac{1}{2}\lambda_i(q_i^2 + p_i^2) + \frac{1}{2}\lambda_j(q_j^2 + p_j^2) \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq l,\ j \neq l),$$

а функции $F_{m,2}$ $(m \geqslant 1)$ имеют нулевой порядок относительно ε, являются 2π-периодическими функциями w и записываются через конечные ряды синусов и косинусов целых кратностей величины w, причем максимальная кратность не превышает m. Эти функции выражаются через функции $\hat{H}_{m,2}$ с помощью соотношений

$$F_{m,2} = \hat{H}_{m,2}\,\varepsilon^{-m} \qquad (m = 1,\ 2,\ldots). \tag{8.5}$$

Для приведения функции (8.3) к нормальной форме необходимо сначала провести ее нормализацию по переменным q_i, p_i, q_j, p_j. Для этого перейдем к новой независимой переменной w. Эта операция сводится к делению функции (8.3) на Ω_l. Функция Гамильтона, описывающая изменение переменных q_i, p_i, q_j, p_j, будет вычисляться по формуле

$$G_2 = \sum_{m=0}^{\infty} G_{m,\,2}\varepsilon^m, \tag{8.6}$$

где $G_{0,2} = \frac{1}{\lambda_l} F_{0,2}$, а функции $G_{m,2}$ $(m \geqslant 1)$ обладают всеми перечисленными выше свойствами функций $F_{m,2}$ и вычисляются по ним при помощи рекуррентных соотношений

$$G_{m,\,2} = \frac{1}{\lambda_l} F_{m,\,2} - \frac{1}{\lambda_l}\sum_{n=1}^{m} G_{m-n,\,2}\Omega_l^{(n)}. \tag{8.7}$$

Функция Гамильтона (8.6) соответствует неавтономной канонической системе с двумя степенями свободы.

Нормализацию функции Гамильтона (8.6) можно провести обычным способом, например, используя алгоритм, аналогичный алгоритму Биркгофа, или используя алгоритм Депри — Хори. При этом на каждом шаге нормализации формы $G_{m,2}$ приходится решать системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Однако в нашем случае функция Гамильтона содержит «время» w только через комбинации $\varepsilon \sin w$ и $\varepsilon \cos w$. Это позволяет нормализацию неавтономной канонической системы с функцией Гамильтона (8.6) свести к нормализации автономной системы (но уже с тремя степенями свободы).

Для этого прежде всего заметим, что для нормализуемой неавтономной функции Гамильтона (8.6) операторное уравнение (5.4) в обозначениях этого параграфа принимает вид

$$\Delta_0 T_{m,2} = \bar{G}_{m,2} - G^*_{m,2}, \tag{8.8}$$

где

$$\Delta_0 = D_0 - \frac{\partial}{\partial w}, \quad D_0 T_{m,2} = -(G_{0,2} \cdot T_{m,2}). \tag{8.9}$$

В (8.8) $T_{m,2}$ и $G^*_{m,2}$ — члены степени m относительно ε в разложениях производящей функции T_2 искомого преобразования и новой функции Гамильтона G^*_2 в ряды по малому параметру ε. Функции $\check{G}_{m,2}$ определяются по формулам, аналогичным (5.7).

Однако процедуру решения уравнений (8.8) можно представить в несколько ином виде. Введем фиктивные переменные q_w, p_w по формулам

$$q_w = \varepsilon \sin w, \quad p_w = \varepsilon \cos w. \tag{8.10}$$

После такой подстановки «время» w в функцию Гамильтона (8.6) явно входить не будет. Это следует из того, что в функцию (6.5) величины ε и w входят только в виде комбинаций (8.10), а в частоте (8.4) параметр ε^2 можно заменить на выражение $q_w^2 + p_w^2$. Получившаяся функция Гамильтона будет иметь вид

$$L = L_2 + \ldots + L_m + \ldots, \tag{8.11}$$

$$L_m = \check{G}_{m-2,2}\varepsilon^{m-2} \sum_{\nu_1+\ldots+\mu_3=m} h_{\nu_1\ldots\mu_3} q_w^{\nu_1} q_i^{\nu_2} q_j^{\nu_3} p_w^{\mu_1} p_i^{\mu_2} p_j^{\mu_3}, \tag{8.12}$$

где значок «$\bigvee$» означает, что в соответствующих функциях величины ε, w исключены при помощи подстановки (8.10). В (8.12) $m \geqslant 3$, а функция L_2 определена ниже. Отметим, что действия оператора «$\bigwedge$» из § 6 и оператора «$\bigvee$» взаимно противоположны и, таким образом, по функциям $H_{m,2}$ из (5.11) можно сразу же получить функции $\check{F}_{m,2}\varepsilon^m$, по которым с помощью (8.7) определяются функции $\check{G}_{m,2}$. Для этого надо только в функциях $H_{m,2}$ сделать формальную замену $q_l \to q_w$, $p_l \to p_w$.

Производящую функцию искомого, линейного относительно q_i, p_i, q_j, p_j, нормализующего преобразования S и новую функцию Гамильтона L^* будем искать в виде (8.11). Используя правило дифференцирования сложных функций, оператор Δ_0 перепишем в виде

$$\Delta_0 = D_0 - \left[p_w \frac{\partial}{\partial q_w} - q_w \frac{\partial}{\partial p_w}\right]. \tag{8.13}$$

Из (8.13) видно, что действие оператора Δ_0 на произвольную функцию F переменных q_i, p_i, q_j, p_j, q_w, p_w можно представить при помощи скобки Пуассона

$$\Delta_0 F = -(L_2 \cdot F),$$

где

$$L_2 = G_{0,2} + \frac{1}{2}(q_w^2 + p_w^2) = \frac{1}{2}(q_w^2 + p_w^2) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\lambda_i}{\lambda_l}(q_i^2 + p_i^2) + \frac{1}{2}\frac{\lambda_j}{\lambda_l}(q_j^2 + p_j^2).$$

Нужные в дальнейшем формы L_m из (8.11) имеют вид

$$L_3 = \frac{1}{\lambda_l} H_{1,2},$$

$$L_4 = \frac{1}{\lambda_l} H_{2,2} - \frac{c_l}{\lambda_l}(q_w^2 + p_w^2)\left[\frac{1}{2}\frac{\lambda_i}{\lambda_l}(q_i^2 + p_i^2) + \frac{1}{2}\frac{\lambda_j}{\lambda_l}(q_j^2 + p_j^2)\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{\lambda_l} H_{3,2} - \frac{c_l}{\lambda_l^2}(q_w^2 + p_w^2) H_{1,2},$$

где формы $H_{m,2}$ определены в (5.11) (теперь первый индекс в $H_{m,2}$ означает степень этих форм относительно q_w, p_w).

Операторное уравнение для определения форм $S_{m-2,2}$ и L_m^* из разложений производящей функции S и нормальной формы новой функции Гамильтона L^* будет иметь вид

$$\Delta_0 S_{m-2,2} = \tilde{L}_m - L_m^*,$$

где

$$\Delta_0 S_{m-2,2} = -(L_2 \cdot S_{m-2,2}),$$

а функции $\tilde{L}_m$ вычисляются по функциям

$$L_2, \ldots, L_m, L_3^*, \ldots, L_{m-1}^*, S_{1,2}, \ldots, S_{m-3,2}$$

с помощью формул, аналогичных формулам (5.7), в которых операторы D_m надо заменить на операторы $D_{m-2,2}$, действие которых на произвольную функцию F переменных q_i, p_i, q_j, p_j, q_w, p_w описывается соотношениями

$$D_{m-2,2}F = (F \cdot S_{m-2,2}) = \sum_{k=i,j}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial S_{m-2,2}}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial S_{m-2,2}}{\partial q_k}\right].$$

Таким образом, вместо неавтономной системы с функцией Гамильтона (8.6) можно нормализовать автономную систему (но с числом степеней свободы, на единицу большим) с функцией Гамильтона (8.11). При этом предлагаемая здесь процедура нормализации будет отличаться от обычной нормализации автономной системы с тремя степенями свободы в окрестности положения равновесия только тем, что при вычислении скобок Пуассона в величинах (5.7), а также при получении явного вида (5.9) рассматриваемого преобразования надо проводить дифференцирование не по всем переменным q_l, p_i, q_j, p_j, q_w, p_w, а только по переменным q_i, q_j, p_i, p_j.

В функцию Гамильтона (8.11) члены q_i, p_i, q_j, p_j входят только квадратичным образом (в (8.12) $\nu_2 + \nu_3 + \mu_2 + \mu_3 = 2$). Поэтому помешать нормализации могут только резонансы вида (8.2).

Пусть выполнено резонансное соотношение (8.2). Тогда нормальная форма функции Гамильтона (8.11) будет такой:

$$L^* = r_w + \frac{\lambda_i}{\lambda_l} r_i + \frac{\lambda_j}{\lambda_l} r_j + \sum_{n=1}^{\bar{N}} (c_{2n,\,i} r_i + c_{2n,\,j} r_j) r_w^n + \\ + \alpha \sqrt{r_w^{|N|}} \cdot r_i \sin(2\varphi_i - N\varphi_w) + O(r_w^{\frac{|N|+1}{2}}), \quad (8.14)$$

где

$$q_k^* = \sqrt{2r_k} \sin \varphi_k, \; p_k^* = \sqrt{2r_k} \cos \varphi_k \qquad (k = i, j, w). \quad (8.15)$$

В (8.14) величины $c_{2m,\,i}$, $c_{2m,\,j}$ и α являются инвариантами функции Гамильтона относительно канонических преобразований, а $\bar{N} = [1/2 \mid N \mid]$, где квадратные скобки обозначают операцию вычисления целой части числа.

Замена q_i, p_i, q_j, $p_j \to q_i^*$, p_i^*, q_j^*, p_j^* осуществляется по формулам, аналогичным формулам (5.9), в которых операторы D_n надо заменить на операторы $D_{n-2,\,2}$, получаемые по функциям $S_{n-2,\,2}$. Из вида этих операторов также следует, что фиктивные переменные q_w, p_w после проведенной нормализации не изменились.

Сделаем теперь преобразование, обратное к (8.10), возвратимся к старой независимой переменной и зададим еще преобразование r_l, $w \to r_l^*$, w^* по формулам

$$r_l = r_l^* + \frac{\partial S}{\partial w} = r_l^* + \hat{\bar{S}}_{1,2} + \hat{\bar{S}}_{2,2} + \ldots, \quad w = w^*, \quad (8.16)$$

где

$$\bar{S}_{m,\,2} = \left(q_w \frac{\partial}{\partial p_w} - p_w \frac{\partial}{\partial q_w} \right) S_{m,\,2} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \quad (8.17)$$

Тогда, вместе с описанным выше преобразованием переменных q_i, p_i, q_j, p_j, получим каноническое преобразование, нормализующее функцию (8.3) по всем переменным. В резонансном случае нормальная форма будет такой:

$$K_2 = \sum_{k=i,\,j,\,l} \Omega_k r_k + A\varepsilon^{|N|} r_i \sin(2\varphi_i - Nw) + O(\varepsilon^{|N|+1}), \quad (8.18)$$

а в нерезонансном —

$$K_2 = \sum_{k=i,\,j,\,l} \Omega_k r_k + O(\varepsilon^{|N|+1}). \quad (8.19)$$

В (8.18) и (8.19) введены обозначения

$$\Omega_k = \sum_{n=0}^{\bar{N}} \Omega_k^{(2n)} \varepsilon^{2n} \qquad (k = i, j), \quad (8.20)$$

$$\Omega_k^{(0)} = \lambda_k, \quad \Omega_k^{(2n)} = \frac{\lambda_k}{\lambda_l}\Omega_l^{(2n)} + \sum_{m=1}^{n} 2^{-m} c_{2m,\,k}\Omega^{2(n-m)},$$

$$A = \alpha\lambda_l 2^{-\frac{|N|}{2}}.$$

Рассмотрим случай параметрического резонанса. Из точек $\mu^{(0)}$ на оси $O\mu$, для которых выполнено соотношение (8.2), при малых значениях параметра ε будут исходить области параметрического резонанса (области неустойчивости линейной системы с гамильтонианом (8.18)). Согласно [97] (см. также главу 2), границы областей параметрического резонанса в наших обозначениях запишутся так:

$$\left|\Omega_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_l}\Omega_l\right| = |A|\,\varepsilon^{|N|}. \tag{8.21}$$

При этом, если левая часть последнего соотношения будет меньше правой, то рассматриваемое периодическое движение будет неустойчиво, а если больше, то имеет место устойчивость в линейном приближении.

В плоскости параметров μ, ε уравнения кривых, выделяющих области параметрического резонанса, будем искать в виде рядов

$$\mu = \mu^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^{(m)}\varepsilon^m. \tag{8.22}$$

Величины Ω_k $(k = i, l)$ представим в виде рядов по степеням отклонений μ от порождающей точки $\mu^{(0)}$ оси $O\mu$:

$$\Omega_k = \Omega_k|_{\mu=\mu^{(0)}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \Omega_k}{\partial \mu^m}\bigg|_{\mu=\mu^{(0)}} (\mu - \mu^{(0)})^m. \tag{8.23}$$

Подставляя выражения (8.4), (8.20) и (8.22) в ряды (8.23), а затем получившиеся выражения подставляя в уравнение границы области параметрического резонанса (8.21) и приравнивая члены одинакового порядка по ε (до членов $\varepsilon^{|N|}$ включительно), найдем коэффициенты разложения μ по параметру ε:

$$|N| = 1, \quad \mu^{(1)} = \pm\ \Delta, \tag{8.24}$$

$$|N| = 2, \quad \mu^{(1)} = 0, \quad \mu^{(2)} = \delta \pm\ \Delta, \tag{8.25}$$

$$|N| = 3, \quad \mu^{(1)} = 0, \quad \mu^{(2)} = \delta, \quad \mu^{(3)} = \pm\ \Delta, \tag{8.26}$$

. . . . . .

$$|N| = m, \quad \mu^{(1)} = 0, \quad \mu^{(2)} = \delta, \quad \mu^{(3)} = 0, \ldots, \tag{8.27}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{d} A\lambda_l|_{\mu=\mu^{(0)}}, \quad \delta = -\frac{1}{d}(\lambda_l\Omega_i^{(2)} - \lambda_i\Omega_l^{(2)})|_{\mu=\mu^{(0)}}, \qquad d = \lambda_l \frac{\partial\lambda_i}{\partial\mu} - \lambda_i\frac{\partial\lambda_l}{\partial\mu}. \tag{8.28}$$

В (8.24) — (8.26) знаки «±» означают, что даются уравнения сразу двух границ области параметрического резонанса.

§ 9. Резонансные кривые третьего и четвертого порядков

Пусть теперь параметры задачи таковы, что имеет место устойчивость рассматриваемого периодического движения (5.15) в линейном приближении. Тогда, проведя нормализацию линейной системы указанным в § 8 способом, функцию Гамильтона (6.4) можно привести к виду

$$K = K_2 + K_3 + K_4 + \ldots, \tag{9.1}$$

где K_2 имеет вид (8.19), а

$$K_3 = K_{0,3} + \hat{K}_{1,3} + \hat{K}_{2,3} + \ldots, \tag{9.2}$$
$$K_{0,3} = H_{0,3}, \quad K_{1,3} = H_{1,3} + D_{1,2}H_{0,3}, \quad K_{2,3} = H_{2,3} + D_{1,2}H_{1,3} + D_{2,2}H_{0,3},$$

$$K_4 = c_l r_l^2 + \frac{r_l}{\varepsilon^2}[\hat{K}_{1,2} + \hat{K}_{2,2} + \ldots] + K_{0,4} + \ldots, \tag{9.3}$$

$$K_{1,2} = \bar{H}_{1,2}, \quad K_{2,2} = \bar{H}_{2,2} + D_{1,2}\bar{H}_{1,2}, \quad K_{0,4} = H_{0,4} + \frac{1}{\varepsilon^2}\bar{S}_{1,2}\bar{H}_{1,2}.$$

Здесь точками обозначены члены более высокого порядка относительно ε (или относительно величин q_w, p_w из § 8).

Для выяснения вопроса об устойчивости в строгом (нелинейном) смысле процесс нормализации функции Гамильтона надо продолжить.

При нелинейной нормализации гамильтониана (9.1) могут проявиться эффекты резонансов третьего и четвертого порядков

$$n_i\Omega_i + n_j\Omega_j = N\Omega_l, \quad |n_i| + |n_j| = 3,4 \tag{9.4}$$
$$(i, j, l = 1, 2, 3;\ i \neq l,\ j \neq l),$$

где N — произвольное целое число, а Ω_k ($k = l, i, j$) определены формулами (8.4) и (8.20). Если рассматривается плоская задача, то будем считать $n_j \equiv 0$.

Прежде чем перейти к описанию процесса нелинейной нормализации, заметим, что в плоскости параметров μ, ε соотношение (9.4) представляет собой уравнение резонансной кривой, исходящей из

точки $\mu^{(0)}$ оси $O\mu$. Величина $\mu^{(0)}$ является корнем уравнения

$$n_i\lambda_i + n_j\lambda_j = N\lambda_l.$$

Эту же величину можно найти из табл. 10—14.

Уравнение резонансной кривой (9.4) будем искать в виде (8.22). Тогда, подставляя выражения (8.4), (8.20) и (8.22) в ряды (8.23), а затем получившиеся выражения подставляя в уравнение (9.4) и приравнивая члены одинакового порядка по ε, найдем коэффициенты разложения μ в ряд по малому параметру ε.

Величина $\mu^{(0)}$ уже найдена; вычисления показывают, что величина $\mu^{(1)}$ равна нулю, а величина $\mu^{(2)}$ определяется соотношением

$$\mu^{(2)} = -\left.\frac{n_i\Omega_i^{(2)} + n_j\Omega_j^{(2)} - N\Omega_l^{(2)}}{n_i\frac{\partial\lambda_i}{\partial\mu} + n_j\frac{\partial\lambda_j}{\partial\mu} - N\frac{\partial\lambda_l}{\partial\mu}}\right|_{\mu=\mu^{(0)}}. \qquad (9.5)$$

Члены более высокого порядка по ε в (8.22) лишь незначительно деформируют квадратичную параболу $\mu = \mu^{(0)} + \mu^{(2)}\varepsilon^2$ и в дальнейшем не рассматриваются.

§ 10. Нелинейная нормализация. Условия устойчивости

Рассмотрим сначала такие значения параметров μ, ε, которые принадлежат резонансным кривым третьего или четвертого порядка. Прежде всего отметим, что, согласно [157], в случае выполнения резонансного соотношения (11.4) при $n_i \cdot n_j < 0$ будет иметь место формальная устойчивость рассматриваемого периодического движения.

Если параметры μ, ε принадлежат резонансной кривой, то форму третьего порядка в функции Гамильтона (9.1) можно привести к виду

$$K_3 = A\sqrt{r_i^{|n_i|}r_j^{|n_j|}}\sin(n_i\varphi_i + n_j\varphi_j - Nw) + O(\varepsilon^{|N|+1}), \qquad (10.1)$$

$$A = \alpha\varepsilon^{|N|} + O(\varepsilon^{|N|+1}),$$

где α — постоянная величина. Процесс нормализации формы (9.2) полностью аналогичен нормализации квадратичной части функции Гамильтона, которая подробно описана в § 8. Если в (10.1) $\alpha \neq 0$, то (см. § 6 гл. 6) будет иметь место неустойчивость рассматриваемого периодического движения. В случае $\alpha = 0$ вопрос об устойчивости решается членами более высокого порядка в разложении функции Гамильтона (9.1).

Пусть теперь параметры задачи таковы, что резонансы третьего порядка отсутствуют. В этом случае форму третьего порядка в разложении функции Гамильтона можно уничтожить полностью. При этом в форме четвертого порядка (9.3) меняются только члены $K_{0,4}$ (и члены более высокого порядка, обозначенные в (9.3)

точками) и они теперь принимают вид (см. (5.8))

$$K_{0,4} + \frac{1}{2} D_{0,3} K_{0,3}. \tag{10.2}$$

В (10.2) и в других формулах действие операторов $D_{m,3}$ ($m = 0,1,\ldots$) аналогично действию операторов $D_{m,2}$ ($m = 1, 2,\ldots$) в (9.2), (9.3).

Нормализация формы (9.3) (с учетом модифицированных членов $K_{0,4}$ из (10.2)) разбивается на три независимые друг от друга части.

1) Нормализация членов, пропорциональных r_l^2. Эти члены уже нормализованы.

2) Нормализация членов, пропорциональных r_l. Можно показать, что нормализация этих членов сводится к усреднению величины $\hat{K}_{1,2} + \hat{K}_{2,2} + \ldots$ по быстрым фазам движения, определяемого гамильтонианом (8.19), а нормальная форма этих членов будет такой *):

$$r_l(c_{li} r_i + c_{lj} r_j^*).$$

3) Нормализация членов, не зависящих от r_l. Последний этап аналогичен процедуре линейной нормализации, и в результате нелинейной нормализации функцию Гамильтона возмущенного движения можно привести к виду

$$K = \mathcal{L} + \mathcal{N} + \mathcal{R} + \bar{K}, \tag{10.3}$$

$$\mathcal{L}(r_l, r_i, r_j) = \Omega_l r_l + \Omega_i r_i + \Omega_j r_j, \tag{10.4}$$

$$\mathcal{N}(r_l, r_i, r_j) = c_l r_l^2 + c_{li} r_l r_i + c_{lj} r_l r_j + c_i r_i^2 + c_{ij} r_i r_j + c_j r_j^2, \tag{10.5}$$

$$\mathcal{R} = B \sqrt{r_i^{|n_i|} r_j^{|n_j|}} \sin(n_i \varphi_i + n_j \varphi_j - N w), \tag{10.6}$$

$$B = \beta \varepsilon^{|N|} + O(\varepsilon^{|N|+1}),$$

где коэффициенты формы (10.5) являются инвариантами функции Гамильтона относительно канонических преобразований и имеют разложение по ε, аналогичное разложению величин Ω_k ($k = l, i, j$). В (10.3) функция $\bar{K}$ имеет порядок относительно r_k ($k = l, i, j$), более высокий, чем функции (10.4) — (10.6), и является 2π-периодической функцией переменных φ_i, φ_j, w. Нормальная форма (10.3) выписана для случая резонанса четвертого порядка (9.4), а в нерезонансном случае в (10.3) будут отсутствовать члены (10.6).

*) Отметим, что нормализации членов $\hat{K}_{1,2} + \hat{K}_{2,2} + \ldots$ могли бы помешать резонансы $n_i\Omega_i + n_j\Omega_j = N\Omega_l$, где $|n_i| + |n_j| = 2$. Однако эти резонансы осуществляются только на границах областей параметрического резонанса и уже учтены при линейной нормализации.

Рассмотрим случай резонанса четвертого порядка, т. е. будем предполагать, что выполнено соотношение (9.4) при $|n_i| + |n_j| = 4$ и $B \neq 0$. Если

$$B\sqrt{|n_i|^{|n_i|}|n_j|^{|n_j|}} > |\mathcal{N}(-N, n_i, n_j)|, \tag{10.7}$$

то (см. § 6 гл. 6) рассматриваемое периодическое движение будет неустойчиво. При обратном знаке в неравенстве (10.7) в случае плоской задачи (т. е. при $n_j = 0$) имеет место устойчивость по Ляпунову, а в случае пространственной задачи — устойчивость в четвертом приближении.

Пусть теперь параметры μ, ε таковы, что они принадлежат области устойчивости линейной задачи, а резонансов третьего и четвертого порядков нет, т. е. в разложении (10.3) члены (10.6) отсутствуют.

Рассмотрим плоскую задачу (в (10.3) — (10.5) надо положить $r_j = 0$). Пусть

$$\mathcal{N}(\Omega_i, -\Omega_l, 0) \neq 0. \tag{10.8}$$

Тогда, согласно теореме Арнольда — Мозера об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы (см. главу 4), исследуемое периодическое движение (5.15) будет устойчиво. Если $\mathcal{N}(\Omega_i, -\Omega_l, 0) = 0$, то вопрос об устойчивости членами этого порядка не решается.

Для пространственной задачи, описываемой многомерной гамильтоновой системой, такого завершенного результата получить не удается. Пусть определители

$$D_3 = \det\left\|\frac{\partial^2\mathcal{N}}{\partial r_m \partial r_n}\right\|, \quad D_4 = \det\begin{Vmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{N}}{\partial r_m \partial r_n} & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_m} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_n} & 0 \end{Vmatrix} \tag{10.9}$$

$$(m, n = l, i, j)$$

при $r_l = r_i = r_j = 0$ одновременно в нуль не обращаются. Тогда, согласно [4, 102] (см. также § 1 главы 5), имеет место устойчивость исследуемого периодического движения для большинства начальных условий.

В рассматриваемой задаче, помимо устойчивости для большинства начальных условий, решался еще вопрос о формальной устойчивости периодических движений.

Достаточное условие формальной устойчивости, применявшееся в работе [58] (см. также главу 8), в рассматриваемой задаче сводится к вопросу о совместности системы уравнений

$$\mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{N} = 0 \tag{10.10}$$

относительно r_l, r_i, r_j в области $r_i \geqslant 0$, $r_j \geqslant 0$. Нетрудно показать

(исключив r_l из (10.10)), что в свою очередь вопрос о совместности этой системы уравнений сводится к вопросу о знакоопределенности при $r_i \geqslant 0$, $r_j \geqslant 0$ формы

$$F = a_i r_i^2 + a_{ij} r_i r_j + a_j r_j^2, \tag{10.11}$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= c_l \Omega_i^2 - c_{li} \Omega_i \Omega_l + c_i \Omega_l^2, \\ a_{ij} &= 2c_l \Omega_i \Omega_j - c_{li} \Omega_j \Omega_l - c_{lj} \Omega_i \Omega_l + c_{ij} \Omega_l^2, \\ a_j &= c_l \Omega_j^2 - c_{lj} \Omega_j \Omega_l + c_j \Omega_l^2. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Пусть

$$D = a_{ij}^2 - 4 a_i a_j. \tag{10.13}$$

Если $D < 0$ или если $D > 0$, но все коэффициенты (10.12) имеют одинаковые знаки, то форма F будет знакоопределенной при $r_i \geqslant 0$, $r_j \geqslant 0$.

Для того чтобы в нерезонансном случае при достаточно малых значениях параметра ε сделать заключение об устойчивости в плоской задаче или заключения об устойчивости для большинства начальных условий и о формальной устойчивости в пространственной задаче, достаточно вычислить коэффициенты форм (10.4) и (10.5) при значении параметра ε, равном нулю.

§ 11. Результаты расчетов

В этом параграфе изложены результаты, полученные при исследовании устойчивости малых периодических движений, близких к треугольным точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел. Исследование проводилось методом, который был изложен в предыдущих параграфах. При этом использовался комплекс программ нормализации гамильтоновых систем, разработанный на языке ФОРТРАН в работе [70].

Сначала опишем результаты, которые можно получить при анализе членов до H_5^* включительно в разложении функции Гамильтона (4.2).

Коэффициенты $\mu^{(m)}$ разложений границ областей параметрического резонанса в ряды по ε, подсчитанные по формулам (8.24) — (8.28), приведены в табл. 15.

Таблица 15

l	Резонанс	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	$\mu^{(3)}$
1	$2\lambda_2 = -\lambda_1$	0,0242938...	$\pm$0,0640727...	—	—
2	$2\lambda_1 = -3\lambda_2$	0,0026368...	0	—0,0035782...	$\pm$2,873414...
	$2\lambda_3 = -3\lambda_2$	0,0380258...	0	—0,8055612...	$\pm$0,067851...

Таблица 16

l	Резонанс	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(2)}$	A
1	$3\Omega_2 = -\Omega_1$	0,01351602...	—0,07244043...	$\varepsilon \cdot 3{,}168362...$
	$3\Omega_2 = -2\Omega_1$	0,00263680...	—0,00485767...	$\varepsilon^2 \cdot 1223{,}472...$
2	$-\Omega_1 + 2\Omega_3 = -2\Omega_2$	0,03538546...	—1,233667...	форм. уст.
3	$\Omega_1 - 2\Omega_2 = 2\Omega_3$	0,03538546...	0,02502685...	форм. уст.
	$\Omega_1 + 2\Omega_2 = 0$	0,0242939...	0,01813931...	1,35542...
	$3\Omega_2 = -2\Omega_3$	0,03802575...	0,02858462...	$\varepsilon^2 \cdot 6{,}059222...$

Таблица 17

l	Резонанс	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(2)}$	B	$\mathcal{N}(-N, n_i, n_j)$
1	$4\Omega_2 = -\Omega_1$	0,00827037...	—0,02622441...	$O(\varepsilon)$	237,9977...
	$2(\Omega_2 + \Omega_3) = \Omega_1$	0,03538546...	1,313894...	$O(\varepsilon)$	72,31265...
3	$\Omega_1 + 3\Omega_2 = 0$	0,01351602...	0,00961191...	4,48074...	4,170536...

Используя формулы § 9, можно найти коэффициенты разложений резонансных кривых третьего и четвертого порядков в ряды по малому параметру ε. Результаты представлены в табл. 16 (резонансы 3-го порядка) и 17 (резонансы 4-го порядка).

В пятом столбце табл. 16 даны значения главного члена резонансного коэффициента A для рассматриваемых резонансов третьего порядка. Ни один из них не равен нулю, и, следовательно, при достаточно малых значениях параметра ε соответствующие периодические движения будут неустойчивы.

В пятом и шестом столбцах табл. 17 даны значения главного члена коэффициента B и значения величин $\mathcal{N}(-N, n_i, n_j)$ для рассматриваемых резонансов четвертого порядка. Видно, что неустойчивыми при резонансных значениях параметров будут только периодические движения III типа (резонанс $\Omega_1 + 3\Omega_2 = 0$).

Несложные выкладки показывают, что коэффициенты c_l, c_{li}, c_{lj} нормальной формы (10.5) можно не находить в результате

описанного выше алгоритма нормализации, так как при $\varepsilon = 0$ они совпадают с соответствующими коэффициентами нормализованного около положения равновесия гамильтониана (4.2). Нормализованная форма четвертого порядка разложения гамильтониана в окрестности треугольной точки либрации при нерезонансных значениях параметра μ имеет вид

$$H_4 = c_{200}r_1^2 + c_{110}r_1r_2 + c_{101}r_1r_3 + c_{020}r_2^2 + c_{011}r_2r_3 + c_{002}r_3^2. \quad (11.1)$$

Явные выражения коэффициентов нормальной формы (11.1) через частоты ω_1, ω_2 приведены в главах 7 и 8. При $l = 1$ $c_l = c_{200}$, $c_{li} = c_{110}$, $c_{lj} = c_{101}$, а при $l = 2$ $c_l = c_{020}$, $c_{li} = c_{110}$, $c_{lj} = c_{011}$. Кроме того, оказалось, что для периодических движений III типа ($l = 3$) коэффициенты нормальной формы (10.5) в точности равны коэффициентам нормальной формы (11.1), т. е. $c_l = c_{002}$, $c_{li} = c_{101}$, $c_{lj} = c_{011}$, $c_i = c_{200}$, $c_{ij} = c_{110}$, $c_j = c_{020}$. Таким образом, в нерезонансном случае надо было вычислять только коэффициенты c_i, c_{ij}, c_j (а для плоской задачи только коэффициент c_i) для $l = 1$ и $l = 2$.

Результаты исследования нелинейной устойчивости периодических движений I, II и III типов сведены в табл. 18.

Таблица 18

l	Значение $\mu=\mu_N$, при котором $\mathcal{N}^\circ(\Omega_i, -\Omega_l, 0) = 0$	Значение μ, при котором $D_3 = 0$	Значение μ, при котором $D_4 = 0$	Интервалы формальной устойчивости
1	0,02335...	0,03011...	0,02809...	$0 < \mu < 0{,}023354...$ $0{,}028108... < \mu < 0{,}038521...$
2	0,02374...	0,01548...	0,01894...	$0 < \mu < 0{,}018938...$ $0{,}023375... < \mu < 0{,}038521...$
3	—	0,02152...	—	$0{,}024294... < \mu < 0{,}038521...$

Из табл. 18, в частности, видно, что ни для одного типа периодических движений пространственной задачи определители D_3 и D_4 ни при каких значениях μ одновременно в нуль не обращаются и, следовательно, при всех нерезонансных значениях параметров μ, ε из области устойчивости линейной системы все периодические движения пространственной задачи будут устойчивы для большинства начальных условий.

Результаты исследования устойчивости периодических движений I, II и III типов показаны на рис. 24, 25 и 26 соответственно

(в плоскости параметров μ, ε). Кружками на оси $O\mu$ изображены такие значения параметра μ, для которых из теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле не следует существование периодических движений. На рис. 24 — это точки $\mu = 0$ и $\mu = \mu^*$, на рис. 25 — это, кроме того, значения μ, удовлетворяющие соотношению (2.7), а на рис. 26 — это точка $\mu = 0$. Области параметрического резонанса (области неустойчивости линейной системы) на рис. 24—26 заштрихованы наклонной штриховкой. Штриховыми линиями изображены резонансные кривые, на которых соответствующие периодические движения неустойчивы. «Устойчивые» резонансные кривые изображены сплошными линиями, а кривые, на которых имеет место формальная устойчивость, — штрих-пунктирными линиями. Области формальной устойчивости из табл. 18 на рис. 24, *б*, 25, *б* и 26 заштрихованы вертикальной штриховкой.

Выше были описаны результаты, полученные только на основе анализа членов до H_5^* включительно в разложении (4.2). Однако в рассматриваемой задаче можно получить более полные результаты. Укажем на некоторые из них.

Остановимся сначала на резонансных случаях. Для этого сравним вторые столбцы табл. 10 –14 и табл. 15 –17; рассмотрим подробнее те резонансы из табл. 10 — 14, которые не попали в табл. 15 — 17.

Из резонансов, являющихся порождающими (на оси $O\mu$) для областей неустойчивости линейной системы, это только резонансы $2\omega_1 = N\omega_2$, где $N \geqslant 5$ (в плоской и пространственной задачах), и $2 = N\omega_2$, где $N \geqslant 4$ (в пространственной задаче), для периодических движений II типа. Из соответствующих этим резонансам точек на оси $O\mu$ будут исходить очень узкие области неустойчивости (вообще говоря, области тем у́же, чем больше N), которые при приближении к оси $O\varepsilon$ сгущаются и перемежаются с областями устойчивости в линейном приближении. Согласно формулам (8.27), границы этих областей параметрического резонанса мало отличаются от квадратичных парабол, а подсчитанные для них величины δ из (8.28) при достаточно малых μ будут принимать только отрицательные значения; следовательно, все параболы «загнуты» к оси $O\varepsilon$ при достаточно малых μ и ε.

Далее, соотношения (9.5) и табл. 10 — 14 позволяют построить в плоскости параметров μ, ε все возможные резонансные кривые третьего и четвертого порядков, как бы соответствующие им числа N ни были велики. Для резонансов (9.4) с числами n_i, n_j разного знака сразу же можно сделать заключение о формальной устойчивости.

При решении вопроса об устойчивости для оставшихся резонансов третьего порядка дополнительных вычислений можно не производить, так как маловероятно, что соответствующие этим резонансам величины A из (10.1) обратились в нуль; следовательно,

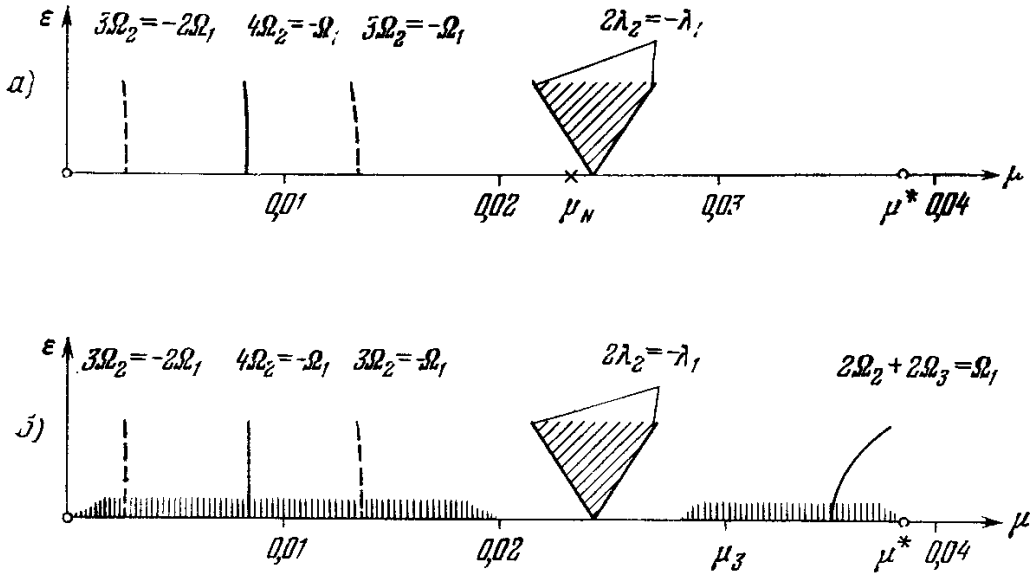

Рис. 24. Результаты исследования устойчивости периодических движений I типа: *а*) плоская задача, *б*) пространственная задача.

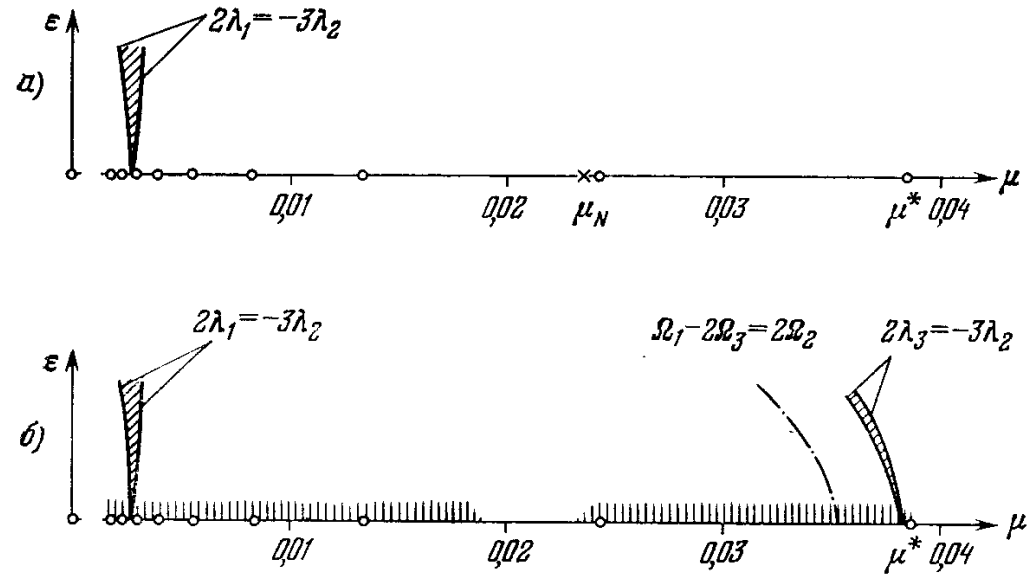

Рис. 25. Результаты исследования устойчивости периодических движений II типа: *а*) плоская задача, *б*) пространственная задача.

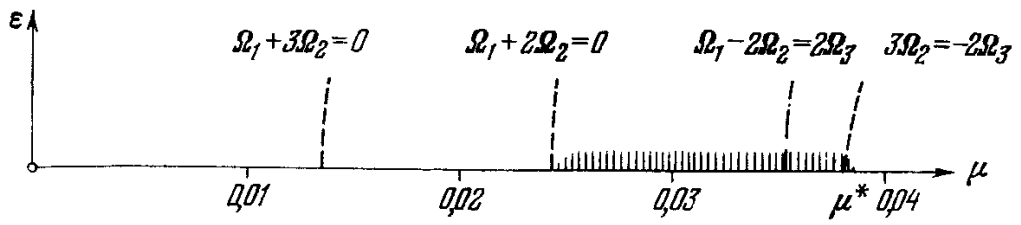

Рис. 26. Результаты исследования устойчивости периодических движений III типа.

при этих значениях параметров μ, ε (при достаточно малых ε), как правило, будет иметь место неустойчивость.

При малых значениях ε для исследования устойчивости на резонансных кривых четвертого порядка достаточно вычислить величину $\mathcal{N}$ $(-N, n_i, n_j)$ и убедиться в том, что эта величина не обращается в нуль (то, что она может обратиться в нуль,— маловероятно). Тогда можно утверждать, что при соответствующих значениях параметров в плоской задаче будет устойчивость, а в пространственной задаче — устойчивость в четвертом приближении.

В плоской задаче для тех нерезонансных значений μ, при которых не выполнено условие (10.8) (см. второй столбец табл. 18), можно продолжить исследование устойчивости и учесть в разложении (4.2) члены шестого порядка. Это даст возможность найти коэффициенты формы третьего порядка относительно r_l, r_i:

$$M(r_l, r_i) = c_{lll}r_l^3 + c_{lli}r_l^2 r_i + c_{lii}r_l r_i^2 + c_{iii}r_i^3. \qquad (11.2)$$

Подсчитав значение формы (11.2) на векторе с компонентами Ω_i, $-\Omega_l$ и убедившись в отличии получившейся величины от нуля, можно сделать вывод об устойчивости по Ляпунову для соответствующих значений параметров μ, ε (ср. § 4 главы 7).

В пространственной задаче учет членов шестого порядка из (4.2) может дать возможность получить утверждения о формальной устойчивости для значений μ, не попадающих в интервалы формальной устойчивости из табл. 18 (ср. § 3 главы 8).

Однако указанные исследования, учитывающие члены шестого (а возможно, и более высокого) порядка, можно не проводить, поскольку описанные выше результаты, полученные на основе исследования членов до H_5^* включительно, дают достаточно полное представление об устойчивости рассматриваемых периодических движений.

ГЛАВА 13

О ДВИЖЕНИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ВБЛИЗИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ—ЛУНА С УЧЕТОМ СОЛНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Влияние солнечных возмущений на движение космического аппарата, помещенного в точку либрации

В предыдущей главе была рассмотрена задача о периодических движениях, близких треугольным точкам либрации ограниченной задачи трех тел. Однако для многих реально существующих систем задача трех тел является лишь некоторым приближением. В конкретных астрономических задачах часто необходимо учитывать еще возмущающие воздействия, обусловленные теми или иными факторами, не учитываемыми в ограниченной задаче трех тел.

Так, например, при описании движения космического аппарата (КА) вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна следует в качестве возмущений учитывать гравитационное воздействие Солнца. При исследовании движения вблизи треугольных точек либрации с учетом солнечных возмущений важно получить ответ на следующие три вопроса: 1) будет ли КА, помещенный в точку L_4 или L_5, оставаться вблизи этих точек длительное время, 2) какова природа движения КА за время порядка нескольких лет, 3) существуют ли в окрестности точек либрации устойчивые орбиты? Ответы на эти вопросы важны как в задачах небесной механики и астрономии, так и в задачах использования точек либрации в космических исследованиях.

Исследование влияния гравитационного возмущения Солнца на движение КА вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна проводилось численно и аналитически. Основные результаты в этой задаче получены в работах американских ученых. Подробную библиографию этих работ можно найти в монографии Себехея [175], статье Стега и де Ври [173] и работе де Ври [178].

В этом параграфе излагаются результаты исследований Тэпли, Льюэллена и Шульца [176, 177], касающиеся анализа влияния солнечных возмущений на движение КА, помещенного в точку либрации L_4 или вблизи нее. Исследования [176, 177] основаны на численном интегрировании точных уравнений движения. Применение численного анализа необходимо из-за того, что попытки изучить движение КА посредством формальных методов теории

возмущений, примененных к сложной системе дифференциальных уравнений движения вблизи L_4, оказались безуспешными. Дело в том, что один из периодов линейных колебаний невозмущенного Солнцем КА вблизи L_4 (и L_5) почти равен синодическому месяцу (равному 29,53 *сут*), а солнечные возмущения также содержат одну из гармоник с периодом, близким синодическому месяцу [178]. Отмеченная соизмеримость приводит к появлению малых знаменателей во многих членах предполагаемого решения, представленного в виде ряда. Это не позволяет ограничиться в искомых рядах разумным конечным числом членов.

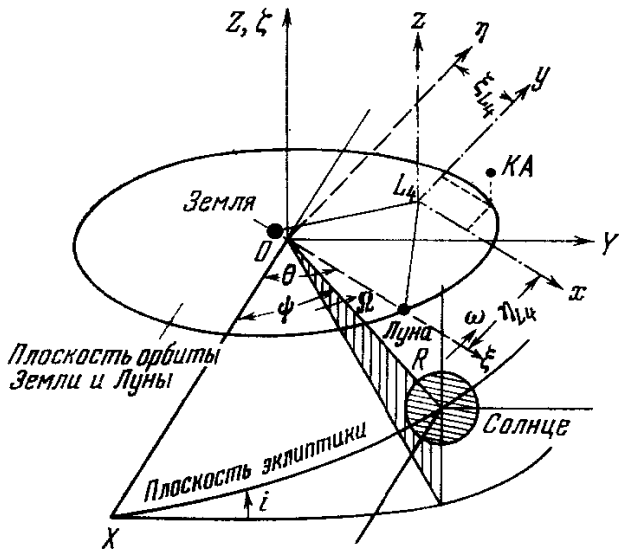

Рис. 27. Системы координат для описания движения космического аппарата вблизи L_4.

Системы координат, использованные в работах [176, 177] при численном исследовании движения вблизи L_4, изображены на рис. 27. Предполагается, что Земля и Луна движутся по круговым орбитам относительно их центра масс O, который относительно Солнца движется также по круговой орбите. Плоскость орбит Земли и Луны наклонена к плоскости эклиптики под постоянным углом 5°9′. Каждое из тел считается материальной точкой.

Система координат $OXYZ$ связана с центром масс Земли и Луны. Ось OX направлена в точку весеннего равноденствия, ось OY лежит в плоскости движения Земли и Луны, а ось OZ направлена по вектору их угловой скорости. Вращающаяся система координат $O\xi\eta\zeta$ также связана с центром масс Земли и Луны, ее ось $O\xi$ направлена вдоль линии, соединяющей Землю и Луну, ось $O\eta$ лежит в плоскости орбиты Земли и Луны, а ось $O\zeta$ совпадает с осью OZ. Плоскость $O\xi\eta$ вращается вокруг оси $O\zeta$ с той же угловой скоростью ω, как и линия Земля — Луна.

Система координат L_4xyz имеет своим началом точку либрации L_4 и получается из системы координат $O\xi\eta\zeta$ параллельным переносом. Имеют место формулы

$$\xi = x + \xi_{L_4}, \quad \eta = y + \eta_{L_4}, \qquad \zeta = z, \tag{1.1}$$

где ξ_{L_4}, η_{L_4} —константы, являющиеся координатами точки либрации L_4. В статье Тэпли и Льюэллена [176] получены следующие

уравнения движения КА в системе координат L_4xyz:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + (x + \xi_{L_4})\omega^2 + (x_3 + \xi_{L_4})\Omega^2 + \sum_{i=1}^{3} \frac{fm_i}{\rho_i^3}(x_i - x),$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + (y + \eta_{L_4})\omega^2 - (y_3 + \eta_{L_4})\Omega^2 + \sum_{i=1}^{3} \frac{fm_i}{\rho_i^3}(y_i - y), \quad (1.2)$$

$$\ddot{z} = -z_3\Omega^2 + \sum_{i=1}^{3} \frac{fm_i}{\rho_i^3}(z_i - z),$$

где $\rho_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$; $i = 1, 2, 3$; Ω — угловая скорость движения центра масс Земли и Луны вокруг Солнца, f — универсальная гравитационная постоянная, индексы 1, 2 и 3 относятся к Земле, Луне и Солнцу соответственно. Точкой в уравнениях (1.2) обозначено дифференцирование по времени.

Во вращающейся системе координат L_4xyz положения Земли и Луны фиксированы и координаты Солнца вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_3 &= R(\cos\psi\cos\theta + \cos i\sin\psi\sin\theta) - \xi_{L_4}, \\ y_3 &= -R(\cos\psi\sin\theta - \cos i\sin\psi\cos\theta) - \eta_{L_4}, \\ z_3 &= R\sin\psi\sin i. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь R — расстояние между Солнцем и центром масс Земли и Луны, а i — наклонение плоскости орбит Земли и Луны к плоскости эклиптики.

Угловые положения Солнца и линии Земля — Луна по отношению к точке весеннего равноденствия задаются соответственно величинами ψ и θ. Угол θ отсчитывается в плоскости орбит Земли и Луны, а угол ψ — в плоскости эклиптики. Соотношения, определяющие ψ и θ, имеют вид

$$\psi = \Omega t + \psi_0, \quad \theta = \omega t + \theta_0, \quad (1.4)$$

где ψ_0 и θ_0 — начальные значения углов ψ и θ.

При проведении численных расчетов были использованы следующие значения для постоянных задачи:

$$m_1 = 5{,}97465\cdot10^{24}\ кг, \quad m_2 = 7{,}32814\cdot10^{22}\ кг,$$
$$m_3 = 1{,}98649\cdot10^{30}\ кг, \quad f = 6{,}68029\cdot10^{-20}\ км^3/кг\cdot сек^2,$$
$$\Omega = 1{,}99082\cdot10^{-7}\ рад/сек,$$

$R = 1{,}49530\cdot10^6\ км$, $i = 5°9'$ и расстояние между Землей и Луной принималось равным $3{,}85147\cdot10^5\ км$. При этих значениях постоянных расчетная угловая скорость ω системы координат L_4xyz равна $2{,}665075637\cdot10^{-6}\ рад/сек$.

Результаты численного интегрирования уравнений движения (1.2) представлены на рис. 28 — 39. Точки на этих рисунках разделяют интервалы в один синодический месяц. На рис. 28 и 29 показана проекция на плоскость L_4xy траектории КА за период времени в 2500 *сут*. В начальный момент времени КА помещен в точку либрации с нулевой относительной скоростью, а Солнце лежит на линии Земля — Луна, т. е. на рис. 27 $\psi_0 = 0$ и $\theta_0 = 0$. Рис. 28, *а* — *г* показывают, что с течением времени КА все дальше и дальше уходит от точки либрации. Но эта тенденция меняется на обратную примерно через 850 *сут* от момента начала движения. Из рис. 29, *а* — *г* видно, что постепенное приближение КА к точке либрации происходит вплоть до момента времени, равного приблизительно 1460 *сут*. С этого момента в движении КА наблюдается тенденция к удалению от точки либрации. Интересно отметить, что минимальное расстояние КА от L_4 равно при этом приблизительно 24 000 *км*, а достигнутое ранее (в момент времени, приблизительно равный 850 *сут*) наибольшее удаление КА от L_4 равно примерно 190 000 *км*. Рис. 29, *д* — *з* показывают, что удаление КА от L_4 происходит до момента времени, приблизительно равного 2260 *сут*. С этого момента вновь начинается постепенное приближение КА к L_4. Из приведенных численных результатов следует, что на интервале времени в 2500 *сут* тенденция КА к сближению с L_4 и удалению от L_4 меняется с периодом, равным приблизительно 1400 *сут* или 4 годам. Максимальное удаление КА от L_4 равно 190 000 *км*, причем из рис. 28, *г* и 29, *а* видно, что при достижении этого расстояния КА движется по почти замкнутой орбите с периодом, близким одному синодическому месяцу.

На рис. 30 и 31 представлены зависимости величин смещения r и скорости v КА от времени. В обеих зависимостях, в отличие от рис. 28 и 29, учитываются z-компоненты вектора смещения и вектора скорости, так что $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. Видно, что ординаты огибающих кривых $r(t)$ и $v(t)$ сначала возрастают, а затем (примерно после 850 *сут*) убывают. Таким образом, включение z-компоненты в величины $r(t)$ и $v(t)$ не изменяет отмеченного выше характера движения: КА приближается к точке либрации и удаляется от нее с периодом, приблизительно равным 4 годам.

Интересной задачей является задача выбора такого начального положения КА и его скорости, а также начального положения Солнца, чтобы траектория движения была в некотором смысле «наилучшей», т. е. важно так определить начальные условия, чтобы на заданном интервале времени отклонение КА от точки либрации было наименьшим. Никакой общей теории по этому вопросу нет. В работах [176, 177] приведены результаты отдельных

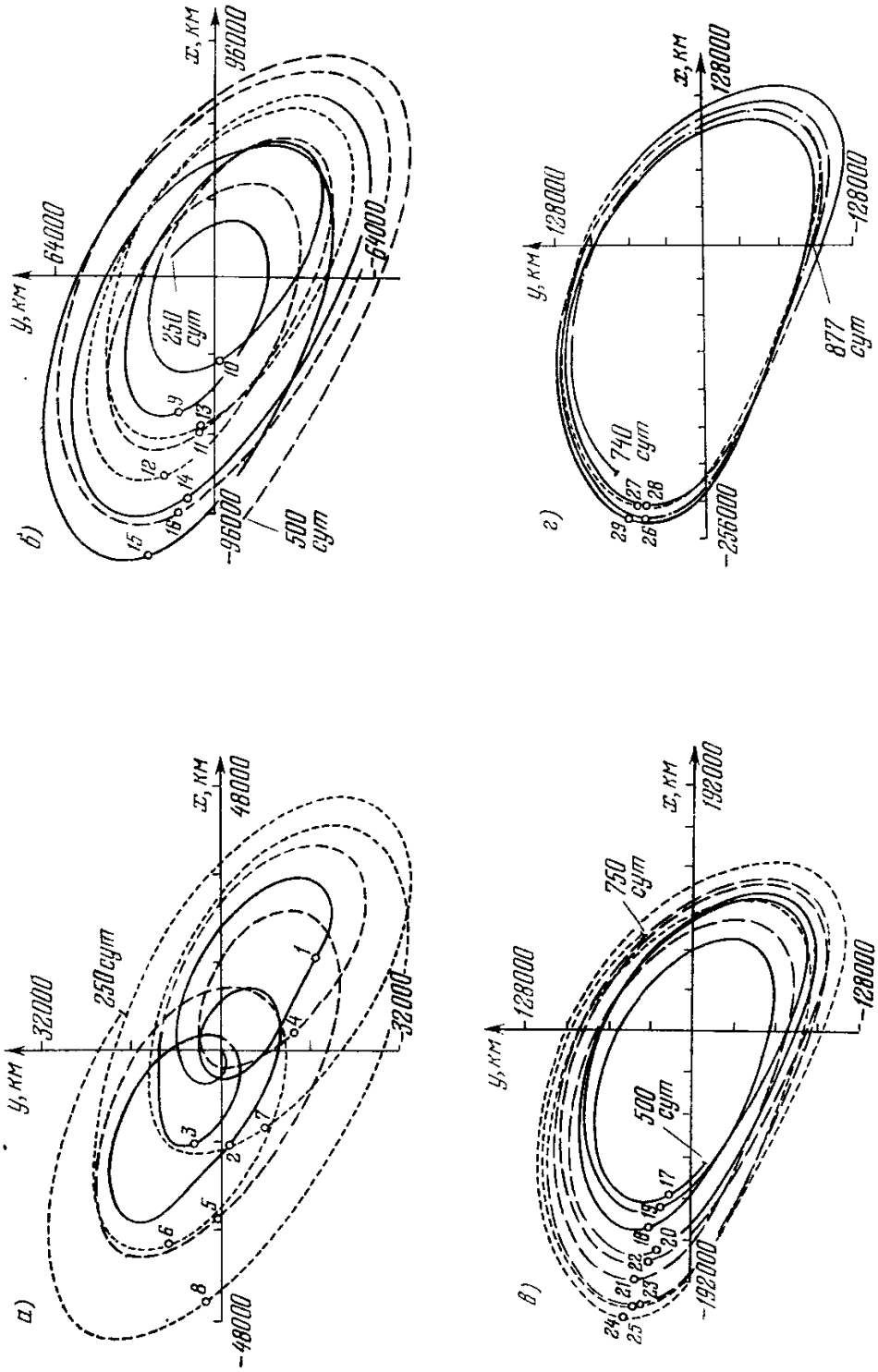

Рис. 28. Траектория КА, помещенного в точку L_1 с нулевой относительной скоростью, в случае $\theta_0 = 0°$ и $\psi_0 = 0°$:
а) $0 \leqslant t \leqslant 250$, *б*) $250 \leqslant t \leqslant 500$, *в*) $500 \leqslant t \leqslant 750$, *г*) $740 \leqslant t \leqslant 877$ (*t* в *сут*).

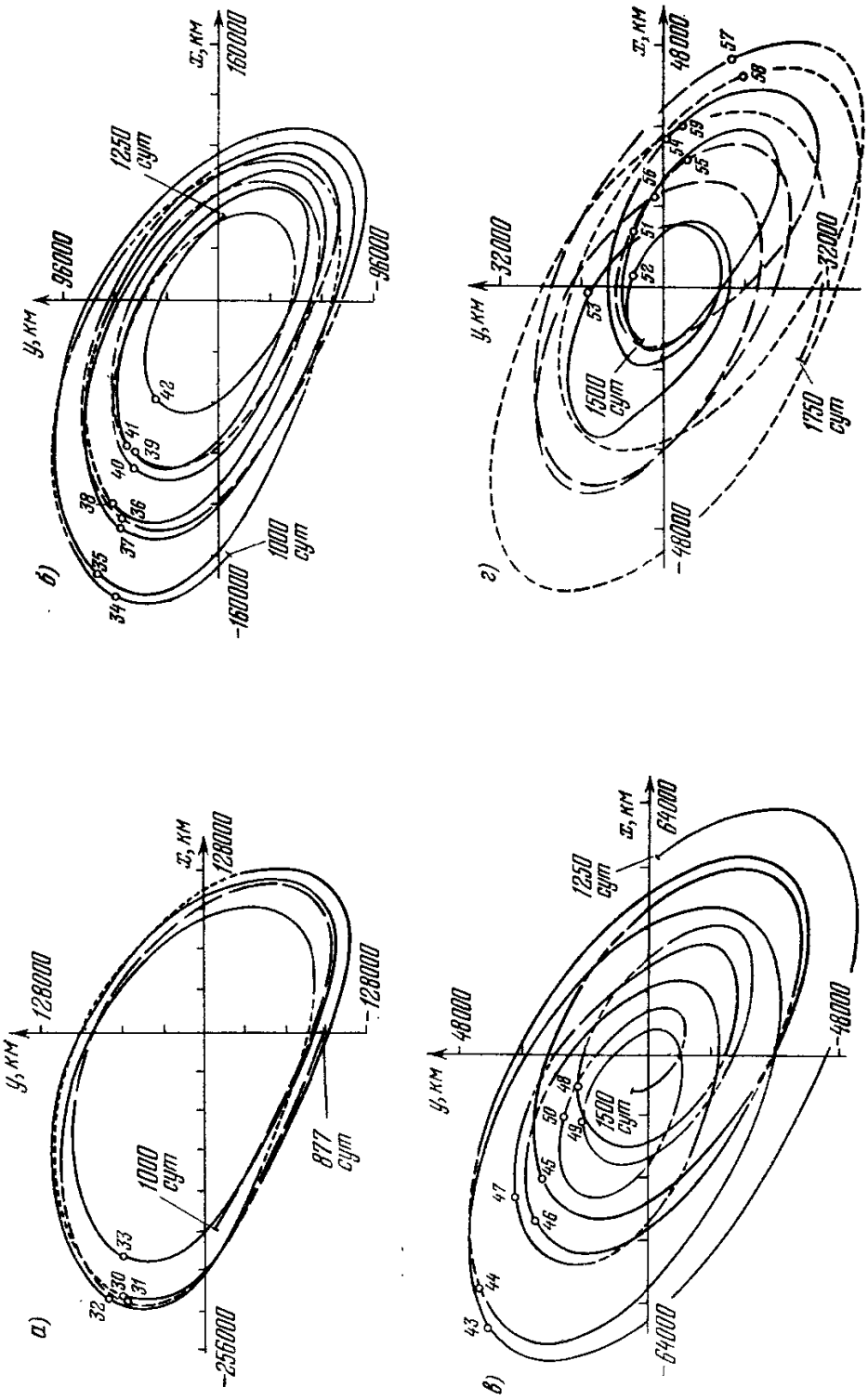

Рис. 29. Траектория КА, помещенного в точку L_4 с нулевой относительной скоростью, в случае $\theta_0 = 0°$, $\psi_0 = 0°$: *а*) $877 \leqslant t \leqslant 1000$, *б*) $1000 \leqslant t \leqslant 1250$, *в*) $1250 \leqslant t \leqslant 1500$, *г*) $1500 \leqslant t \leqslant 1750$.

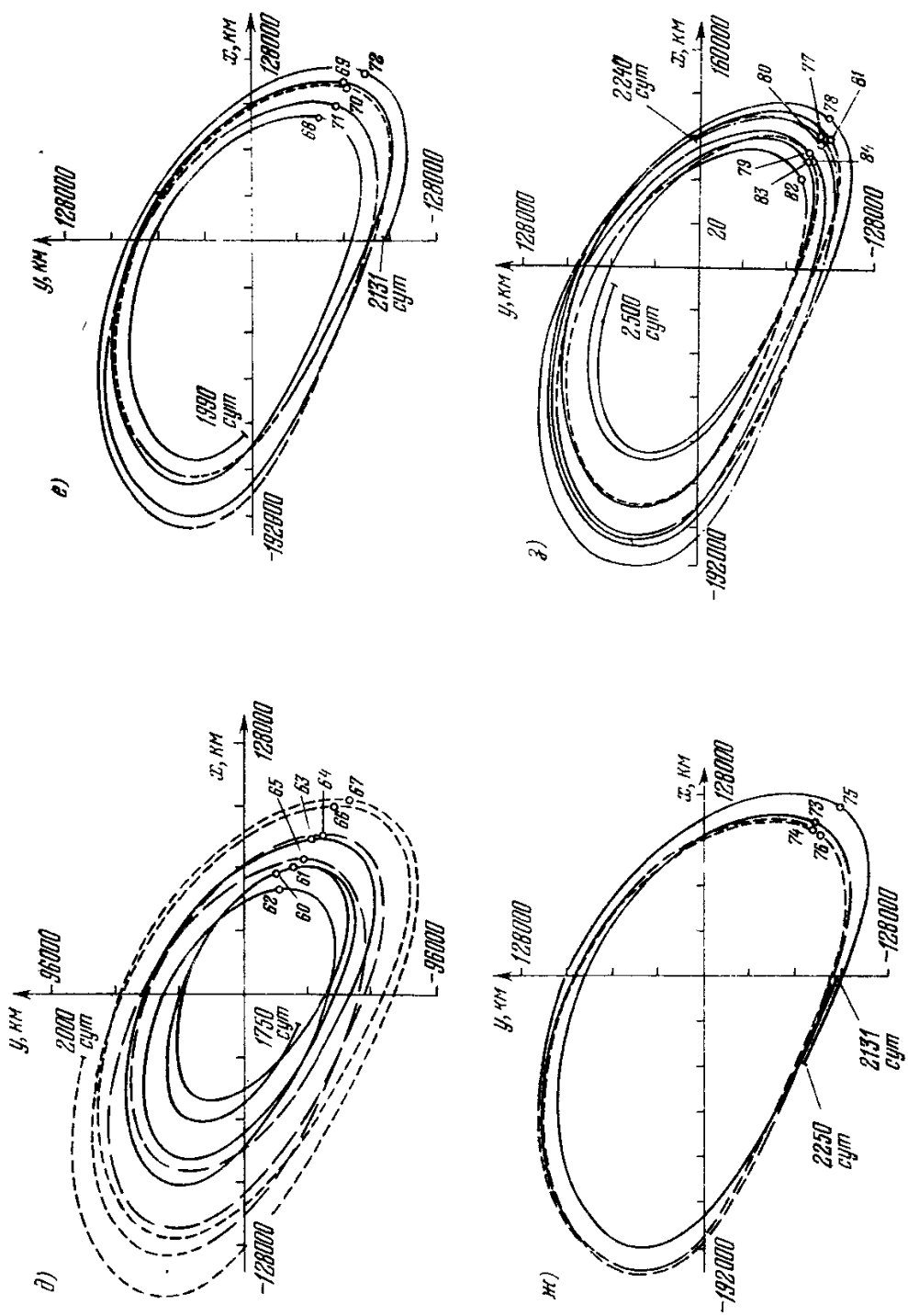

Рис. 29. Траектория КА, помещенного в точку L_4 с нулевой относительной скоростью, в случае $\theta_0 = 0°$, $\psi_0 = 0°$: *д*) $1750 \leqslant t \leqslant 2000$, *е*) $1990 \leqslant t \leqslant 2131$, *ж*) $2131 \leqslant t \leqslant 2250$, *з*) $2240 \leqslant t \leqslant 2500$ (t в *сут*).

численных экспериментов. Сначала, следуя [177], рассмотрим влияние начального положения Солнца.

На рис. 32 и 33 изображена проекция на плоскость L_4xy траектории КА, помещенного в точку либрации L_4 с нулевой относительной скоростью, но в начальный момент угол ψ_0 между вектором Солнца $\bar{R}$ и линией Земля — Луна равен 45°. Интересно

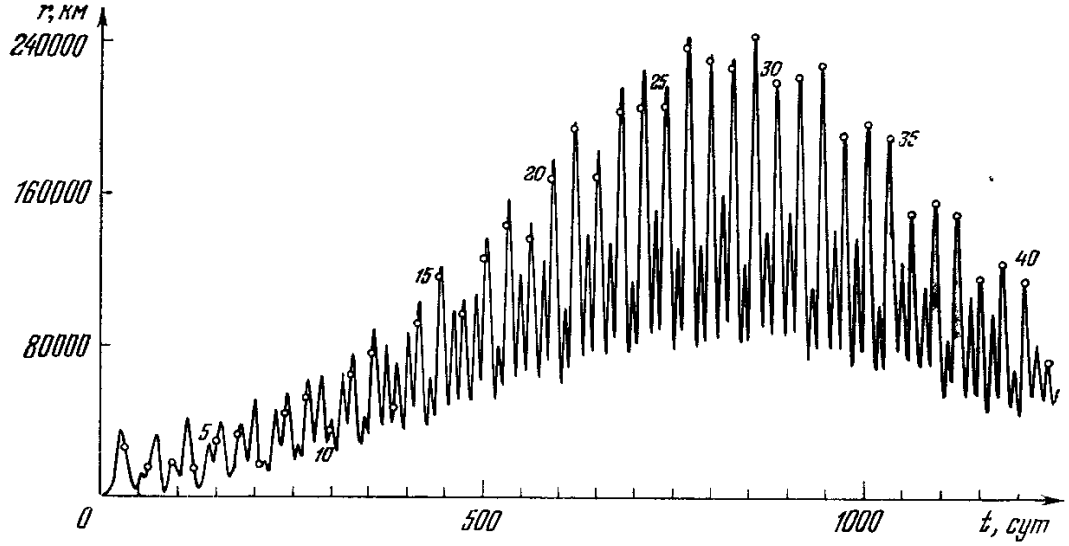

Рис. 30. Расстояние КА от L_4 в зависимости от времени движения ($\theta_0 = 0°$, $\psi_0 = 0°$).

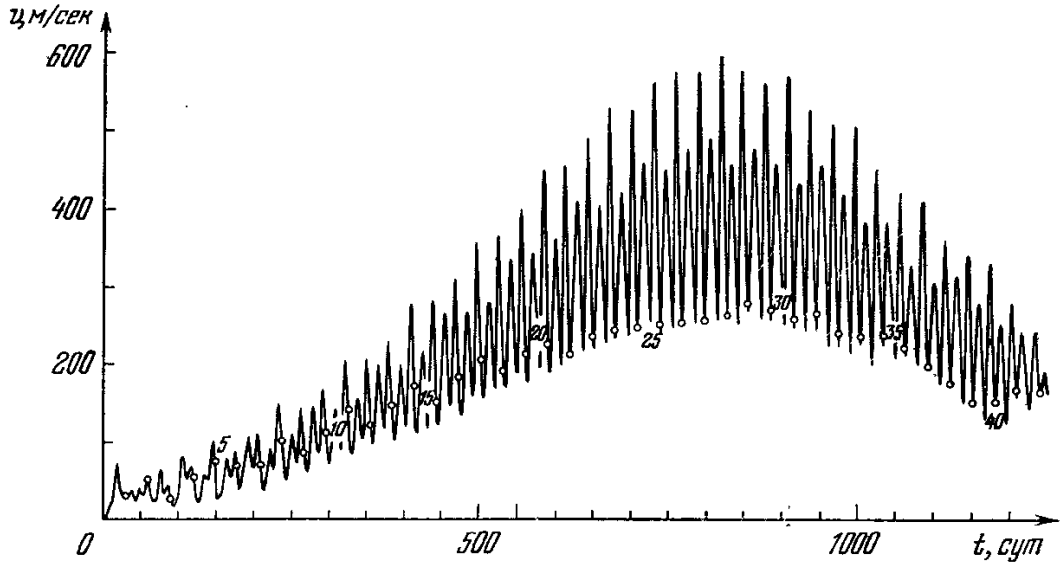

Рис. 31. Зависимость относительной скорости КА от времени движения ($\theta_0 = 0°$, $\psi_0 = 0°$).

отметить, что КА довольно долго находится ближе к точке либрации, чем в случае $\psi_0 = 0$. На рис. 32, *а* — *в* представлено движение на интервале времени в 750 *сут*. Наибольшее удаление КА от

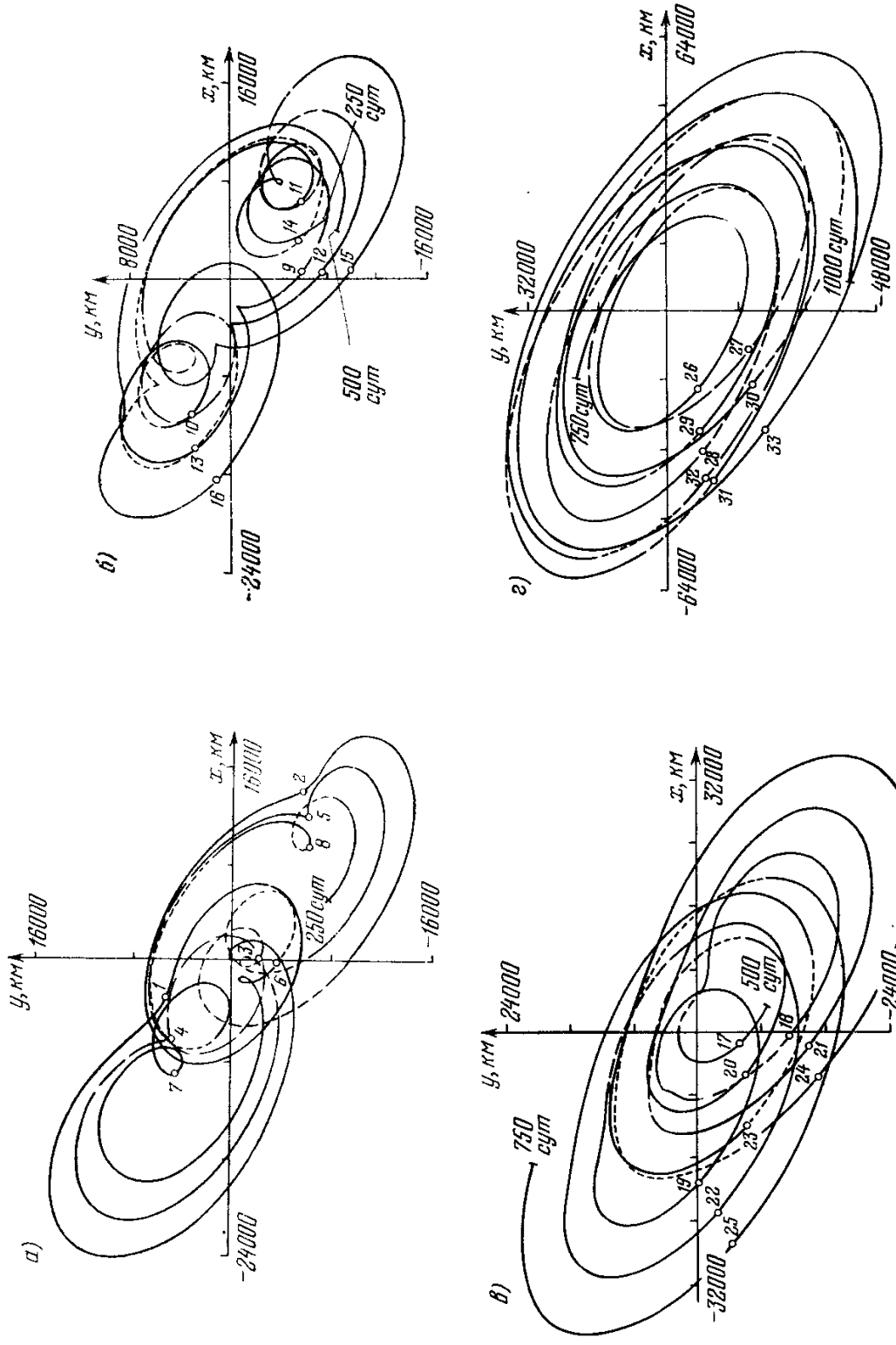

Рис. 32. Траектория КА, помещенного в точку L_4 с нулевой относительной скоростью, в случае $\theta_0 = 0°$, $\psi_0 = 45°$:
а) $0 \leqslant t \leqslant 250$, *б*) $250 \leqslant t \leqslant 500$, *в*) $500 \leqslant t \leqslant 750$, *г*) $750 \leqslant t \leqslant 1000$ (t в *сут*).

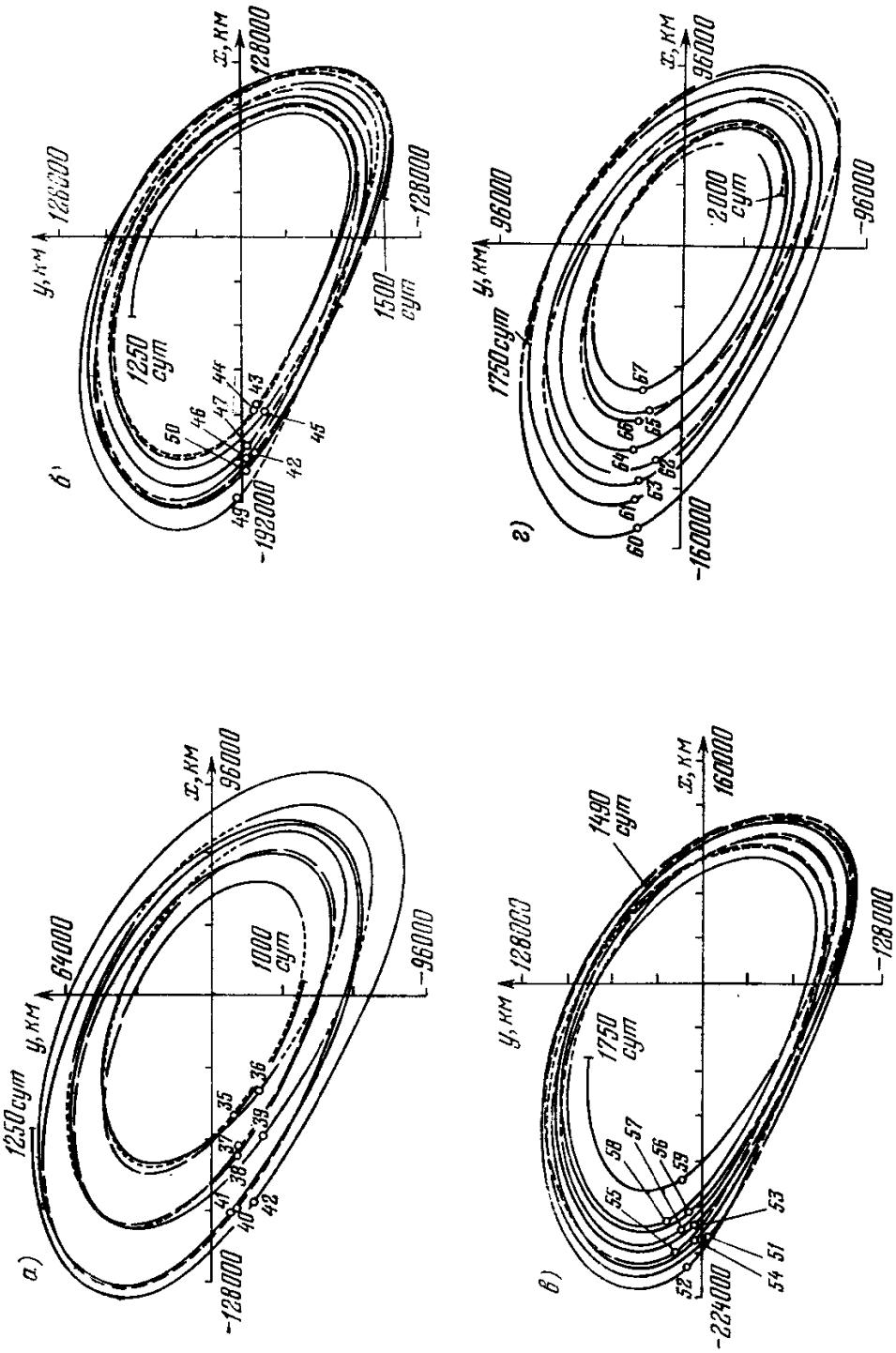

Рис. 33. Траектория КА, помещенного в точку L_4 с нулевой относительной скоростью, в случае $\theta_0 = 0°$, $\psi_0 = 45°$:
а) $1000 \leqslant t \leqslant 1250$, *б*) $1250 \leqslant t \leqslant 1500$, *в*) $1490 \leqslant t \leqslant 1750$, *г*) $1750 \leqslant t \leqslant 2000$.

точки либрации за это время равняется приблизительно 40 000 *км*, в то время как при $\psi_0 = 0$ за это же время оно было равно примерно 190 000 *км*. Отсюда ясно, что начальное положение Солнца имеет заметное влияние, во всяком случае, на начальную фазу

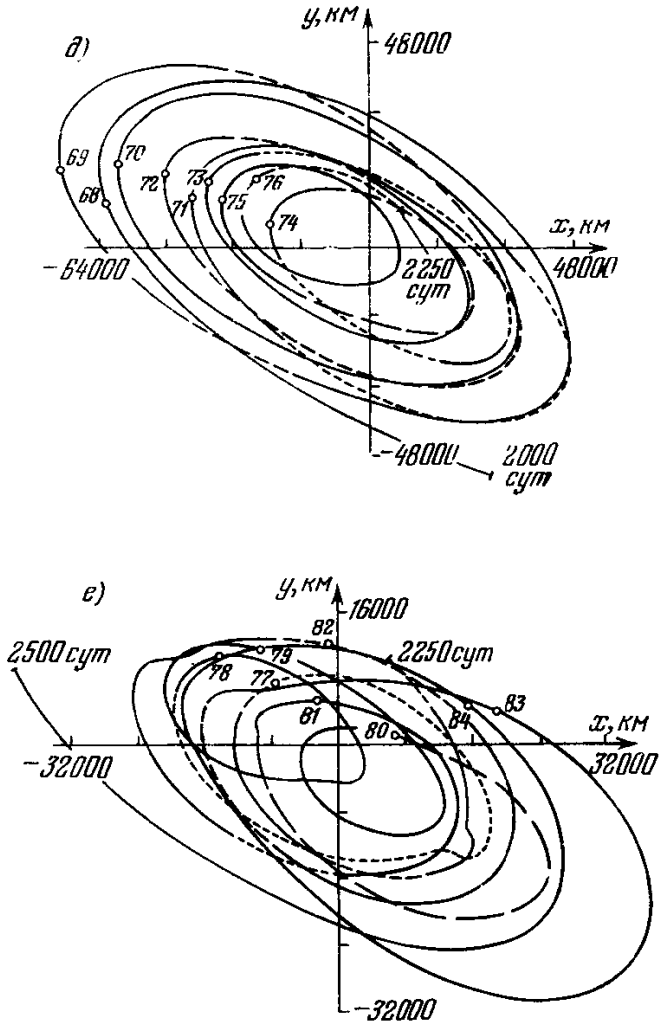

Рис. 33. Траектория КА, помещенного в точку L_4 с нулевой относительной скоростью, в случае $\theta_0 = 0°$, $\psi_0 = 45°$: *д*) $2000 \leqslant t \leqslant 2250$, *е*) $2250 \leqslant t \leqslant 2500$ (t в *сут*).

движения КА. После 750 *сут* КА продолжает постепенно удаляться от точки либрации и его максимальное удаление составляет примерно 175 000 *км*. Это происходит в момент времени, равный приблизительно 1540 *сут*. Затем КА постепенно приближается к точке либрации. В момент времени, равный 2330 *сут*, расстояние от КА до L_4 минимально и равно примерно 20 000 *км*. Затем КА снова удаляется от точки либрации. Интересно заметить, что и максимальное, и минимальное расстояния КА от L_4 при $\psi_0 = 45°$ меньше аналогичных величин при $\psi_0 = 0°$. Интересно также, что при $\psi_0 = 45°$ период времени между максимальным и

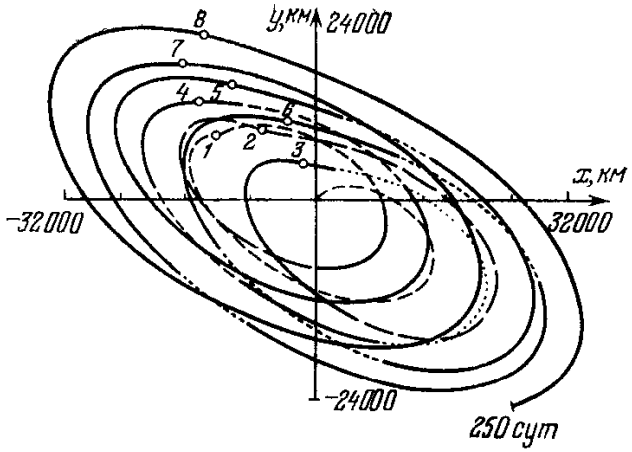

Рис. 34. Траектория КА, помещенного в точку L_4 с нулевой относительной скоростью, в случае $\theta_0 = 0°$, $\psi_0 = 90°$ на интервале времени в 250 *сут*.

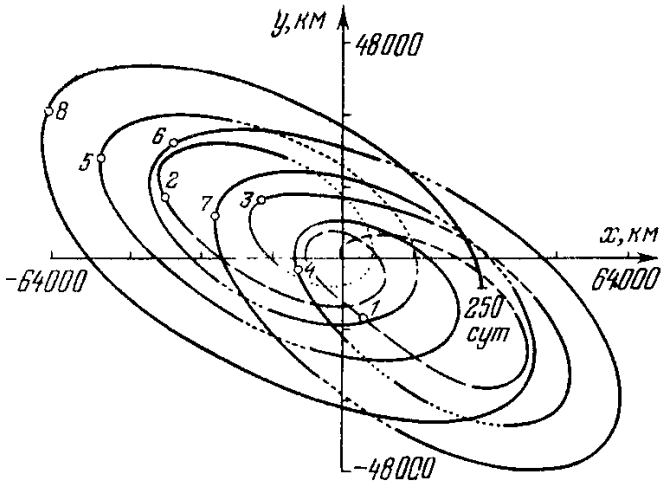

Рис. 35. Траектория КА, помещенного в точку L_4 с нулевой относительной скоростью, в случае $\theta_0 = 0°$, $\psi_0 = 135°$ на интервале времени в 250 *сут*.

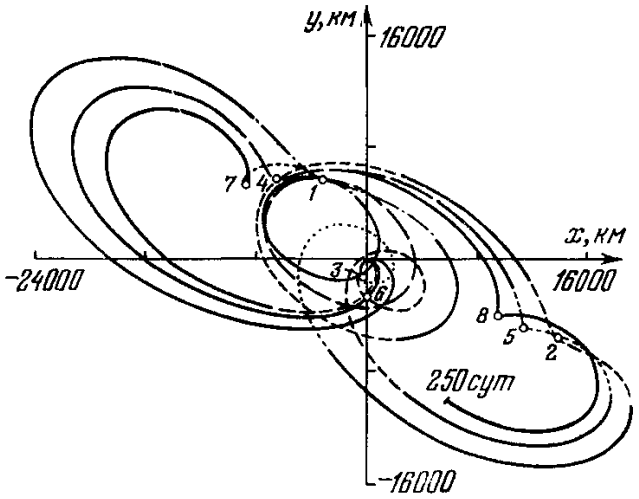

Рис. 36. Траектория КА, помещенного в точку L_4, в случае $0_0=0°$, $\psi_0=225°$ на интервале времени в 250 *сут*.

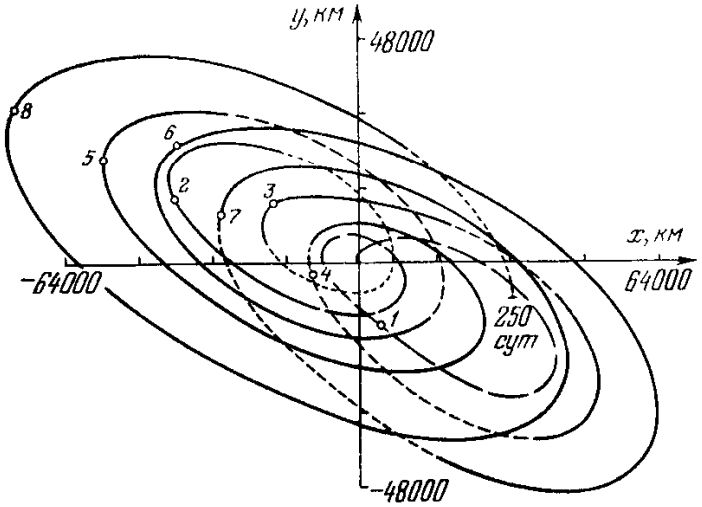

Рис. 37. Траектория КА, помещенного в точку L_4, в случае $\theta_0 = 0°$, $\psi_0=315°$ на интервале времени в 250 *сут*.

минимальным удалениями КА от L_4 равен около 790 *сут* и близок к периоду, который был в случае $\psi_0 = 0$.

На рис. 34 — 37 проекция на плоскость L_4xy траектории движения КА, помещенного в начальный момент времени в точку либрации L_4 с нулевой относительной скоростью, показана для случаев $\psi_0 = 90°$, $\psi_0 = 135°$, $\psi_0 = 225°$ и $\psi_0 = 315°$. В каждом случае $\theta_0 = 0$. Траектории показаны для интервала времени в 250 *сут*. Аналогичные траектории для $\psi_0 = 0°$ и $\psi_0 = 45°$ представлены на рис. 28, *а* и 32, *а* соответственно. Из сравнения траекторий для различных ψ_0 можно сделать заключение, что на интервале в 250 *сут* величина отклонения КА от точки либрации при $\psi_0 = 45°$ и $\psi_0 = 225°$ меньше, чем при других значениях ψ_0. Эти значения ψ_0 отличаются на 180°, и траектории движения КА похожи друг на друга. Также очень похожи траектории движения при $\psi_0 = 135°$ и $\psi_0 = 315°$.

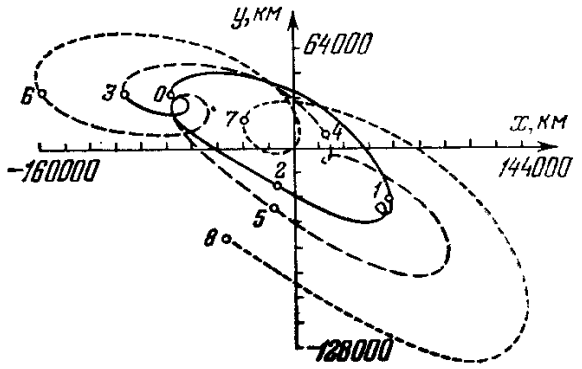

Рис. 38. Траектория КА, смещенного в начальный момент относительно L_4.

Теперь приведем результаты работы [176], касающиеся численного исследования влияния на движение КА его начального положения и начальной относительной скорости. На рис. 38 для интервала времени в 250 *сут* показана проекция траектории движения КА на плоскость L_4xy, начинающаяся из точки, не совпадающей с L_4. Для показанной на рис. 38 траектории в начальный момент $x = -77\,614$ *км*, $y = 34\,126$ *км*, $z = 0$, а относительная скорость равна нулю. Принято также $\psi_0 = \theta_0 = 0$. Сравнение рис. 28, *а* и рис. 38 показывает, что начальное смещение КА приводит к «более неустойчивому» движению.

Рис. 39 демонстрирует существенную зависимость отклонения КА от точки либрации в зависимости от направления его начальной относительной скорости. Принято, что $\psi_0 = \theta_0 = 0$; в начальный момент КА помещен в точку либрации и имеет начальную скорость 3,048 *км/сек*. Но вектор скорости v для траекторий, изображенных на рис. 39, имеет в начальный момент различное направление. На рис. 39, *а*, *б*, *в*, *г* он составляет с осью L_4x углы 60, 150°, 240° и 330° соответственно. Сравнение траекторий, представленных на рис. 39, показывает, что к «наиболее устойчивому» движению приводят такие начальные условия, когда вектор относительной скорости КА составляет с осью L_4x угол 330°.

Из приведенных результатов численных экспериментов нельзя сделать каких-либо строгих общих выводов о характере движения КА вблизи треугольных точек либрации с учетом солнечных

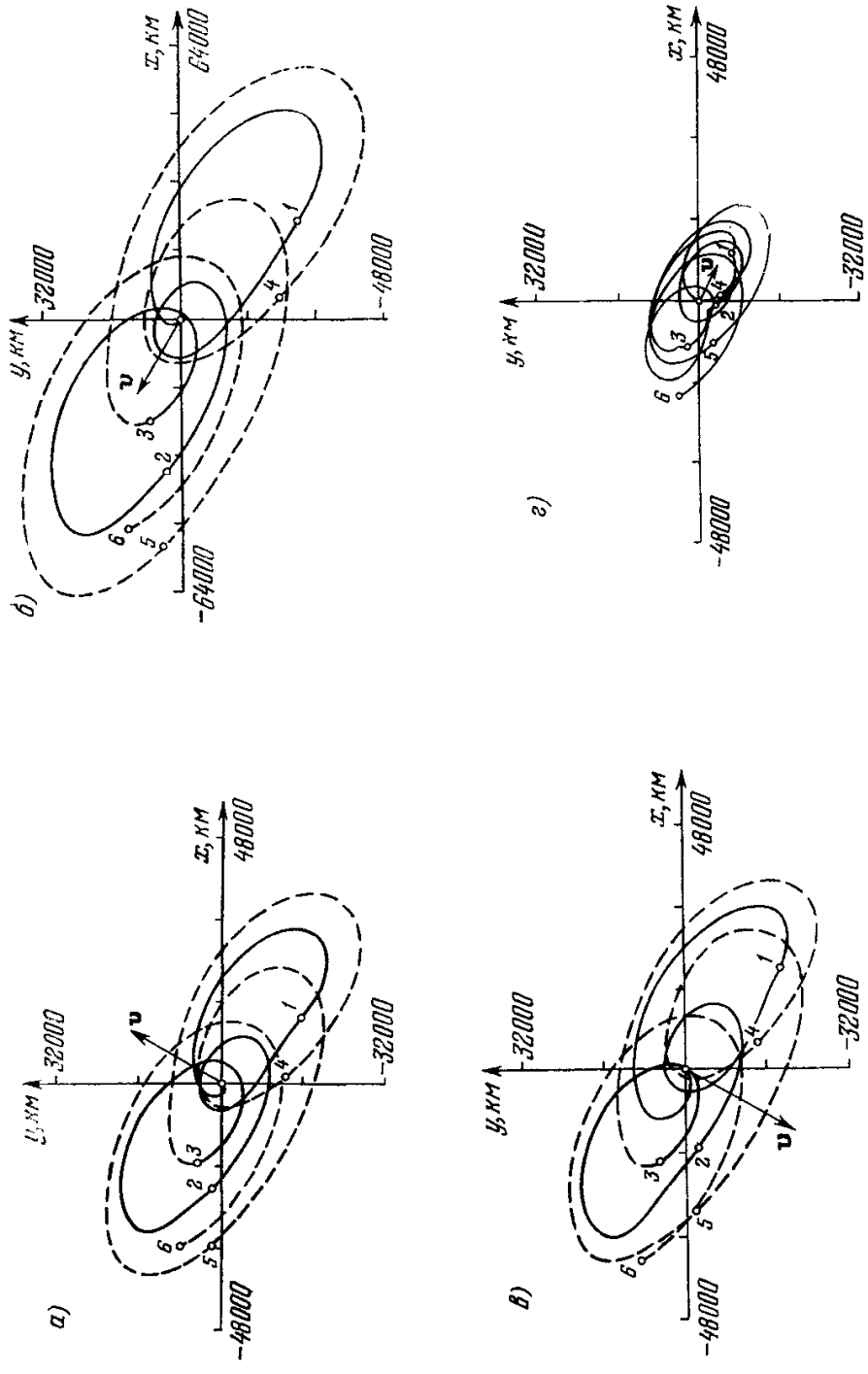

Рис. 39. Траектория КА, помещенного в начальный момент в точку L_4 с относительной скоростью, равной 3,048 *км/сек* и составляющей угол α с осью L_4x: *а*) $\alpha = 60°$, *б*) $\alpha = 150°$, *в*) $\alpha = 240°$ *г*) $\alpha = 330°$.

возмущений. Однако очевидно, что влияние Солнца заставляет КА значительно отклоняться от точки либрации. В течение 2500 *сут* КА, помещенный в начальный момент в точку либрации с нулевой относительной скоростью, может двигаться таким образом, что огибающая расстояния r (t) от КА до L_4 имеет максимум 190 000 *км* и минимум 24 000 *км* (для $\psi_0 = \theta_0 = 0$). Характер полученных результатов наводит на предположение, что огибающая ведет себя аналогичным образом и для значительно большего интервала времени, чем 2500 *сут*. Из полученных результатов ясно также, что начальное положение Солнца, начальное положение КА и направление его относительной начальной скорости оказывают решающее влияние на его последующее движение.

В заключение параграфа отметим, что некоторым исследованиям влияния Солнца на движение КА вблизи L_4 посвящен цикл работ Л. Г. Лукьянова [43 — 47].

§ 2. О периодических орбитах вблизи L_4. Гамильтониан движения КА в окрестности L_4

Результаты предыдущего параграфа приводят к выводу о том, что при учете солнечных возмущений космический аппарат с течением времени удаляется от треугольных точек либрации на значительные расстояния. Однако это вовсе не означает, что в окрестности точек либрации не могут существовать устойчивые орбиты. Открытие Кордылевским [100, 101] облакоподобных образований вблизи точек L_4 и L_5 в системе Земля — Луна вызвало большой интерес и привлекло внимание многих исследователей к задаче об устойчивых орбитах, близких к треугольным точкам либрации.

Аналитическое исследование периодических орбит вблизи треугольных точек либрации в системе Земля — Луна с учетом солнечных возмущений было начато Брэквилом и Принглем [106] при помощи методов теории возмущений гамильтоновых систем. Это аналитическое исследование было продолжено Шехтером [170], который впервые с достаточной строгостью показал возможность существования устойчивых периодических орбит вблизи точки либрации L_4 системы Земля — Луна при наличии солнечных возмущений.

Устойчивая периодическая орбита, обнаруженная Шехтером, представляет собой эллипс с центром в L_4 с отношением полуосей 1 : 2 и большой полуосью, равной приблизительно 96 500 *км*. Движение КА по эллипсу имеет период, равный одному синодическому месяцу, и происходит в направлении, противоположном вращению Луны вокруг Земли. Движение КА по эллипсу синхронизировано с движением Солнца: их угловые положения почти совпадают, когда КА пересекает одну из осей эллипса. Таким образом, относительно наблюдателя, расположенного в L_4 и смот-

рящего в направлении Солнца, КА движется поперек его линии визирования подобно гармоническому осциллятору. Время пересечения линии визирования космическим аппаратом почти совпадает со временем, в которое линия визирования совмещается с большой или малой осью эллипса.

Из анализа, проведенного Шехтером, также следует, что на движение КА вне плоскости орбит Земли и Луны Солнце оказывает незначительное воздействие, а влияние пространственности движения КА на проекцию его траектории на плоскость орбит Земли и Луны пренебрежимо мало.

Вслед за работой Шехтера появилось исследование Коленкевича и Карпентера [146], в котором задача о периодических движениях, близких L_4, анализировалась при помощи численных расчетов. Работа [146] подтверждает вывод Шехтера о существовании устойчивой периодической орбиты вблизи L_4. Но размеры этой орбиты получены в работе Коленкевича и Карпентера несколько большими, нежели у Шехтера: ее большая полуось равна примерно 145 000 *км*, а малая — 71 000 *км*. Это различие может быть объяснено приближенностью аналитического исследования Шехтера. Кроме того, Коленкевичем и Карпентером найдена вторая устойчивая периодическая орбита, размеры которой очень близки к размерам первой орбиты, но движение по ней смещено по фазе на 180° относительно движения по первой орбите.

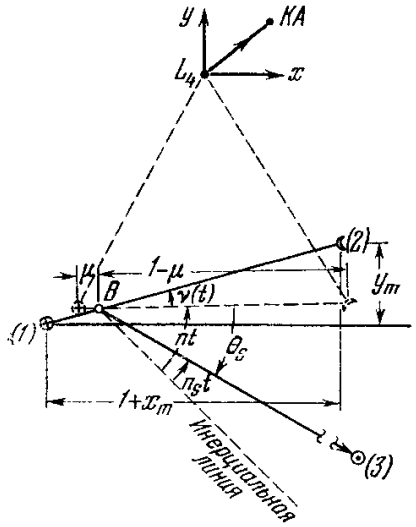

Рис. 40. Плоская модель для описания движения КА вблизи L_4 с учетом солнечных возмущений.

В упомянутых работах Шехтера, Коленкевича и Карпентера указывается также на существование вблизи L_4 малой по размерам неустойчивой периодической орбиты.

Очень тщательное аналитическое исследование задачи о периодических орбитах вблизи L_4 в системе Земля — Луна с учетом солнечных возмущений выполнено Кэмилом в работе [144]. Качественные результаты Кэмила аналогичны результатам работ [146, 170]. Размеры полученных им орбит очень близки к размерам орбит, вычисленных Коленкевичем и Карпентером. Ниже излагаются основные результаты обширного исследования Кэмила.

Выпишем полученное в [144] выражение для функции Гамильтона, с помощью которой описывается движение КА вблизи треугольной точки либрации L_4 системы Земля — Луна с учетом солнечных возмущений. На рис. 40 приведена схема изучаемой задачи четырех тел Земля —

Луна — Солнце — КА. Рассматривается только плоская задача, т. е. предполагается, что Земля, Луна, Солнце и КА во все время движения находятся в одной плоскости. Это предположение оправдано тем, что из анализа, проведенного Шехтером, следует, что пространственность движения несущественна в рассматриваемой задаче о периодических движениях КА. Точка L_4 определяется как треугольная точка либрации, соответствующая «средней Земле» и «средней Луне». Предполагается, что барицентр B движется относительно Солнца по круговой орбите, орбита Луны относительно барицентра — также круговая. Средняя угловая скорость n движения Луны относительно барицентра равна 0,23 *рад/сут*. За единицу длины принимается расстояние D между Землей и Луной, равное 386 000 *км*.

Цифрами (*1*), (*2*) и (*3*) на рис. 40 обозначены соответственно реальные положения Земли, Луны и Солнца. Величина $\mu = 1/82{,}3$ представляет собой отношение массы Луны к сумме масс Луны и Земли, величина n_s — средняя угловая скорость барицентра B относительно Солнца. Принимается, что

$$\frac{n_s}{n} = m = 0{,}074801.$$

Величины $\nu(t)$, x_m и y_m, смысл которых ясен из рис. 40, вычислены в работе Кэмила [144] при помощи теории Луны Понтекулана [84, 164]. В дальнейшем в этой главе за независимую переменную принимается величина $\tau = nt$.

Пусть x и y обозначают координаты КА относительно системы координат L_4xy (см. рис. 40), а p_x и p_y — соответствующие им импульсы.

Примем m за основную величину, необходимую для сравнения порядков малости различных величин, входящих в функцию Гамильтона. Будем считать, что x, y, p_x и p_y имеют первый порядок малости относительно m. Среднее значение эксцентриситета орбиты Луны также имеет первый порядок малости: $e = 0{,}0549 = 0{,}734 \cdot m$. В [144] получено, что функция Гамильтона R движения КА вблизи L_4 с точностью до величин шестого порядка малости имеет вид

$$R = \sum_{n=0}^{4} R_n(x, y, p_x, p_y, \tau), \tag{2.1}$$

где

$$R_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (yp_x - xp_y) + \frac{1}{8}(x^2 - 5y^2 - 6\sqrt{3}Uxy) - \\ - \frac{3}{16}m^2(x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}Uxy), \tag{2.2}$$

$$R_1 = \frac{3\sqrt{3}}{16}(x^2y + y^3) + \frac{U}{16}(33xy^2 - 7x^3) -$$
$$- \frac{3m^2}{4}[(x - \sqrt{3}\,y)\cos\theta_s - (y + \sqrt{3}\,x)\sin\theta_s] +$$
$$+ \mu\,[y_{m1}p_x - x_{m1}p_y - (\dot{x}_{m1}p_x + \dot{y}_{m1}p_y) +$$
$$+ \left(y_{m1} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x_{m1}\right)y - \left(2x_{m1} + \frac{3\sqrt{3}}{2}y_{m1}\right)x\Big], \quad (2.3)$$

$$R_2 = \frac{5\sqrt{3}}{32}U(5x^3y - 9xy^3) + \frac{37}{128}x^4 - \frac{123}{64}x^2y^2 -$$
$$- \frac{3}{128}y^2 - \frac{3}{4}m^2[(x^2 - y^2)\cos 2\theta_s - 2xy\sin 2\theta_s] +$$
$$+ \mu\Big\{(y_{m2}p_x - x_{m2}p_y) - (\dot{x}_{m2}p_x + \dot{y}_{m2}p_y) +$$
$$+ \left(y_{m2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x_{m2}\right)y - \left(2x_{m2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}y_{m2}\right)x +$$
$$+ \frac{3}{8}[(11y^2 - 7x^2)x_{m1} + 22xyy_{m1}] + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mu\,[xy_{m1} + yx_{m1}]\Big\}, \quad (2.4)$$

$$R_3 =$$
$$= \frac{1}{256}[\sqrt{3}(960x^2y^3 - 285x^4y - 33y^5) + 23x^5 - 430x^3y^2 + 555xy^4] -$$
$$- \frac{3}{16}\frac{m^2}{r_{3B}}[(3x + \sqrt{3}\,y)\cos\theta_s - (\sqrt{3}\,x + 5y)\sin\theta_s] +$$
$$+ \mu\Big\{(y_{m3}p_x - x_{m3}p_y) - (\dot{x}_{m3}p_x + \dot{y}_{m3}p_y) +$$
$$+ \left(y_{m3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x_{m3}\right)y - \left(2x_{m3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}y_{m3}\right)x +$$
$$+ \frac{3}{8}[(11y^2 - 7x^2)x_{m2} + 22xyy_{m2}] + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mu\,(xy_{m2} + yx_{m2}) +$$
$$+ \frac{3}{8}\mu\,[(7x^2 - 11y^2)x_{m1} - 22xyy_{m1}]\Big\} +$$
$$+ \frac{m^2}{2}\left[\frac{3\sqrt{3}}{16}(x^2y + y^3) + \frac{1}{16}(33xy^2 - 7x^3)\right], \quad (2.5)$$

$$R_4 = \frac{1}{1024}[\sqrt{3}(294x^5y - 420x^3y^3 - 714xy^5) -$$
$$- 331x^6 + 6105x^4y^2 - 7965x^2y^4 + 383y^6] -$$
$$- \frac{\mu m^2}{8r_{3B}}[(x - 5\sqrt{3}\,y)\cos\theta_s - 3(\sqrt{3}\,x + y)\sin\theta_s] +$$
$$+ \mu\Big\{(y_{m4}p_x - x_{m4}p_y) - (\dot{x}_{m4}p_x + \dot{y}_{m4}p_y) + \left(y_{m4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x_{m4}\right)y -$$
$$- \left(2x_{m4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}y_{m4}\right)x + \frac{3}{8}[(11y^2 - 7x^2)x_{m3} + 22xyy_{m3}] +$$
$$+ \frac{3\sqrt{3}}{2}\mu\,[xy_{m3} + yx_{m3}] + \frac{3}{8}\mu\,[7x^2 - 11y^2)x_{m2} - 22xyy_{m2}]\Big\} +$$
$$+ \frac{m^2}{2}\left[\frac{5\sqrt{3}}{32}(5x^3y - 9xy^3) + \frac{37}{128}x^4 - \frac{123}{64}x^2y^2 - \frac{3}{128}y^4\right]. \quad (2.6)$$

В разложении (2.1) μ считается величиной первого порядка малости (так как $\mu = 1/82{,}3 = 0{,}16244\ m$), $U = 1-2\mu$ — величиной нулевого порядка. Через r_{3B} обозначено среднее расстояние от барицентра B до Солнца

$$1/r_{3B} = 0{,}002559 = 0{,}457357 \cdot m^2.$$

Точкой в формулах (2.3) — (2.6) обозначено дифференцирование по τ, x_{mk}, y_{mk} — величины порядка m^k. При этом

$$x_m = x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + x_{m4}, \tag{2.7}$$

где

$$x_{m1} = -e\cos\theta_e,$$

$$x_{m2} = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^2\cos 2\theta_e - \frac{15}{8}em\cos(2\theta_s - \theta_e) - m^2\cos 2\theta_s,$$

$$x_{m3} = \frac{1}{8}e^3\cos\theta_e - \frac{9}{8}e^3\cos 3\theta_e + \frac{3}{4}em^2\cos\theta_e + \\ + \frac{5}{16}em^2\cos(2\theta_s + \theta_e) - \frac{3}{8}em^2\cos(2\theta_s - \theta_e) - \\ - \frac{9}{16}m^3\cos 2\theta_s + \frac{15}{11}\frac{m}{r_{3B}}\cos\theta_s, \tag{2.8}$$

$$x_{m4} = \frac{25}{256}m^4\cos 4\theta_s - \frac{64}{9}m^4\cos 2\theta_s + \frac{159}{256}m^4 + \\ + \frac{81}{16}\frac{m^2}{r_{3B}}\cos\theta_s - \frac{25}{64}\frac{m^2}{r_{3B}}\cos 3\theta_s,$$

и

$$y_m = y_{m1} + y_{m2} + y_{m3} + y_{m4}, \tag{2.9}$$

где

$$y_{m1} = 2e\sin\theta_e,$$

$$y_{m2} = \frac{1}{4}e^2\sin 2\theta_e + \frac{15}{4}em\sin(2\theta_s - \theta_e) + \frac{11}{8}m^2\sin 2\theta_s,$$

$$y_{m3} = \frac{13}{12}e^3\sin 3\theta_e - \frac{1}{4}e^3\sin\theta_e + \frac{7}{16}em^2\sin(2\theta_s + \theta_e) + \\ + \frac{5}{16}em^2\sin(2\theta_s - \theta_e) + \frac{59}{12}m^3\sin 2\theta_s - \frac{15}{8}\frac{m}{r_{3B}}\sin\theta_s, \tag{2.10}$$

$$y_{m4} = \frac{25}{256}m^4\sin 4\theta_s + \frac{893}{72}m^4\sin 2\theta_s + \frac{15}{32}\frac{m^2}{r_{3B}}\sin 3\theta_s - \frac{93}{8}\frac{m^2}{r_{3B}}\sin\theta_s.$$

В разложениях для x_{mk} и y_{mk} в формулах (2.8) и (2.10) не выписаны члены четвертого порядка относительно e. Величины θ_s и θ_e, входящие в разложение функции Гамильтона (2.1), вычисляются по формулам

$$\theta_s = \omega_s\tau, \quad \theta_e = \omega_e\tau - \overline{\theta}_e,$$

где

$$\omega_s = 1 - m, \quad \omega_e = 1 - \frac{3}{4}m^2 - \frac{225}{32}m^3,$$

а через $\overline{\theta}_e$ обозначена начальная долгота перигея орбиты Луны относительно инерциальной линии (см. рис. 40). Отметим, что в «невозмущенный» гамильтониан R_0 разложения (2.1) для удобства включены все члены, квадратичные относительно x, y, p_x, p_y и имеющие постоянные коэффициенты.

§ 3. О методе исследования. Предварительное преобразование функции Гамильтона

Основные этапы построения периодических движений и анализа ихустойчивости состоят в следующем [144]. Сначала найдем полный интеграл $S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \tau)$ уравнения Гамильтона — Якоби, соответствующего «невозмущенному» гамильтону R_0. Полный интеграл S и соотношения $\partial S/\partial\alpha_i = \beta_i$ (α_i, β_i — const) дают решение $x = x_0(\alpha_i, \beta_i, \tau)$, $y = y_0(\alpha_i, \beta_i, \tau)$, $p_x = p_{x_0}(\alpha_i, \beta_i, \tau)$, $p_y = p_{y_0}(\alpha_i, \beta_i, \tau)$. Для исследования «возмущенного» движения (т. е. движения, описываемого полной функцией Гамильтона (2.1)) делаем замену переменных $x, y, p_x p_y \to \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ при помощи формул $x = x_0$, $y = y_0$, $p_x = p_{x_0}$, $p_y = p_{y_0}$. Новый гамильтониан $\bar{R}$ имеет вид

$$\bar{R} = R + \frac{\partial S}{\partial \tau} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

где функции R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) выражены через α_i, β_i.

Затем к системе с функцией Гамильтона $\bar{R}$ применяем теорию возмущений Депри-Хори, описанную в главе 11. В результате получим функцию Гамильтона, содержащую только долгопериодические члены. Сделав затем несложное каноническое преобразование, можно из гамильтониана исключить независимую переменную τ.

В новых переменных искомые периодические движения соответствуют положениям равновесия. Так как независимая переменная теперь явно не входит в функцию Гамильтона, то нахождение положений равновесия и исследование их устойчивости не представляют больших трудностей.

И, наконец, для представления периодических движений в исходной системе координат L_4xy надо сделать несколько канонических преобразований, обратных описанным выше.

Для осуществления намеченной схемы исследования удобно предварительно сделать каноническое преобразование, приводящее гамильтониан R_0 к нормальной форме. Характеристическое уравнение, соответствующее этому гамильтониану, имеет вид

$$\lambda^4 + \left(1 - \frac{3}{2}m^2\right)\lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)^2 = 0. \qquad (3.1)$$

Это уравнение имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$,

$\pm i\omega_2$, где

$$\omega_1 = 0{,}949313, \quad \omega_2 = 0{,}300684.$$

Следовательно, «невозмущенное» движение устойчиво. Теперь при помощи линейного канонического преобразования введем переменные $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$ так, чтобы в этих переменных невозмущенный гамильтониан принял нормальную форму, а сами переменные $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$ имели нулевой порядок относительно m, что позволяет ввести в новый гамильтониан малый параметр m в явном виде. Искомая замена переменных такова:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{Vmatrix} = \mathbf{A} \begin{Vmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{Vmatrix}, \tag{3.2}$$

где матрица A имеет вид [144]

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{k_1}{\omega_1}(\omega_1^2+b) & -\frac{k_2}{\omega_2}(\omega_2^2+b) \\ -2k_1\omega_1 & -2k_2\omega_2 & -\frac{k_1}{\omega_1}\eta & \frac{k_2}{\omega_2}\eta \\ -k_1\omega_1(\omega_1^2+b-2) & -k_2\omega_2(\omega_2^2+b-2) & \frac{k_1}{\omega_1}\eta & -\frac{k_2}{\omega_2}\eta \\ k_1\eta\omega_1 & k_2\eta\omega_2 & \frac{k_1}{\omega_1}(b-\omega_1^2) & -\frac{k_2}{\omega_2}(b-\omega_2^2) \end{Vmatrix}. \tag{3.3}$$

В (3.3) введены следующие обозначения:

$$a = \frac{3}{4}\left(1+\frac{m^2}{2}\right), \quad b = \frac{9}{4}\left(1+\frac{m^2}{2}\right), \quad \eta = \frac{3\sqrt{3}}{4}U\left(1+\frac{m^2}{2}\right),$$

$$k_i = \frac{m}{\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)(\omega_1^2+b)}} \qquad (i = 1, 2).$$

Новый гамильтониан $\bar{H} = R/m^2$. Его квадратичная часть $\bar{H}_0$ выглядит следующим образом:

$$\bar{H}_0 = \frac{1}{2}(\bar{p}_1^2 + \omega_1^2\bar{q}_1^2) - \frac{1}{2}(\bar{p}_2^2 + \omega_2^2\bar{q}_2^2). \tag{3.4}$$

Для решения уравнений, соответствующих невозмущенному гамильтониану $\bar{H}_0$, удобно ввести канонические переменные действие $\tilde{\alpha}_i$ и угол $\tilde{\beta}_i$ по формулам

$$\bar{q}_i = (-1)^{i+1}\sqrt{\frac{2\tilde{\alpha}_i}{\omega_i}}\sin\tilde{\beta}_i, \quad \bar{p}_i = (-1)^{i+1}\sqrt{2\omega_i\tilde{\alpha}_i}\cos\tilde{\beta}_i \quad (i = 1, 2). \tag{3.5}$$

В переменных $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_i$ гамильтониан $\overline{H}_0$ примет вид

$$\overline{H}_0 = \omega_1\tilde{\alpha}_1 - \omega_2\tilde{\alpha}_2. \tag{3.6}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\beta}_1}{d\tau} &= \frac{\partial\overline{H}_0}{\partial\tilde{\alpha}_1} = \omega_1, & \frac{d\tilde{\alpha}_1}{d\tau} &= -\frac{\partial\overline{H}_0}{\partial\tilde{\beta}_1} = 0, \\ \frac{d\tilde{\beta}_2}{d\tau} &= \frac{\partial\overline{H}_0}{\partial\tilde{\alpha}_2} = -\omega_2, & \frac{d\tilde{\alpha}_2}{d\tau} &= -\frac{\partial\overline{H}_0}{\partial\tilde{\beta}_2} = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Решение этих уравнений записывается так:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= \omega_1\tau + \beta_1, & \tilde{\alpha}_1 &= \alpha_1, \\ \tilde{\beta}_2 &= -\omega_2\tau + \beta_2, & \tilde{\alpha}_2 &= \alpha_2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где α_i, β_i — константы интегрирования. Это как раз те постоянные, которые содержатся в решении невозмущенных уравнений, получаемом из уравнения Гамильтона — Якоби, соответствующего $\overline{H}_0$.

Теперь, согласно плану исследования, намеченному в начале этого параграфа, примем α_i, β_i за новые канонические переменные. Гамильтониан H, описывающий изменение переменных α_i, β_i в возмущенной задаче, будет таким:

$$H = \sum_{n=1}^{4} \frac{m^n}{n!} H_n, \tag{3.9}$$

где

$$\frac{m^n}{n!} H_n = \frac{1}{m^2} R_n,$$

а R_n — функции из разложения (2.1), в которых переменные x, y, p_x, p_y заменены через α_i, β_i при помощи формул (3.2), (3.3), (3.5) и (3.8), $H_n = O(1)$. Явные выражения для H_n выписаны в работе Кэмила [144].

Уравнения движения, соответствующие гамильтониану (3.9), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_i}{d\tau} &= \sum_{n=1}^{4} \frac{m^n}{n!} \frac{\partial H_n}{\partial\alpha_i}, \\ \frac{d\alpha_i}{d\tau} &= -\sum_{n=1}^{4} \frac{m^n}{n!} \frac{\partial H_n}{\partial\beta_i} \\ (i &= 1, 2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

§ 4. Долгопериодическая часть гамильтониана и исключение независимой переменной

Теперь нужно выполнить следующий весьма громоздкий шаг исследования. При помощи метода Депри — Хори нужно сделать каноническую замену переменных $\alpha_i, \beta_i \to \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$. При этом используются уравнения (4.25) и (4.27) главы 11. Из этих уравнений функции W_n находятся такими, чтобы исключить из нового гамильтониана K все короткопериодические члены. В переменных $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$ новый гамильтониан K будет содержать долгопериодические члены с частотами $\omega_1 - \omega_s$, $\omega_1 - 3\omega_2$, $\omega_1 - \omega_e$ и их комбинациями.

Наличие двух «внешних» частот ω_s и ω_e приводит к довольно сложным дифференциальным уравнениям упрощенной системы с гамильтонианом K. В работе [144] сделана попытка исключить все члены с частотой ω_e. Оказалось, что это можно сделать, так как процедура их исключения не приводит к появлению больших по величине коэффициентов в производящей функции W преобразования $\alpha_i, \beta_i \to \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$. Следует еще добавить, что при получении нового гамильтониана K из-за громоздкости проводимых вычислений и ограниченности вычислительных возможностей в [144] члены (e/m) учитывались только до третьей степени и только в K_3.

С учетом сделанных замечаний в [144] найдена долгопериодическая часть нового гамильтониана K в виде

$$K = \sum_{n=1}^{4} \frac{m^n}{n!} K_n, \tag{4.1}$$

где $K_1 \equiv 0$, а функции K_2, K_3 и K_4 содержат тригонометрические синусы и косинусы с аргументами

$$\bar{B}_1 - \theta_s, \quad 2(\bar{B}_1 - \theta_s), \quad \bar{B}_1 - 3\bar{B}_2, \quad \bar{B}_1 + 3\bar{B}_2 - 2\theta_s, \tag{4.2}$$

где $\bar{B}_1 = \omega_1 \tau + \bar{\beta}_1$, $\bar{B}_2 = \omega_2 \tau - \bar{\beta}_2$.

Таким образом, долгопериодическая часть преобразованного гамильтониана (4.1) содержит независимую переменную τ явно. Частоты соответствующих тригонометрических функций равны $\omega_1 - \omega_s$, $2(\omega_1 - \omega_s)$, $\omega_1 - 3\omega_2$ и $\omega_1 + 3\omega_2 - 2\omega_s$ и представляют собой малые величины. Чтобы из гамильтониана (4.1) исключить независимую переменную, введем новые переменные β_i^*, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= \bar{B}_1 - \theta_s = (\omega_1 - \omega_s)\,\tau + \bar{\beta}_1, \\ 3\beta_2^* &= \theta_s - 3\bar{B}_2 = (\omega_s - 3\omega_2)\,\tau + 3\bar{\beta}_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из этих формул получаем

$$\bar{B}_1 - 3\bar{B}_2 = \beta_1^* + 3\beta_2^*, \quad \bar{B}_1 + 3\bar{B}_2 - 2\theta_s = \beta_1^* - 3\beta_2^*. \tag{4.4}$$

Сопряженные с β_i^* канонические переменные α_i^* получаются при помощи производящей функции

$$S = \alpha_1^* (\sigma_1 \tau + \bar{\beta}_1) + \alpha_2^* (\sigma_2 \tau + \bar{\beta}_2), \tag{4.5}$$

где $\sigma_1 = \omega_1 - \omega_s$, $\sigma_2 = (\omega_s - 3\omega_2)/3$. Из (4.5) получаем

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\partial S}{\partial \bar{\beta}_i} = \alpha_i^*. \tag{4.6}$$

Преобразованный, не зависящий от τ, гамильтониан K^* дается формулой

$$K^* = K + \frac{\partial S}{\partial \tau} = K + \sigma_1 \alpha_1^* + \sigma_2 \alpha_2^*. \tag{4.7}$$

Переменные α_i^*, β_i^* удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\alpha_i^*}{d\tau} = -\frac{\partial K^*}{\partial \beta_i^*}, \quad \frac{d\beta_i^*}{d\tau} = \frac{\partial K^*}{\partial \alpha_i^*}. \tag{4.8}$$

Периодические движения КА соответствуют положениям равновесия системы (4.8). Но для нахождения положений равновесия удобнее будет перейти к прямоугольным декартовым координатам Q_i, P_i, определяемым равенствами

$$Q_i = \sqrt{2\omega_i \alpha_i^*} \sin \beta_i^*, \quad P_i = \sqrt{2\omega_i \alpha_i^*} \cos \beta_i^* \qquad (i = 1, 2). \tag{4.9}$$

Отметим, что Q_i/ω_i и P_i являются канонически сопряженными переменными. После подстановки α_i^* и β_i^*, выраженных через Q_i, P_i, в функцию (4.7) получаем такое выражение для K^* [144]:

$$K^* = \sum_{n=2}^{4} \frac{m^n}{n!} K_n^*, \tag{4.10}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} K_2^* = {} & 4{,}418708 Q_1^2 + 2{,}42737 Q_1 P_1 + 0{,}121254 P_1^2 + 2{,}292988 Q_2^2 + \\
& + 2{,}292988 P_2^2 + 0{,}028726 Q_1^4 + 0{,}057451 Q_1^2 P_1^2 + 0{,}028726 P_1^4 + \\
& + 0{,}2765502 Q_2^4 - 7{,}168701 Q_2^3 Q_1 - 0{,}959853 Q_2^3 P_1 + \\
& + 0{,}5531008 Q_2^2 P_2^2 - 2{,}879588 Q_2^2 P_2 Q_1 + 21{,}5061 Q_2^2 P_2 P_1 - \\
& - 1{,}816528 Q_2^2 Q_1^2 - 1{,}816528 Q_2^2 P_1^2 + 21{,}5061 Q_2 P_2^2 Q_1 + \\
& + 2{,}879558 Q_2 P_2^2 P_1 + 0{,}2765502 P_2^4 + 0{,}959853 P_2^3 Q_1 - \\
& - 7{,}168701 P_2^3 P_1 - 1{,}816528 P_2^2 Q_1^2 - 1{,}816528 P_2^2 P_1^2,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3!}K_3^* = 0{,}672102Q_1^2 + 0{,}543614Q_1P_1 - 0{,}672102P_1^2 +$$
$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 [0{,}081621\,(Q_1^2 + P_1^2) + 1{,}487332\,(Q_2^2 + P_2^2)] -$$
$$- 0{,}146701Q_1 - 0{,}398984P_1,$$
$$\frac{1}{4!}K_4^* = -26{,}98928Q_1^2 + 1{,}65662Q_1P_1 - 32{,}26905P_1^2 +$$
$$+ 20{,}07690\,(Q_2^2 + P_2^2) - 1{,}579912Q_1 + 0{,}572077P_1 + 104{,}9922Q_2^6 -$$
$$- 3148{,}167Q_2^5Q_1 + 2659{,}185Q_2^5P_1 + 314{,}9765Q_2^4P_2^2 + 7977{,}554Q_2^4P_2Q_1 +$$
$$+ 9444{,}503Q_2^4P_2P_1 - 4509{,}578Q_2^4Q_1^2 - 4509{,}578Q_2^4P_1^2 + 110{,}3419Q_2^4 +$$
$$+ 6296{,}335Q_2^3P_2^2Q_1 - 5318{,}367Q_2^3P_2^2P_1 + 6217{,}148Q_2^3Q_1^3 +$$
$$+ 958{,}7131Q_2^3Q_1^2P_1 + 6217{,}148Q_2^3Q_1P_1^2 - 78{,}47181Q_2^3Q_1 +$$
$$+ 958{,}7131Q_2^3P_1^3 + 187{,}2936Q_2^3P_1 + 314{,}9765Q_2^2P_2^4 + 5318{,}367Q_2^2P_2^2Q_1 +$$
$$+ 6296{,}335P_2^3Q_2^2P_1 - 9019{,}156,Q_2^2P_2^2Q_1^2 - 9019{,}156Q_2^2P_2^2P_1^2 +$$
$$+ 220{,}6838Q_2^2P_2^2 + 2876{,}139Q_2^2P_2Q_1^3 - 18651{,}44Q_2^2P_2Q_1^2P_1 +$$
$$+ 2876{,}139Q_2^2P_2Q_1P_1^2 - 550{,}5324Q_2^2P_2Q_1 - 18651{,}44Q_2^2P_2P_1^3 -$$
$$- 456{,}7756Q_2^2P_2P_1 + 1{,}276611Q_2^2Q_1^4 + 2{,}553222Q_2^2Q_1^2P_1^2 +$$
$$+ 140{,}0567Q_2^2Q_1^2 - 521{,}3286Q_2^2Q_1P_1 + 1{,}27611Q_2^2P_1^4 - 62{,}35282Q_2^2P_1^2 +$$
$$+ 9444{,}503Q_2P_2^4Q_1 - 7977{,}554Q_2P_2^4P_1 - 18651{,}44Q_2P_2^2Q_1^3 -$$
$$- 2876{,}139Q_2P_2^2Q_1^2P_1 - 18651{,}44Q_2P_2^2Q_1P_1^2 + 235{,}4333Q_2P_2^2Q_1 -$$
$$- 2876{,}139Q_2P_2^2P_1^3 - 561{,}8808Q_2P_2^2P_1 + 104{,}9922P_2^6 - 2659{,}185P_2^5Q_1 -$$
$$- 3148{,}167P_2^5P_1 - 4509{,}578P_2^4P_1^2 + 110{,}3419P_2^4 - 958{,}7131P_2^3Q_1^3 +$$
$$+ 6217{,}148P_2^3Q_1P_1^2 + 183{,}5108P_2^3Q_1 + 6217{,}148P_2^3P_1^3 +$$
$$+ 152{,}2585P_2^3P_1 + 1{,}276611P_2^2Q_1^4 + 2{,}553222P_2^2Q_1^2P_1^2 +$$
$$+ 140{,}0567P_2^2Q_1^2 - 521{,}3286P_2^2Q_1P_1 + 1{,}27611P_2^2P_1^4 - 62{,}35282P_2^2P_1^2 -$$
$$- 0{,}136966Q_1^6 - 0{,}410900Q_1^4P_1^2 + 17{,}0185Q_1^4 - 77{,}64935Q_1^3P_1 -$$
$$- 0{,}410900Q_1^2P_1^4 + 2{,}095039Q_1^2P_1^2 - 77{,}64935Q_1P_1^3 - 0{,}136967P_1^6 -$$
$$- 14{,}92347P_1^4.$$

§ 5. Периодические орбиты и их устойчивость

В работе Кэмила [144] показано, что система уравнений (4.8) имеет три положения равновесия. Обозначим их через E_j ($j = 1, 2, 3$). Соответствующие периодические движения также будем обозначать через E_j. Координаты (Q_i, P_i) равновесных точек находятся из системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial K^*}{\partial P_1} = \frac{\partial K^*}{\partial P_2} = \frac{\partial K^*}{\partial Q_1} = \frac{\partial K^*}{\partial Q_2} = 0. \tag{5.1}$$

Так как в гамильтониане (4.10) содержатся члены, линейные относительно Q_1 и P_1 (они обусловлены наличием солнечных возмущений и входят в K_3^* и K_4^*), начало координат (совпадающее с точкой либрации L_4) уже не будет положением равновесия. Но существует одно положение равновесия E_1, близкое к началу координат. Чтобы найти равновесную точку E_1, удержим в гамильтониане K^* только линейные и квадратичные члены относительно Q_i, P_i. Тогда

$$K^* = c_1Q_1^2 + c_2Q_1P_1 + c_3P_1^2 + c_4Q_2^2 + c_5P_2^2 + c_6Q_1 + c_7P_1, \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= 4{,}418703\ m^2 + (0{,}672102\ m^3 + 0{,}081621\ me^2) - 26{,}98928\ m^4,\\
c_2 &= 2{,}42737\ m^2 + 0{,}543614\ m^3 + 1{,}65662\ m^4,\\
c_3 &= 0{,}121254\ m^2 + (-0{,}672102\ m^3 + 0{,}081621\ me^2) - \\
&\qquad - 32{,}26905\ m^4, \qquad (5.3)\\
c_4 &= 2{,}292988\ m^2 + 1{,}487332\ me^2 + 20{,}0769\ m^4,\\
c_5 &= c_4\\
c_6 &= -0{,}146701\ m^3 - 1{,}579912\ m^4,\\
c_7 &= -0{,}398984\ m^3 + 0{,}572077\ m^4.
\end{aligned}$$

Из (5.1) — (5.3) получаем, что близкое к началу координат положение равновесия E_1 таково:

$$(Q_1, P_1) = (0{,}008761, -0{,}022543), \qquad (Q_2, P_2) = (0, 0). \quad (5.4)$$

Найденное положение равновесия соответствует периодической орбите КА с периодом, равным одному синодическому месяцу. Ниже будет показано, что эта периодическая орбита неустойчива.

Как показано в работе [144], система уравнений (5.1) допускает еще два решения E_2 и E_3, которые соответствуют устойчивым периодическим орбитам. Координаты равновесных точек E_2 и E_3 найдены в [114] в виде рядов по степеням m:

$$\begin{aligned}
(P_1, Q_1)_2 &= (1{,}7946, -0{,}4718) + m\,(3{,}5027, -0{,}8589) + O(m^2),\\
(P_2, Q_2)_2 &= (0, 0), \qquad (5.5)\\
(P_1, Q_1)_3 &= (-1{,}7946, 0{,}4718) + m\,(-2{,}6381, 0{,}6825) + O(m^2),\\
(P_2, Q_2)_3 &= (0, 0). \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Равновесные точки E_2 и E_3 соответствуют периодическим орбитам КА с периодом, равным одному синодическому месяцу. Размеры этих двух орбит очень близки, но фазы периодических движений отличаются на 180°.

Для исследования устойчивости найденных периодических движений E_j ($j = 1, 2, 3$) выпишем квадратичную часть разложения гамильтониана K^* в ряд по отклонениям δQ_i, δP_i (линейные относительно δQ_i, δP_i члены в δK^* уничтожаются, так как координ-

Таблица 19

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
E_1	0,07098	2,468033	4,468982	4,405318	4,405318
E_2	0,813874	2,215314	4,760572	—5,884246	—5,884246
E_3	0,07731718	2,227761	4,745097	—5,440188	—5,440188

наты точек E_j удовлетворяют системе уравнений (5.1)). Имеем

$$\delta K^* = m^2 (a_1 \delta P_1^2 + a_2 \delta P_1 \delta Q_1 + a_3 \delta Q_1^2 + a_4 \delta P_2^2 + a_5 \delta Q_2^2). \quad (5.7)$$

Числовые значения величин a_i приведены в табл. 19. Как и в работе Кэмила [144], ограничимся анализом устойчивости в линейном приближении. При одновременном выполнении двух неравенств

$$4a_1a_3 > a_2^2, \quad a_4a_5 > 0 \quad (5.8)$$

имеет место устойчивость в линейном приближении. Если же хотя бы одно из неравенств (5.8) выполнено с обратным знаком, то периодическое движение неустойчиво. Проверка выполнимости неравенств (5.8) показывает, что периодическое движение E_1 неустойчиво, а периодические движения E_2 и E_3 устойчивы в линейном приближении.

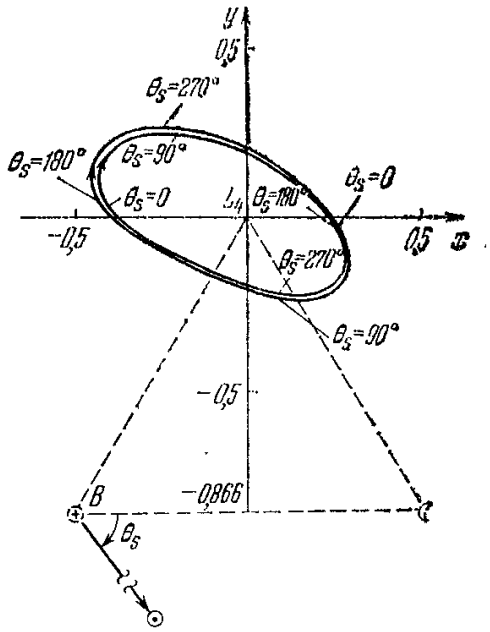

Рис. 41. Устойчивые периодические орбиты вблизи точки либрации в системе Земля — Луна с учетом солнечных возмущений.

Устойчивые орбиты E_2 и E_3 схематически изображены в плоскости L_4xy на рис. 41. Орбита E_2 имеет форму, очень близкую к форме эллипса. Большая полуось этого эллипса приблизительно перпендикулярна прямой, проходящей через L_4 и центр масс Земли. Большая и малая полуоси эллипса незначительно (не более чем на 3%) отличаются от полуосей орбиты, полученной Коленкевичем и Карпентером при помощи точных численных расчетов и равных соответственно 145 000 *км* и 71 000 *км*. Движение КА по орбите E_2 синхронизировано с движением Солнца таким образом, что их угловые положения почти совпадают, когда КА пересекает одну из осей эллипса.

Орбита E_3 очень похожа на орбиту E_2, ее размеры несколько меньше размеров орбиты E_2. Космический аппарат, движущийся по орбите E_3, начинает свое движение с противоположной стороны эллипса по сравнению с космическим аппаратом, движущимся по орбите E_2. Таким образом, хотя орбита E_3 и сдвинута по фазе на 180° относительно орбиты E_2, движение по ней также синхронизировано с движением Солнца.

Полученные периодические орбиты E_2 и E_3 — это единственные известные устойчивые периодические орбиты в рассматриваемой задаче о движении КА вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна при наличии возмущающего гравитационного воздействия Солнца. Отметим, что учет исключенных из гамильтониана K короткопериодических членов и членов, содержащих долгопериодические функции с частотой $\omega_1 - \omega_e$ (см. § 4), приведет к тому, что орбиты E_2 и E_3 станут условно-периодическими, но размеры этих орбит изменятся незначительно по сравнению с размерами периодических орбит E_2 и E_3 [144]. Отметим еще, что в работе [144] сделана попытка найти периодические орбиты, отличающиеся от E_1, E_2 и E_3. Но приближенность анализа, проведенного в [144], не позволила сделать достаточно строгих выводов об их существовании и устойчивости.

ГЛАВА 14

ПАССИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L_2 СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ—ЛУНА

§ 1. Введение

В последние годы появилось много работ (см., например, [38 — 41, 107, 125 — 133, 135, 141, 168, 174]), в которых исследуются различные вопросы, посвященные проектам использования точек либрации ограниченной задачи трех тел в космических исследованиях. Особенно много внимания уделяется проектам использования прямолинейной точки либрации L_2 системы Земля — Луна.

Точка L_2, которая является неустойчивой точкой равновесия (во вращающейся системе координат; см. гл. 1) ограниченной эллиптической задачи трех тел, расположена на луче Земля — Луна за Луной на расстоянии примерно 65 000 *км*. Космический аппарат, движущийся вблизи L_2, предполагается, например, использовать как ретранслятор для связи наземного пункта с КА, находящимся на обратной стороне Луны или на орбите искусственного спутника Луны, когда последний находится за Луной и непосредственная прямая радиосвязь с ним невозможна.

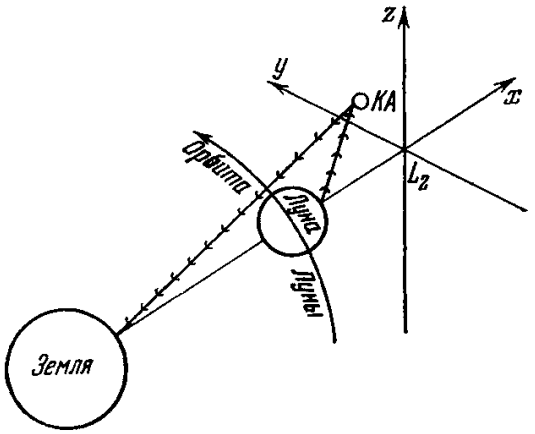

Рис. 42. Искусственный спутник связи в системе Земля — Луна.

На рис. 42 изображена схема использования КА, движущегося вблизи L_2, для связи между Землей и обратной стороной Луны. На этом рисунке система координат L_2xyz выбрана так, что ось L_2x направлена вдоль луча Земля — Луна, L_2y лежит в плоскости орбиты Луны, а L_2z перпендикулярна плоскости орбиты Луны. Если КА расположен вблизи плоскости L_2yz, а расстояние от КА до L_2 превосходит примерно 3100 *км* (см. об этом ниже), то он может быть использован для создания непрерывной радиосвязи между обратной стороной Луны и любой точкой поверхности Земли. Возможны и многие другие способы использования движущегося вблизи L_2 КА для окололунных космических операций.

Но траектории КА, не покидающие окрестности L_2 (например, условно-периодические траектории), неустойчивы. При малых отклонениях начальных данных от многообразия условно-периодических траекторий КА, вообще говоря, начинает экспоненциально быстро удаляться от точки L_2. Условно-периодическая траектория может служить лишь опорной траекторией, в окрестности которой движение должно поддерживаться с помощью активной системы управления. Величина энергетических затрат на поддержание движения вблизи L_2 существенно зависит от точности определения многообразия условно-периодических траекторий.

Решение последней задачи методами численного интегрирования строгих уравнений движения неэффективно. Однако, используя теорию возмущений, можно получить приближенное аналитическое описание многообразия условно-периодических траекторий. По-видимому, к настоящему времени с наибольшей полнотой поставленная задача рассмотрена в работе [133]. Этой же задаче посвящена и настоящая глава книги. Примененный метод построения условно-периодических (и всех возможных других) траекторий вблизи L_2 основан на проведении ряда последовательных канонических преобразований переменных, приводящих функцию Гамильтона задачи к нормальной форме, для которой начальные условия, обеспечивающие различные (например, условно-периодические) траектории, находятся весьма просто. Проведенные в настоящей главе построения могут быть положены в основу теории пассивного движения КА вблизи L_2.

§ 2. О траекториях линейной задачи

Рассмотрим круговую ограниченную задачу трех тел Земля — Луна — КА. Линеаризованные в окрестности L_2 уравнения движения КА запишутся в системе координат L_1xyz в таком виде (см. главу 1):

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2A_2)\, x &= 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - (1 - A_2)y &= 0, \\ \ddot{z} + A_2 z &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

В уравнениях (2.1) точкой обозначено дифференцирование по переменной $\tau = nt$ (n — среднее движение Луны, $n = 0{,}22997$ *рад/сут*), за единицу длины принято расстояние между центрами масс Земли и Луны, равное 384 405 *км*, а величина A_2 вычисляется по формуле

$$A_2 = \frac{1-\mu}{(\xi+\mu)^3} + \frac{\mu}{(\xi+\mu-1)^3}. \tag{2.2}$$

В последнем выражении $\mu = 0{,}0121506683$, что соответствует отношению масс Земли и Луны, равному 81,3 (это отношение масс

принято всюду в настоящей главе). Через ξ в формуле (2.2) обозначено безразмерное расстояние от центра масс Земли и Луны до L_2; величина ξ ($\xi > 1 - \mu$) является корнем уравнения

$$\xi - \frac{1-\mu}{(\xi+\mu)^2} - \frac{\mu}{(\xi-1+\mu)^2} = 0. \tag{2.3}$$

Характеристическое уравнение системы (2.1) имеет вид

$$(\lambda^2 + A_2)\,[\lambda^4 - (A_2 - 2)\,\lambda^2 - (2A_2 + 1)(A_2 - 1)] = 0. \tag{2.4}$$

Так как $A_2 > 1$ (см. главу 1), то уравнение (2.4) имеет два действительных и две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_1$, $\pm i\lambda_2$, $\pm i\lambda_3$. Из-за существования корней $\pm\lambda_1$ точка либрации L_2 неустойчива. Величины λ_1 и λ_2 определяют движение КА в плоскости орбиты Луны (плоскость L_2xy), а λ_3 — движение по нормали к ней. В дальнейшем все величины λ_k считаем положительными:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2 - 2 + \sqrt{9A_2^2 - 8A_2}}{2}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{2 - A_2 + \sqrt{9A_2^2 - 8A_2}}{2}},$$
$$\lambda_3 = \sqrt{A_2}. \tag{2.5}$$

Для принятого отношения масс Земли и Луны, равного 81,3, числовые значения величин λ_k таковы:

$$\lambda_1 = 2{,}15867362, \quad \lambda_2 = 1{,}86264545, \quad \lambda_3 = 1{,}78617573.$$

Общее решение системы (2.1) имеет вид

$$x = \alpha_1 \sin\lambda_2\theta + \alpha_2\cos\lambda_2\theta + \alpha_3\exp\lambda_1\theta + \alpha_4\exp(-\lambda_1\theta),$$
$$y = -\gamma_2(\alpha_2\sin\lambda_2\theta - \alpha_1\cos\lambda_2\theta) + \gamma_1(\alpha_3\exp\lambda_1\theta - \alpha_4\exp(-\lambda_1\theta)),$$
$$z = \beta_1\sin\lambda_3\theta + \beta_2\cos\lambda_3\theta. \tag{2.6}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\theta = n(t - t_0)$$

(t_0 — произвольный начальный момент времени),

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\lambda_1}(\lambda_1^2 - 2A_2 - 1), \quad \gamma_2 = \frac{1}{2\lambda_2}(\lambda_2^2 + 2A_2 + 1),$$

α_i, β_i — произвольные постоянные, значения которых определяются начальными данными x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ в момент времени t_0:

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_1\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2\gamma_1 - \lambda_1\gamma_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma_1\lambda_1 x_0 - \dot{y}_0}{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2},$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_2\lambda_2 x_0 + \dot{y}_0}{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2} - \frac{\gamma_2\dot{x}_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_2\gamma_1 - \lambda_1\gamma_2}\right),$$
$$\alpha_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_2\lambda_2 x_0 + \dot{y}_0}{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2} + \frac{\gamma_2\dot{x}_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_2\gamma_1 - \lambda_1\gamma_2}\right), \tag{2.7}$$
$$\beta_1 = \frac{\dot{z}_0}{\lambda_3}, \quad \beta_2 = z_0.$$

Если начальные данные таковы, что $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, то движение КА в линейной задаче будет условно-периодическим. В проекции на плоскость L_4xy траектория КА представляет собой эллипс с центром в точке L_2 (см. рис. 43). При этом в зависимости от значения $A_y = \gamma_2 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ получаются различные по размерам эллипсы, у которых отношение большой полуоси, ориентированной по оси L_2y, к малой полуоси, ориентированной по оси L_2x, равно $\gamma_2 = 2{,}9123$.

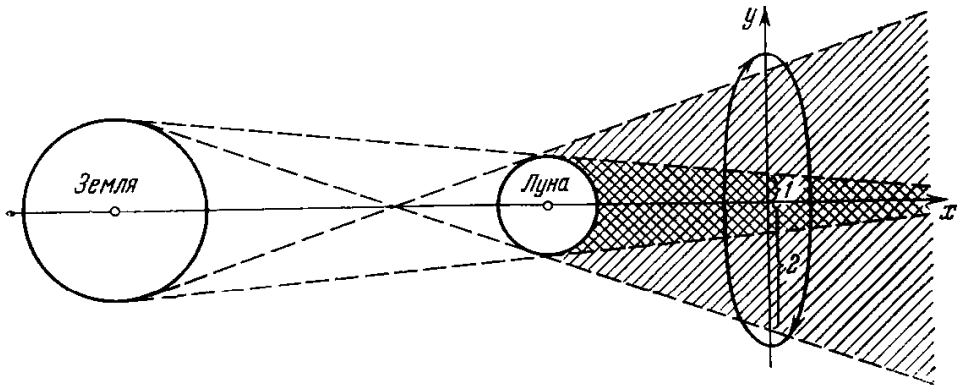

Рис. 43. Траектория КА в плоскости L_4xy.

Если для проведения космических операций требуется обеспечить видимость КА из наземных пунктов, то КА не должен находиться в самой точке либрации L_2 или в непосредственной близости от нее. В окрестности точки L_2 существуют зона полного затенения и зона частичного затенения КА Луной (для земного наблюдателя). На рис. 43 показаны траектория движения КА в плоскости L_4xy и проекции зон затенения на эту плоскость. Траектория движения в плоскости L_4xy является периодической с частотой λ_2, равной в размерных единицах 0,42835 *рад/сут* (соответствующий период равен приблизительно 14 *сут*). Зоны затенения на рис. 43 обозначены цифрами *1* и *2*. В проекции на плоскость L_4yz зоны затенения представляют собой круги с радиусами примерно $R_1 = 960$ *км* и $R_2 = 3100$ *км*. При этом, если КА находится в зоне полного затенения (зона *1*), то он не будет виден ни из одной точки земной поверхности, а вне зон затенения КА будет наблюдаем из любого наземного пункта одновременно с Луной. Если в плоскости L_4xy КА движется по эллипсу с большой полуосью $A_y > 3100$ *км*, то будут существовать участки траектории, находящиеся в зоне прямой видимости из любой точки земной поверхности, из которой видна Луна. На этих участках траектории могут проводиться траекторные измерения, управление движением КА, осуществление сеансов радиосвязи между Землей и обратной стороной Луны и т. д.

Движение КА в направлении L_2z, перпендикулярном к плоскости орбиты Луны, представляет собой гармоническое колебание

с частотой λ_3, равной в размерных единицах 0,41077 *рад/сут*. Колебание по оси L_2z не связано с движением КА в плоскости L_2xy. Если в плоскости L_2xy КА также совершает периодическое движение с частотой $\lambda_2 \neq \lambda_3$, то проекция траектории движения КА на плоскость L_2yz, ортогональную к линии Земля — Луна, представляет собой сложную кривую, заполняющую некоторую замкнутую область (рис. 44). При этом будут существовать интервалы времени, в течение которых КА не будет виден из наземных пунктов, так как будет находиться за Луной в зоне затенения. Для многих практических приложений это может оказаться нежелательным. Таким образом, возникает одна из задач управления движением КА в окрестности точки L_2: при помощи активной системы управления получить такую траекторию движения КА, чтобы он постоянно был виден из любого наземного пункта вместе с Луной (задача синхронизации). В работах [38, 126, 128, 141] для решения задачи синхронизации используются управления периодом колебания вдоль оси L_2z. Синхронизация периода движения КА по оси L_2z и в плоскости L_2xy достигается увеличением частоты колебания по оси L_2z на величину $\lambda_2 - \lambda_3$. Для этого требуется периодически корректировать орбиту КА, сообщая импульсы в направлении, коллинеарном оси L_2z. При этом, если амплитуды колебаний по осям L_2y и L_2z равны, а разность фаз этих колебаний равна 90°, то в плоскости L_2yz КА будет двигаться по почти круговой орбите (галоорбите). Если еще при этом амплитуды колебаний превосходят величину 3100 *км*, то КА будет все время виден вместе с Луной из любого наземного пункта и будет двигаться по кривой, близкой к окружности, концентрической с окружностью диска Луны.

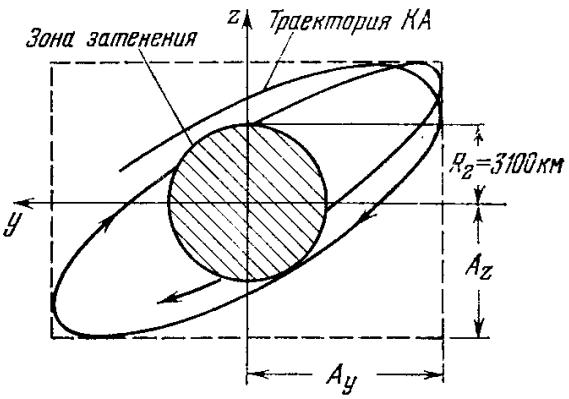

Рис. 44. Вид траектории КА с Земли.

Различные вопросы, связанные с удержанием КА вблизи L_2, и задачи управления движением КА в окрестности галоорбиты рассмотрены в работах [38 — 41, 107, 125 — 133, 135, 141, 168, 174].

§ 3. Уравнения движения КА вблизи L_2 с учетом солнечных возмущений

3.1. Постановка задачи. В этом и последующих параграфах настоящей главы изложены основы теории пассивного движения КА в окрестности L_2 с учетом солнечных возмущений. При изложении мы следуем работам [39 — 41].

В настоящем параграфе методом канонических преобразований получены основные уравнения задачи при достаточно общих предположениях. Цель нижеследующих преобразований состоит в том, чтобы явным образом выделить некоторые малые параметры задачи и получить уравнения в форме, удобной для дальнейших преобразований с помощью теории возмущений.

Рассматривается задача о движении КА пренебрежимо малой массы под действием гравитационного притяжения Земли, Луны, Солнца и других потенциальных сил. В качестве исходной системы координат примем невращающуюся геоцентрическую систему. Введем обозначения: $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости точки относительно исходной системы координат; $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_1$ — радиус-вектор и вектор скорости центра масс Луны; $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{v}_2$ — радиус-вектор и вектор скорости центра масс Солнца; $k = fM$, $k_1 = fM_1$, $k_2 = fM_2$; M, M_1, M_2 — массы Земли, Луны и Солнца соответственно; f — гравитационная постоянная.

Гамильтониан рассматриваемой задачи имеет вид

$$H = \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + U + U_1 + U_2 + K, \tag{3.1}$$

где

$$U = -\frac{k}{|r|}, \quad U_i = -k_i\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_i|^3}\right), \tag{3.2}$$

$K = K(\mathbf{r}, t)$ — потенциал возмущающих сил, который может описывать возмущения от планет, от нецентральности поля Земли и Луны, от светового давления и др. Символом $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обозначается скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$; $|\mathbf{x}|$ — модуль вектора $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Компоненты векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — канонически сопряженные переменные задачи.

3.2. Вращающаяся система координат. Перейдем к вращающейся геоцентрической системе координат. Первый орт этой системы постоянно ориентирован по радиусу-вектору Луны $\mathbf{r}_1$, третий — по нормали к плоскости векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{v}_1$, а второй орт дополняет систему до правой. Переход к вращающейся системе координат задается ортогональной матрицей

$$\mathbf{A}(t) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3),$$

где

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|}, \quad \mathbf{a}_2 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1], \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{c}_1}{|\mathbf{c}_1|}. \tag{3.3}$$

Через $\mathbf{c}_1$ в (3.3) обозначен вектор-столбец $[\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1]$, квадратной скобкой обозначается векторное произведение.

Переход к вращающейся системе координат можно представить как каноническое преобразование $\mathbf{r}, \mathbf{v} \to \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}$, задаваемое производящей функцией

$$S_1 = (\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}). \tag{3.4}$$

Верхний индекс «т» в (3.4) — знак транспонирования. Каноническое преобразование $\mathbf{r}, \mathbf{v} \to \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}$ имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}. \tag{3.5}$$

Можно показать, что справедливо представление

$$\frac{d\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{dt}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

где

$$\omega(t) = \frac{|\mathbf{c}_1|}{|\mathbf{r}_1|^2}, \quad \beta(t) = \frac{(\dot{\mathbf{v}}_1, \mathbf{c}_1)|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{c}_1|^2} \tag{3.7}$$

$$\left(\dot{\mathbf{v}}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\right).$$

Используя (3.5) и (3.6), вычислим

$$K_1^1 = \frac{\partial S_1}{\partial t} = -(\boldsymbol{\Omega}, [\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{v}]), \tag{3.8}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = (\beta(t), \ 0, \ \omega(t)). \tag{3.9}$$

После преобразования (3.5) гамильтониан задачи будет иметь вид

$$H^1 = \frac{1}{2}|\bar{\mathbf{v}}|^2 + U^1 + U_1^1 + U_2^1 + K_1^1 + K^1, \tag{3.10}$$

$$U^1 = -\frac{k}{|\bar{\mathbf{r}}|}, \quad U_i^1 = -k_i\left(\frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_i|} - \frac{(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}_i)}{|\bar{\mathbf{r}}_i|^3}\right), \tag{3.11}$$

$$K^1 = K^1(\bar{\mathbf{r}}, t) = K(\mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}, t), \quad \bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i \qquad (i = 1, 2). \tag{3.12}$$

3.3. Безразмерные координаты. Теперь проведем каноническое преобразование $\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}} \to \mathbf{R}, \mathbf{V}$, задаваемое производящей функцией

$$S_2 = \frac{(\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{V})}{|\mathbf{r}_1|} + \frac{1}{2}\frac{d\ln|\mathbf{r}_1|}{dt}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}). \tag{3.13}$$

Это преобразование имеет вид

$$\bar{\mathbf{r}} = |\mathbf{r}_1|\mathbf{R}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{r}_1|}\mathbf{V} + \frac{d|\mathbf{r}_1|}{dt}\mathbf{R}. \tag{3.14}$$

Используя (3.13) и (3.14), определим

$$K_2^2 = \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{d\ln|\mathbf{r}_1|}{dt}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) + \frac{1}{2}\left(\frac{d|\mathbf{r}_1|}{dt}\right)^2|\mathbf{R}|^2 = \frac{1}{2}|\mathbf{r}_1|\frac{d^2|\mathbf{r}_1|}{dt^2}|\mathbf{R}|^2. \tag{3.15}$$

После преобразования (3.14) гамильтониан задачи запишется в следующем виде:

$$H^2 = \frac{1}{2|\mathbf{r}_1|^2}|\mathbf{V}|^2 + \frac{1}{|\mathbf{r}_1|}(U^2 + U_1^2 + U_2^2) + K_1^2 + K_2^2 + K^2, \tag{3.16}$$

где

$$U^2 = -\frac{k}{|\mathbf{R}|}, \quad U_i^2 = -k_i\left(\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_i|} - \frac{(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i)}{|\mathbf{R}_i|^3}\right), \tag{3.17}$$

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{|\mathbf{r}_1|}\bar{\mathbf{r}}_i \qquad (i = 1, 2),$$

$$K_1^2 = -(\boldsymbol{\Omega}, [\mathbf{R}, \mathbf{V}]), \tag{3.18}$$

$$K^2 = K^2(\mathbf{R}, t) = K^1(|\mathbf{r}_1|\mathbf{R}, t). \tag{3.19}$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{R}_1^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0). \tag{3.20}$$

3.4. Относительная система координат. Следующим каноническим преобразованием введем подвижную систему координат. Пусть функция

$$S_3 = ((\mathbf{p} + \boldsymbol{\xi}(t)), \quad (\mathbf{R} - \boldsymbol{\eta}(t))) \tag{3.21}$$

задает каноническое преобразование $\mathbf{R}, \mathbf{V} \to \mathbf{q}, \mathbf{p}$. В (3.21) $\boldsymbol{\xi}(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$ — пока неопределенные функции времени. Запишем преобразование $\mathbf{R}, \mathbf{V} \to \mathbf{q}, \mathbf{p}$ в явном виде:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{q}, \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{p}. \tag{3.22}$$

Нетрудно вычислить

$$K_3^3 = \frac{\partial S_3}{\partial t} = \left(\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}, \mathbf{q}\right) - \left(\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt}, \mathbf{p}\right). \tag{3.23}$$

После преобразования (3.22) гамильтониан задачи будет иметь вид

$$H^3 = \frac{1}{2|\mathbf{r}_1|^2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{|\mathbf{r}_1|^2}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{p}) + \frac{1}{|\mathbf{r}_1|}(U^3 + U_1^3 + U_2^3) + K_1^3 + K_2^3 + \\ + K_3^3 + K^3. \tag{3.24}$$

Здесь

$$U^3 = -\frac{k}{|\boldsymbol{\eta} + \mathbf{q}|}, \quad U_i^3 = -k_i\left[\frac{1}{|\mathbf{R}_i - \boldsymbol{\eta} - \mathbf{q}|} - \frac{(\mathbf{R}_i, \mathbf{q})}{|\mathbf{R}_i|^3}\right] \qquad (i = 1, 2), \tag{3.25}$$

$$K_1^3 = -(\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p}]) - (\boldsymbol{\Omega}, [\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}]) - (\boldsymbol{\Omega}, [\mathbf{q}, \mathbf{p}]), \tag{3.26}$$

$$K_2^3 = \frac{1}{2}|\mathbf{r}_1'|\frac{d^2|\mathbf{r}_1|}{dt^2}(|\mathbf{q}|^2 + 2(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{q})), \tag{3.27}$$

$$K^3 = K^3(\mathbf{q}, t) \equiv K^2(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{q}, t).$$

Здесь и ниже мы опускаем в гамильтониане слагаемые, не зависящие от $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, и условно сохраняем знак равенства.

3.5. Разложение функции Гамильтона. Теперь предположим, что $\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{p} = 0$ является решением уравнений с гамильтониа-

ном H^3. Это означает, что ξ и η должны быть выбраны таким образом, чтобы разложение H^3 в ряд по $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ начиналось с квадратичных членов относительно компонент векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$. В дальнейшем мы будем интересоваться движениями при достаточно малых $|\mathbf{q}|$, $|\mathbf{p}|$. Для получения явного представления H^3 проведем разложение составляющих H^3 в ряд по $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$. При этом будем использовать следующие формулы [18], справедливые для $|\mathbf{b}| < |\mathbf{a}|$:

$$\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\right)^n P_n(x), \tag{3.28}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\right)^n P'_{n+1}(x), \tag{3.29}$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра,

$$P'_{n+1}(x) = \frac{dP_{n+1}(x)}{dx}, \quad x = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Используя (3.28) и (3.29), получим

$$U^3 = \frac{k}{|\boldsymbol{\eta}|^3}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}) - \frac{k}{|\boldsymbol{\eta}|}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{|\mathbf{q}|}{|\boldsymbol{\eta}|}\right)^n P_n(z), \tag{3.30}$$

$$U_i^3 = -k_i\left(\frac{(\mathbf{q}, (\mathbf{R}_i - \boldsymbol{\eta}))}{|\mathbf{R}_i - \boldsymbol{\eta}|^3} - \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{R}_i)}{|\mathbf{R}_i|^3}\right) - \\ - \frac{k_i}{|\mathbf{R}_i - \boldsymbol{\eta}|}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{R}_i - \boldsymbol{\eta}|}\right)^n P_n(z_i) \qquad (i = 1, 2), \tag{3.31}$$

где

$$z = \frac{(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta})}{|\mathbf{q}||\boldsymbol{\eta}|}, \quad z_i = \frac{(\mathbf{q}, (\mathbf{R}_i - \boldsymbol{\eta}))}{|\mathbf{q}||\mathbf{R}_i - \boldsymbol{\eta}|}. \tag{3.32}$$

Приравнивая в (3.24) нулю коэффициенты при линейных членах относительно компонент векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$, получим систему дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять вектор-функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$:

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\eta}] - \frac{1}{|\mathbf{r}_1|^2}\boldsymbol{\xi} = 0, \tag{3.33}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\xi}] + |\mathbf{r}_1|\frac{d^2|\mathbf{r}_1|}{dt^2}\boldsymbol{\eta} + \frac{1}{|\mathbf{r}_1|}\left[\frac{k}{|\boldsymbol{\eta}|^3}\boldsymbol{\eta} - k_1\left(\frac{\mathbf{R}_1 - \boldsymbol{\eta}}{|\mathbf{R}_1 - \boldsymbol{\eta}|^3} - \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|^3}\right) - \right. \\ \left. - k_2\left(\frac{\mathbf{R}_2 - \boldsymbol{\eta}}{|\mathbf{R}_2 - \boldsymbol{\eta}|^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3}\right)\right] + \boldsymbol{\alpha} = 0, \tag{3.34}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\partial K^3}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}}_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}. \tag{3.35}$$

Если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют уравнениям (3.33) и (3.34), то гамильтониан задачи можно записать в следующем виде:

$$H^3 = \frac{1}{2|\mathbf{r}_1|^2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{|\mathbf{r}_1|}(U^3 + U_1^3 + U_2^3) + K_1^3 + K_2^3 + K^3, \quad (3.36)$$

где

$$U^3 = -\frac{k}{|\eta|}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{|\mathbf{q}|}{|\eta|}\right)^n P_n(z), \quad (3.37)$$

$$U_i^3 = -\frac{k_i}{|\mathbf{R}_i - \eta|}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{R}_i - \eta|}\right)^n P_n(z_i), \quad (3.38)$$

величины z, z_i определены равенствами (3.32), а

$$K_1^3 = -(\Omega, [\mathbf{q}, \mathbf{p}]), \quad (3.39)$$

$$K_2^3 = \frac{1}{2}|\mathbf{r}_1|\frac{d^2|\mathbf{r}_1|}{dt^2}|\mathbf{q}|^2, \quad (3.40)$$

$$K^3 = K^3 - (\alpha, \mathbf{q}). \quad (3.41)$$

3.6. Уравнения движения Луны. Рассмотрим теперь задачу о движении Луны. Она описывается гамильтонианом

$$H^* = \frac{1}{2}|\mathbf{v}_1|^2 - \frac{k + k_1}{|\mathbf{r}_1|} - k_2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2|^3}\right) + K^*, \quad (3.42)$$

где компоненты векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_1$ — канонически сопряженные переменные, K^* — потенциал сил, которые действуют на Луну, помимо учтенных сил гравитационного взаимодействия Луны и Земли и возмущающих сил от Солнца.

Гамильтониан (3.42) мы можем формально получить из гамильтониана (3.1), если в (3.1) положим $k_1 = 0$ и заменим $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}_1$, k на $k + k_1$, а K на K^*.

Если мы проведем последовательно все указанные выше канонические преобразования и положим $\eta = \mathbf{R}_1$, $\xi = \mathbf{V}_1$, то ξ и η должны удовлетворять уравнениям (3.33) и (3.34), если в них положить $k_1 = 0$, $k = k + k_1$, $K^3 = K^{*3}$. Таким образом, $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{V}_1$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$[\Omega, \mathbf{R}_1] - \frac{1}{|\mathbf{r}_1|^2}\mathbf{V}_1 = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{d\mathbf{V}_1}{dt} + [\Omega, \mathbf{V}_1] + |\mathbf{r}_1|\frac{d^2|\mathbf{r}_1|}{dt^2}\mathbf{R}_1 + \\ + \frac{1}{|\mathbf{r}_1|}\left\{\frac{k + k_1}{|\mathbf{R}_1|^3}\mathbf{R}_1 - k_2\left[\frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3}\right]\right\} + \alpha^* = 0. \quad (3.44)$$

При получении уравнения (3.43) учтено, что, согласно (3.20), $d\mathbf{R}_1/dt = 0$. Через α^* в уравнении (3.44) обозначена вектор-функция $(\partial K^{*3}/\partial \mathbf{q})^{\mathrm{T}}$, вычисленная при $\mathbf{q} = 0$.

3.7. «Подвижная точка либрации». Имея в виду дальнейшее изучение движения вблизи точки либрации L_2, преобразуем уравнения (3.33) и (3.34) при помощи замены переменных

$$\eta = (1+\rho)\,\mathbf{R}_1 + \varkappa, \quad \xi = (1+\rho)\,\mathbf{V}_1 + \sigma, \tag{3.45}$$

где ρ — постоянная величина.

Замечание. Поясним представление (3.45). Если положить $\varkappa = \sigma = 0$ и принять в качестве ρ величину $\mu - 1 + \xi^*$, где ξ^* — корень уравнения

$$\xi^* - \frac{1-\mu}{(\xi^*+\mu)^2} - \frac{\mu}{(\xi^*-1+\mu)} = 0, \tag{3.46}$$

а

$$\mu = \frac{k_1}{k+k_1}, \quad 1-\mu = \frac{k}{k+k_1}, \tag{3.47}$$

то $\eta = (1+\rho)\,\mathbf{R}_1$, $\xi = (1+\rho)\,\mathbf{V}_1$ должно быть решением уравнений (3.33), (3.34) в случае эллиптической задачи трех тел, т. е. в случае, когда в этих уравнениях отброшены солнечные члены и члены, связанные с дополнительными возмущениями. Эти решения соответствуют коллинеарным точкам либрации. Из изложенного ниже формального анализа видно, что решение $\varkappa = \sigma = 0$ будет иметь место и при частичном учете солнечных возмущений. (Это приближенное решение мы будем в дальнейшем называть «подвижной точкой либрации».) Тем самым в общем случае оказывается возможным определить решения уравнений (3.33), (3.34) при достаточно малых $|\varkappa|$ и $|\sigma|$.

Прежде чем осуществлять подстановку (3.45), преобразуем некоторые члены уравнения (3.34). Используя (3.29) и (3.45), можно получить следующее представление:

$$\frac{k}{|\eta|^3}\eta = \frac{k}{(1+\rho)^2|\mathbf{R}_1|^3}\mathbf{R}_1 + \mathbf{\Phi}, \tag{3.48}$$

$$-k_1\left(\frac{\mathbf{R}_1-\eta}{|\mathbf{R}_1-\eta|^3} - \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|^3}\right) = k_1\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|^3} + \mathbf{\Phi}_1, \tag{3.49}$$

где

$$\mathbf{\Phi} = \frac{k\varkappa}{|\eta|^3} + \frac{k\mathbf{R}_1}{(1+\rho)^2|\mathbf{R}_1|^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{|\varkappa|}{(1+\rho)|\mathbf{R}_1|}\right)^n P'_{n+1}(z_3), \tag{3.50}$$

$$\mathbf{\Phi}_1 = k_1\left[\frac{\varkappa}{|\mathbf{R}_1-\eta|^3} + \frac{\mathbf{R}_1}{\rho^2|\mathbf{R}_1|^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{|\varkappa|}{\rho|\mathbf{R}_1|}\right)^n P'_{n+1}(z_3)\right], \tag{3.51}$$

$$z_3 = \frac{(\varkappa, \mathbf{R}_1)}{|\varkappa|\,|\mathbf{R}_1|}. \tag{3.52}$$

Далее преобразуем в уравнениях (3.34) и (3.44) члены, описывающие солнечные возмущения. Имеем

$$\mathbf{X} = -k_2\left(\frac{\mathbf{R}_2-\eta}{|\mathbf{R}_2-\eta|^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3}\right) = \mathbf{X}_0 + \widetilde{\mathbf{X}}. \tag{3.53}$$

где

$$\mathbf{X}_0 = \frac{k_2}{|\mathbf{R}_2|^3}\left(\boldsymbol{\eta} - 3\,\frac{(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{R}_2)\,\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^2}\right), \tag{3.54}$$

$$\widetilde{\mathbf{X}} = -\frac{k_2}{|\mathbf{R}_2|^2}\left[\frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{|\boldsymbol{\eta}|}{|\mathbf{R}_2|}\right)^n P'_{n+1}(z_4) - \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\mathbf{R}_2|}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\boldsymbol{\eta}|}{\mathbf{R}_2}\right)^n P'_{n+1}(z_4)\right], \tag{3.55}$$

$$z_4 = \frac{(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{R}_2)}{|\boldsymbol{\eta}|\,|\mathbf{R}_2|}. \tag{3.56}$$

Аналогично,

$$\mathbf{Y} = -k_2\left(\frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3}\right) = \mathbf{Y}_0 + \widetilde{\mathbf{Y}}, \tag{3.57}$$

$$\mathbf{Y}_0 = \frac{k_2}{|\mathbf{R}_2|^3}\left(\mathbf{R}_1 - 3\,\frac{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)\,\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^2}\right), \tag{3.58}$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}} = -\frac{k_2}{|\mathbf{R}_2|^2}\left[\frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{|\mathbf{R}_1|}{|\mathbf{R}_2|}\right)^n P'_{n+1}(z_5) - \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2|}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\mathbf{R}_1|}{|\mathbf{R}_2|}\right)^n P'_{n+1}(z_5)\right], \tag{3.59}$$

$$z_5 = \frac{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}{|\mathbf{R}_1|\,|\mathbf{R}_2|}. \tag{3.60}$$

Из соотношений (3.53) — (3.60) следует, что $\mathbf{X}$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{X} = (1+\rho)\,\mathbf{Y} + \boldsymbol{\Phi}_2, \tag{3.61}$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}_2 = \frac{k_2}{|\mathbf{R}_2|^3}\left(\boldsymbol{\varkappa} - 3\,\frac{(\boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{R}_2)\,\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3}\right) + \widetilde{\mathbf{X}} - (1+\rho)\,\widetilde{\mathbf{Y}}. \tag{3.62}$$

Подставим теперь $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$ в виде (3.45) в уравнение (3.33). В результате получим

$$(1+\rho)\left\{[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{R}_1] - \frac{1}{|\mathbf{r}_1|^2}\mathbf{V}_1\right\} + \frac{d\boldsymbol{\varkappa}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\varkappa}] - \frac{1}{|\mathbf{r}_1|^2}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \tag{3.63}$$

Из (3.43) следует, что фигурная скобка в (3.63) тождественно равна нулю. Поэтому из (3.63) получаем такое уравнение:

$$\frac{d\boldsymbol{\varkappa}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\varkappa}] - \frac{1}{|\mathbf{r}_1|^2}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \tag{3.64}$$

Преобразуем теперь уравнение (3.34), используя представления (3.48), (3.49) и (3.61). Получаем

$$\left\{(1+\rho)\left[\frac{d\mathbf{V}_1}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}_1] + |\mathbf{r}_1|\frac{d^2|\mathbf{r}_1|}{dt^2}\mathbf{R}_1 + \boldsymbol{\alpha}^*\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{|\mathbf{r}_1|}\left[\frac{\mu\mathbf{R}_1}{(1+\rho)^2|\mathbf{R}_1|^3} + \mu_1\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{R}_1|^3} + (1+\rho)\,\mathbf{Y}\right]\right\} + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\sigma}] +$$
$$+ |\mathbf{r}_1|\frac{d^2|\mathbf{r}_1|}{dt^2}\boldsymbol{\varkappa} + \frac{1}{|\mathbf{r}_1|}(\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2) + \boldsymbol{\alpha} - (1+\rho)\,\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{0}. \tag{3.65}$$

Если ρ удовлетворяет соотношению

$$\frac{k}{(1+\rho)^3}+\frac{k_1(1+\rho^2)}{(1+\rho)\rho^2}=k+k_1, \tag{3.66}$$

то, согласно (3.44), фигурная скобка в (3.65) обращается в нуль и тогда получаем уравнение

$$\frac{d\sigma}{dt}+[\Omega,\sigma]+|\mathbf{r}_1|\frac{d^2|\mathbf{r}_1|}{dt^2}\varkappa+$$
$$+\frac{1}{|\mathbf{r}_1|}(\Phi+\Phi_1+\Phi_2)+\alpha-(1+\rho)\alpha^*=0. \tag{3.67}$$

Вместе с уравнением (3.64) это уравнение образует систему для определения вектор-функций $\varkappa$ и σ.

Отметим, что уравнение (3.66) после замены (3.47) переходит в традиционное уравнение (3.46), определяющее положение точки либрации L_2 в эллиптической ограниченной задаче трех тел.

В результате проведенных выше преобразований задача определения движения в окрестности точки либрации в точной постановке сводится к необходимости последовательного интегрирования сначала системы уравнений (3.64), (3.67) (задача I), а после определения $\varkappa(t)$, $\sigma(t)$ — к интегрированию системы уравнений с гамильтонианом H^3 (3.36) (задача II).

Фактически тем самым шестимерная задача сведена к задаче определения двенадцати функций: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\varkappa$, σ. Однако задачи I и II неравноправны. При решении задачи I достаточно определить на рассматриваемом интервале времени произвольное решение с достаточно малыми $|\varkappa|$ и $|\sigma|$. А для задачи II необходимо иметь представление о поведении всех решений при достаточно малых $|\mathbf{p}|$ и $|\mathbf{q}|$.

Из анализа уравнений (3.64), (3.67) и входящих в него соотношений следует, что если пренебречь в этих уравнениях членами порядка $k_2/|\mathbf{R}_2|^4$ и дополнительными возмущениями, то в качестве решений этих уравнений можно принять $\sigma=\varkappa=0$. В частности, такое решение точно существует в эллиптической задаче трех тел. Оценки близости главного приближения ($\sigma=\varkappa=0$) к решению уравнений (3.64), (3.67) проведены в следующем параграфе.

§ 4. Некоторые оценки

4.1. Оценки ускорений, действующих на КА. Для выбора и обоснования физической модели движения КА нам потребуется провести оценки реально действующих ускорений в окрестности точки L_2 системы Земля — Луна. Воспользовавшись формулами (3.36) — (3.39), можно оценить ускорения, вызываемые различ-

ными факторами в относительном движении КА, описываемом функцией Гамильтона (3.36). Эти ускорения зависят от величины $|\mathbf{q}|$. Приведенные в табл. 20 числовые значения получены для $|\mathbf{q}| \simeq 10^{-2}$, что соответствует орбитам КА, удаленным от точки L_2 примерно на 4000 *км*.

Оценка для ускорения от сил светового давления получена для отношения площади поперечного сечения КА к его массе, равного 0,05 $м^2/кг$; оценки влияния сжатия Земли, Луны и притяжения планет дают величину, меньшую, чем 10^{-10} $м/сек^2$.

Таблица 20

Действующий фактор	Порядок относительного ускорения КА ($м/сек^2$)
Притяжение Луны ($\sim \widetilde{U}_1^3$)	10^{-3}
Притяжение Земли ($\sim \widetilde{U}^3$)	10^{-4}
Неинерциальность системы координат ($\sim K_2^3$)	10^{-1}
Притяжение Солнца ($\sim \widetilde{U}_2^3$)	10^{-6}
Часть «косвенного» влияния Солнца ($\sim \beta$ из $\widetilde{K}_1^3$)	10^{-7}
Световое давление ($\sim \widetilde{K}^3$)	10^{-7}

Для описания движения КА, кроме зависимостей $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{p}(t)$, необходимо найти решение уравнений (3.64) и (3.67), определяющих движение относительной системы координат. Эти уравнения имеют приближенное решение $\varkappa = \sigma = \mathbf{0}$, которое мы называем «подвижной точкой либрации». Степень его приближенности определяется малыми ускорениями, обусловленными влиянием Солнца ($\sim \Phi_2$) и другими возмущениями ($\sim \alpha$ и α^*). Оценки показывают, что эти ускорения имеют порядок 10^{-6} $м/сек^2$ для сил светового давления, 10^{-8} $м/сек^2$ для сил гравитационного притяжения Солнца и они много меньше 10^{-10} $м/сек^2$ для остальных возмущающих факторов.

4.2. Вынужденные колебания КА вблизи «подвижной точки либрации», обусловленные гравитационными солнечными возмущениями. Найдем частное решение уравнений (3.64) и (3.67), определяющее вынужденные колебания КА, близкие к «подвижной точке либрации». Аналогичная задача о вынужденных колебаниях в случае плоской задачи при учете гравитационных солнечных возмущений рассмотрена в работе [162]. Для проведения исследования вынужденных колебаний удобно исключить из уравнений (3.64), (3.67) величину σ и рассмотреть получающееся при этом

дифференциальное уравнение для вектор-функции $\varkappa$

$$|\mathbf{r}_1|^2\frac{d^2\varkappa}{dt^2}+2|\mathbf{r}_1|\frac{d|\mathbf{r}_1|}{dt}\frac{d\varkappa}{dt}+2|\mathbf{r}_1|^2\left[\boldsymbol{\Omega},\frac{d\varkappa}{dt}\right]+$$

$$+2|\mathbf{r}_1|\frac{d|\mathbf{r}_1|}{dt}[\boldsymbol{\Omega},\varkappa]+|\mathbf{r}_1|^2\left[\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt},\varkappa\right]+|\mathbf{r}_1|\frac{d^2|\mathbf{r}_1|}{dt^2}\varkappa+$$

$$+|\mathbf{r}_1|^2[\boldsymbol{\Omega},[\boldsymbol{\Omega}\varkappa,]]+\frac{1}{|\mathbf{r}_1|}(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2)+\boldsymbol{\alpha}-(1+\rho)\boldsymbol{\alpha}^*=0. \quad (4.1)$$

Для приближенного вычисления вынужденных колебаний КА пренебрежем нецентральностью гравитационных полей Луны и Земли, а также всеми негравитационными возмущениями, положив в (4.1) величины $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}^*$ тождественно равными нулю. Орбиты Луны и Земли будем предполагать круговыми. Продолжительности сидерического и синодического месяцев примем соответственно равными 27,3216614 и 29,5305887 *сут* [23]. Это соответствует таким средним угловым скоростям Луны и Земли: $n = 0{,}229970836$ *рад/сут* и $n' = 0{,}0172021243$ *рад/сут*. Отсюда

$$m = n'/n = 0{,}0748013296.$$

Большие полуоси (в нашем случае радиусы) орбит Луны и Земли примем соответственно такими: $a = 384\,400$ *км*, $a' = 149\,600\,000$ *км*. Следовательно, отношение больших полуосей орбит Луны и Земли имеет такую величину: $\frac{a}{a'} = 0{,}00256951872 = 0{,}459\ m^2$.

Перейдем к независимой переменной $\tau = n(t - t_0)$ и разложим левую часть уравнения (4.1) в ряд по степеням компонент $\varkappa^{(i)}$ вектор-функции $\varkappa$. Тогда, сохраняя для дальнейшего только свободные члены и члены, линейные относительно $\varkappa^{(i)}$, и учитывая сделанные выше предположения, получим из (4.1) линейное уравнение

$$\frac{d^2\varkappa}{d\tau^2}+2\left[\boldsymbol{\Omega},\frac{d\varkappa}{d\tau}\right]+[\boldsymbol{\Omega},[\boldsymbol{\Omega},\varkappa]]+A_2(\varkappa-3\mathbf{R}_1(\varkappa,\mathbf{R}_1))=$$

$$=\frac{3}{4}\rho(1+\rho)m^2\frac{a}{a'}\left[\frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|}(5\cos 2\varphi_1+3)-4\mathbf{R}_1\cos\varphi_1\right]. \quad (4.2)$$

В коэффициентах левой части уравнения (4.2) отброшены величины порядка m^2 и выше, а в правой части сохранены только главные члены, определяющие вынужденные колебания, и отброшены величины порядка $m^2(a/a')^2$ и выше. Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ в (4.2) таков, что $\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = (0, 0, 1)$. Через φ_1 в (4.2) обозначен угол $\varphi_1 = \lambda - \lambda'$, где λ и λ' — средние долготы Луны и Солнца в орбите [23]:

$$\lambda(t) = \tau + \lambda(t_0),\quad \lambda' = m\tau + \lambda'(t_0). \quad (4.3)$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\mathbf{R}_2^{\mathrm{T}}}{|\mathbf{R}_2|} = (\cos\varphi_1, -\sin\varphi_1, -\sin i\sin\varphi_2), \quad (4.4)$$

где i — наклонение плоскости орбиты Луны к эклиптике ($i = 0{,}0898020382$), а через φ_2 обозначен угол $\lambda' - \overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega}$ — долгота восходящего узла орбиты Луны, причем [23]

$$\overline{\Omega}(t) = -\frac{3}{4}m^2\tau + \Omega(t_0). \tag{4.5}$$

В координатной форме уравнение (4.2) запишется в виде

$$\frac{d^2\varkappa^{(1)}}{d\tau^2} - 2\frac{d\varkappa^{(2)}}{d\tau} - (2A_2 + 1)\varkappa^{(1)} = \\ = \frac{3}{8}\rho(1+\rho)m^2\left(\frac{a}{a'}\right)(3\cos\varphi_1 + 5\cos 3\varphi_1).$$

$$\frac{d^2\varkappa^{(2)}}{d\tau^2} + 2\frac{d\varkappa^{(1)}}{d\tau} - (1 - A_2)\varkappa^{(2)} = -\frac{3}{8}\rho(1+\rho)m^2\left(\frac{a}{a'}\right)(\sin\varphi_1 + 5\sin 3\varphi_1).$$

$$\frac{d^2\varkappa^{(3)}}{d\tau^2} + A_2\varkappa^{(3)} = \\ = -\frac{3}{8}\rho(1+\rho)m^2\left(\frac{a}{a'}\right)\sin i[6\sin\varphi_2 + 5\sin(2\varphi_1 + \varphi_2) - 5\sin(2\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{4.6}$$

Для отношения масс Земли и Луны, равного 81,3, имеем

$$\rho = 0{,}167833148, \quad A_2 = 3{,}19042360.$$

Вынужденные колебания в линейной системе (4.6) находятся очень просто. Получаем такие значения для $\varkappa^{(i)}$ (в *км*):

$$\begin{aligned} \varkappa^{(1)} &= -0{,}06\cos\varphi_1 - 0{,}43\cos 3\varphi_1, \\ \varkappa^{(2)} &= -0{,}39\sin\varphi_1 + 0{,}80\sin 3\varphi_1, \\ \varkappa^{(3)} &= -0{,}07\sin\varphi_2 + 0{,}34\sin(2\varphi_1 + \varphi_2) + 3{,}5\sin(2\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3. Вынужденные колебания КА, обусловленные силами светового давления. Аналогично можно вычислить вынужденные колебания КА вблизи «подвижной точки либрации», вызванные силами светового давления Солнца.

Потенциал K (см. п. 3.1 предыдущего параграфа) возмущающих сил светового давления имеет вид

$$K = \varepsilon\,|\,\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}\,|\,, \tag{4.8}$$

где $\varepsilon = (F/m)\,\gamma q_0$, F и m — характерная площадь поперечного сечения и масса КА соответственно, величина γ характеризует отражающие свойства поверхности КА, q_0 — величина светового давления на орбите Земли, $q_0 = 0{,}441315\cdot 10^{-5}$ *кг*/(*м*·*сек*^{2}). Для дальнейших расчетов примем отношение F/m равным 0,05 *м*^{2}/*кг*, а величину γ считаем равной 2 (т. е. поверхность КА считается зеркально-отражающей).

Проведя последовательно преобразования пп. 3.2—3.5, 3.7 и 4.2, получим уравнение (4.1), в котором

$$\alpha = -\varepsilon |\mathbf{r}_1(t)| \frac{\mathbf{R}_2 - \eta(t)}{|\mathbf{R}_2 - \eta(t)|}. \qquad (4.9)$$

Величина α^* в уравнении (4.1) полагается равной нулю, так как величина F/m для Луны пренебрежимо мала. Это означает, что влиянием светового давления на орбиту Луны мы пренебрегаем. Проведя выкладки, аналогичные выкладкам предыдущего пункта, получим, что обусловленные световым давлением вынужденные колебания КА вблизи «подвижной точки либрации» приближенно описываются линейным дифференциальным уравнением (4.2), если правую часть последнего заменить на вектор-функцию $\varepsilon/an^2 \cdot \mathbf{R}_2/|\mathbf{R}_2|$. При этом отброшенные в правой части члены будут примерно в (a/a') раз меньше оставленных.

Вычисления показывают, что при сделанных предположениях вынужденные колебания записываются в виде (амплитуды пересчитаны в *км*)

$$\varkappa^{(1)} = 2{,}22 \cos \varphi_1, \quad \varkappa^{(2)} = -43{,}46 \sin \varphi_1, \quad \varkappa^{(3)} = -1{,}75 \sin \varphi_2. \qquad (4.10)$$

Проведенные оценки дают возможность выявить наиболее существенные факторы и отбросить второстепенные. Для целей предварительного анализа траекторий движения КА в § 2 была использована простейшая модель линеаризованной в окрестности L_2 круговой ограниченной задачи трех тел. Для более точного описания пассивного движения КА необходимо в первую очередь учесть нелинейность задачи по отклонениям от равновесной точки и эллиптичность орбиты Луны. В следующем параграфе будет рассмотрена нелинейная задача о движении КА в окрестности L_2 в рамках эллиптической ограниченной задачи трех тел (Земля — Луна — КА) без учета возмущающего влияния Солнца и других внешних факторов. Эта задача имеет и самостоятельный интерес. Ее решение можно положить в основу алгоритма расчета пассивного движения КА в окрестности L_2.

§ 5. Эллиптическая задача

5.1. Предварительное преобразование гамильтониана. Для дальнейшего исследования сделаем следующие упрощающие предположения:

1) В задаче учитываются только гравитационные силы, причем поля тяготения Земли и Луны центральные. При этом функции K в (3.1), K^* в (3.42) тождественно равны нулю и вместе с ним тождественно равны нулю $\bar{K}^{(3)}$ в (3.36), α и α^* в (3.67).

2) Пренебрежем возмущающим влиянием Солнца, положив в уравнениях движения $K_2 = 0$. Тогда из (3.7) следует, что

$\beta(t) \equiv 0$ и из соотношений (3.9) и (3.43) получаем

$$\Omega^{\mathrm{T}} = (0, 0, \omega(t)), \quad \mathbf{V}_1^{\mathrm{T}} = (0, \omega(t) \mid \mathbf{r}_1(t) \mid^2, 0). \tag{5.1}$$

Проектируя теперь левую часть уравнения (3.44) на оси ординат и абсцисс, получаем соответственно такие скалярные уравнения:

$$\frac{d(\omega(t) \mid \mathbf{r}_1(t) \mid^2)}{dt} = 0, \tag{5.2}$$

$$\mid \mathbf{r}_1(t) \mid \frac{d^2 \mid \mathbf{r}_1(t) \mid}{dt^2} + \frac{k + k_1}{\mid \mathbf{r}_1(t) \mid} - \omega^2(t) \mid \mathbf{r}_1(t) \mid^2 = 0. \tag{5.3}$$

Из уравнения (5.2) следует интеграл площадей

$$\omega(t) \mid \mathbf{r}_1(t) \mid^2 = \mid \mathbf{c}_1 \mid \quad (\mid \mathbf{c}_1 \mid = \text{const}), \tag{5.4}$$

а решение уравнения (5.3) определяет эллиптическое движение Луны

$$\mid \mathbf{r}_1(t) \mid = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\nu}, \tag{5.5}$$

где a и e – большая полуось и эксцентриситет орбиты,

$$a(1 - e^2)(k + k_1) = \mid \mathbf{c}_1 \mid^2, \tag{5.6}$$

переменная ν — истинная аномалия эллиптического движения Луны:

$$\frac{d\nu}{dt} = \omega(t) = \frac{\mid \mathbf{c}_1 \mid}{\mid \mathbf{r}_1(t) \mid^2}. \tag{5.7}$$

Нетрудно проверить, что при сделанных выше двух предположениях уравнения (3.64) и (3.67) удовлетворяются решениями $\varkappa \equiv 0$, $\sigma \equiv 0$. Таким образом, мы приходим к задаче о движении тела пренебрежимо малой массы вблизи коллинеарной точки либрации L_2 эллиптической ограниченной задачи трех тел. Эта задача описывается функцией Гамильтона (3.36), в которой надо положить

$$\eta = (1 + \rho)\mathbf{R}_1, \quad K_2 = 0, \quad \tilde{K}^3 = 0, \quad \Omega^{\mathrm{T}} = \left(0, 0, \frac{d\nu}{dt}\right). \tag{5.8}$$

Используя соотношение (5.7), введем новую независимую переменную — истинную аномалию ν и вместо вектора $\mathbf{p}$ (компоненты которого имеют размерность константы площадей) безразмерный вектор $\tilde{\mathbf{p}}$ согласно следующим формулам канонического преобразования $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$:

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{p} = \mid \mathbf{c}_1 \mid \tilde{\mathbf{p}}. \tag{5.9}$$

Тогда гамильтониан задачи запишется в таком виде:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \mid \tilde{\mathbf{p}} \mid^2 + \frac{1}{1 + e\cos\nu}(\tilde{U} + \tilde{U}_1) + \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2, \tag{5.10}$$

$$\tilde{U} = -\frac{1 - \mu}{1 + \rho} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\mid \tilde{\mathbf{q}} \mid}{1 + \rho}\right)^n P_n(\tilde{z}), \tag{5.11}$$

$$\widetilde{U}_1 = -\frac{\mu}{\rho}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{|\widetilde{\mathbf{q}}|}{\rho}\right)^n P_n(\tilde{z}_1). \tag{5.12}$$

Величины μ и ρ определены равенствами (3.46), (3.47):

$$\tilde{z} = \frac{(\widetilde{\mathbf{q}}, \mathbf{R}_1)}{|\widetilde{\mathbf{q}}|\,|\mathbf{R}_1|}, \qquad \tilde{z}_1 = -\frac{(\widetilde{\mathbf{q}}, \mathbf{R}_1)}{|\widetilde{\mathbf{q}}|\,|\mathbf{R}_1|} = -\tilde{z}, \tag{5.13}$$

$$\widetilde{K}_1 = -(\widetilde{\Omega}, [\widetilde{\mathbf{q}}, \widetilde{\mathbf{p}}]), \quad \widetilde{\Omega}^{\mathrm{T}} = (0, 0, 1), \tag{5.14}$$

$$\widetilde{K}_2 = \frac{e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}|\widetilde{\mathbf{q}}|^2. \tag{5.15}$$

Ниже используются следующие обозначения для компонент векторов $\widetilde{\mathbf{q}}$ и $\widetilde{\mathbf{p}}$:

$$\widetilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} = (\widetilde{q}^{(1)}, \widetilde{q}^{(2)}, \widetilde{q}^{(3)}), \quad \widetilde{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}} = (\widetilde{p}^{(1)}, \widetilde{p}^{(2)}, \widetilde{p}^{(3)}),$$

а также обозначение для вектора $\mathbf{x}$, составленного из компонент векторов $\widetilde{\mathbf{q}}$, $\widetilde{\mathbf{p}}$:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (\widetilde{q}^{(1)}, \widetilde{q}^{(2)}, \widetilde{p}^{(1)}, \widetilde{p}^{(2)}, \widetilde{q}^{(3)}, \widetilde{p}^{(3)}), \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{|\widetilde{\mathbf{q}}|^2 + |\widetilde{\mathbf{p}}|^2}.$$

Мы интересуемся движениями, для которых КА не покидает достаточно малую окрестность точки L_2. Будем поэтому считать $q^{(i)}$, $p^{(i)}$ малыми величинами, причем малыми первого порядка. Гамильтониан (5.10) содержит еще один малый параметр — эксцентриситет e орбиты Луны. Его считаем величиной первого порядка малости. Дальнейшие преобразования основаны на предполагаемой малости величин $|\mathbf{x}|$ и e. Поэтому целесообразно представить гамильтониан в виде суммы

$$\widetilde{H} = \sum_{m=2}^{\infty}\widetilde{H}_m, \quad \text{где} \quad \widetilde{H}_m \sim |\mathbf{x}|^m.$$

Функции $\widetilde{H}_m$ можно представить в виде рядов по степеням эксцентриситета e

$$\widetilde{H}_m = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cos^k\nu \widetilde{H}_m^{(k)}, \tag{5.16}$$

где $\widetilde{H}_m^{(k)}$ не зависят от e и ν. Обозначим

$$A_m = \frac{1-\mu}{(1+\rho)^{m+1}} + \frac{\mu}{\rho^{m+1}}. \tag{5.17}$$

Используя выражение для гамильтониана (5.10) и формулы (5.11)—(5.15), нетрудно показать, что функции $\widetilde{H}_m^{(k)}$ имеют следующий вид:

при $m = 2$

$$\tilde{H}_2^{(0)} = \frac{1}{2}|\tilde{\mathbf{p}}|^2 - A_2|\tilde{\mathbf{q}}|^2 P_2\left(\frac{\tilde{q}^{(1)}}{|\tilde{\mathbf{q}}|}\right) - (\tilde{q}^{(1)}\tilde{p}^{(2)} - \tilde{q}^{(2)}\tilde{p}^{(1)}), \quad (5.18)$$

$$\tilde{H}_2^{(k\geqslant 1)} = (-1)^{k+1}\left\{A_2|\tilde{\mathbf{q}}|^2 P_2\left(\frac{\tilde{q}^{(1)}}{|\tilde{\mathbf{q}}|}\right) + \frac{1}{2}|\tilde{\mathbf{q}}|^2\right\}; \quad (5.19)$$

при $m > 2$

$$\tilde{H}_m^{(k)} = (-1)^{m+k+1} A_m |\tilde{\mathbf{q}}|^m P_m\left(\frac{\tilde{q}^{(1)}}{|\tilde{\mathbf{q}}|}\right). \quad (5.20)$$

Используемый нами метод состоит в нахождении нормальной формы гамильтониана (5.10) и соответствующего нормализующего преобразования. Общее решение системы, описываемой функцией Гамильтона, имеющей нормальную форму, может быть найдено в замкнутом виде. Зная нормализующее преобразование и преобразование, обратное ему, легко получить приближенные значения начальных координат и компонент вектора скорости, реализующих интересующие нас движения, близкие L_2.

Нормальную форму гамильтониана (5.10) можно в принципе получить в сколь угодно высоком приближении относительно малых параметров. Мы ограничимся получением решения с точностью до величин третьего порядка малости относительно начальных значений координат $\tilde{q}^{(i)}$ и импульсов $\tilde{p}^{(i)}$ и величины эксцентриситета e. Для этого нормальную форму гамильтониана следует получить с точностью до величин четвертого порядка малости включительно. Это означает, что при нормализации квадратичной части $\tilde{H}_2$ гамильтониана (5.10) надо учесть степени эксцентриситета до второй включительно; при нормализации членов третьего порядка $\tilde{H}_3$ — до первой степени e, а при нормализации совокупности членов четвертого порядка $\tilde{H}_4$ величиной эксцентриситета можно пренебречь. Формы $\tilde{H}_m$ для $m \geqslant 5$ также можно не рассматривать.

5.2. Нормализация квадратичной части гамильтониана. Для получения нормальной формы функции Гамильтона (5.10) и соответствующего нормализующего преобразования надо сначала произвести нормализацию квадратичной части $\tilde{H}_2$. Последовательность действий будет такой: 1) нормализация $\tilde{H}_2^{(0)}$, 2) исключение из гамильтониана $\tilde{H}_2$ членов, пропорциональных e, 3) исключение членов, пропорциональных e^2.

Проведем нормализацию $\tilde{H}_2^{(0)}$. Для переменных $\tilde{q}^{(3)}$, $\tilde{p}^{(3)}$ нормализующая замена переменных имеет вид

$$\tilde{q}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} q'^{(3)}, \quad \tilde{p}^{(3)} = \sqrt{\lambda_3}\, p'^{(3)}. \quad (5.21)$$

Нахождение канонического нормализующего преобразования для переменных $\tilde{q}^{(i)}$, $\tilde{p}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, соответствующих плоской задаче,

более сложно. После проведения некоторых вычислений (см. работу [39]) получим, что преобразование $\tilde{q}^{(i)}$, $\tilde{p}^{(i)} \to q'^{(i)}$, $p'^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, приводящее к нормальной форме часть гамильтониана $\bar{H}_2^{(0)}$, соответствующую плоской задаче, имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \tilde{q}^{(1)} \\ \tilde{q}^{(2)} \\ \tilde{p}^{(1)} \\ \tilde{p}^{(2)} \end{Vmatrix} = \mathbf{B}_0 \begin{Vmatrix} q'^{(1)} \\ q'^{(2)} \\ p'^{(1)} \\ p'^{(2)} \end{Vmatrix}. \tag{5.22}$$

где элементы b_{ij} симплектической матрицы $\mathbf{B}_0$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &b_{11} = -\varkappa_1[\lambda_1^2 + (A_2 - 1)],\ b_{12} = -2\varkappa_2\lambda_2,\ b_{13} = -b_{11},\ b_{14} = 0,\\ &b_{21} = 2\varkappa_1\lambda_1,\ b_{22} = 0,\ b_{23} = b_{21},\ b_{24} = -\varkappa_2[\lambda_2^2 + (2A_2 + 1)],\\ &b_{31} = -\varkappa_1\lambda_1[\lambda_1^2 + (A_2 + 1)],\ b_{32} = 0,\ b_{33} = b_{31},\\ &b_{34} = -\varkappa_2[\lambda_2^2 - (2A_2 + 1)],\\ &b_{41} = \varkappa_1[\lambda_1^2 - (A_2 - 1)],\ b_{42} = \varkappa_2\lambda_2[\lambda_2^2 + (2A_2 - 1)],\\ &b_{43} = -b_{41},\ b_{44} = 0. \end{aligned} \tag{5.23}$$

В (5.23) введены такие обозначения:

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1[(3A_2 - 4)\lambda_1^2 + (3A_2 + 4)(A_2 - 1)]}},$$

$$\varkappa_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2[(3\lambda_2 + 4)\lambda_2^2 + (3A_2 - 4)(2A_2 + 1)]}}.$$

После проведения преобразований (5.21) и (5.22) нужно при помощи канонической, 2π-периодической по ν, линейной замены переменных $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}' \to \mathbf{q}''$, $\mathbf{p}''$ исключить из гамильтониана $\bar{H}_2$ члены, содержащие эксцентриситет e с точностью до второй степени включительно. Нахождение этого преобразования совершенно аналогично соответствующим рассмотрениям глав 9 и 10, где подробно описана нормализация функции Гамильтона в окрестности треугольной точки либрации. Поэтому мы не будем здесь проводить подробных вычислений, а сразу приведем конечный результат. Замену переменных $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}' \to \mathbf{q}''$, $\mathbf{p}''$ можно представить в виде

$$\begin{Vmatrix} q'^{(1)} \\ q'^{(2)} \\ p'^{(1)} \\ p'^{(2)} \end{Vmatrix} = [\mathbf{E}_4 + e(\sin\nu\mathbf{B}_1 + \cos\nu\mathbf{B}_2) + e^2(\mathbf{B}_3 + \sin 2\nu\mathbf{B}_4 + \cos 2\nu\mathbf{B}_5)] \begin{Vmatrix} q''^{(1)} \\ q''^{(2)} \\ p''^{(1)} \\ p''^{(2)} \end{Vmatrix}, \tag{5.24}$$

$$\begin{Vmatrix} q'^{(3)} \\ p'^{(3)} \end{Vmatrix} = [\mathbf{E}_2 + e(\sin \nu \mathbf{C}_1 + \cos \nu \mathbf{C}_2) + \\ + e^2(\mathbf{C}_3 + \sin 2\nu \mathbf{C}_4 + \cos 2\nu \mathbf{C}_5)] \begin{Vmatrix} q''^{(3)} \\ p''^{(3)} \end{Vmatrix}. \quad (5.25)$$

Здесь $\mathbf{E}_4$ и $\mathbf{E}_2$ — единичные матрицы соответственно четвертого и второго порядков, $\mathbf{B}_k$ и $\mathbf{C}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$ — постоянные матрицы также четвертого и второго порядков. Нормализованная до членов порядка e^2 включительно квадратичная часть функции Гамильтона H_2 имеет вид

$$H_2''(\mathbf{q}'', \mathbf{p}'') = \Lambda_1 q''^{(1)} p''^{(1)} + \frac{1}{2}\Lambda_2 (q''^{2}_{(2)} + p''^{2}_{(2)}) + \frac{1}{2}\Lambda_3 (q''^{2}_{(3)} + p''^{2}_{(3)}), \quad (5.26)$$

где $\Lambda_j = \lambda_j + e^2\lambda_j^{(2)}$. Величины $\lambda_j^{(2)}$, а также элементы матриц $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}_k$, $\mathbf{C}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$, вычисленные для значения $\mu = 0{,}0121506683$, соответствующего отношению масс Земли и Луны, равному 81,3, таковы:

$$\lambda_1^{(2)} = 0{,}549275266, \quad \lambda_2^{(2)} = 0{,}245751053, \quad \lambda_3^{(2)} = 0{,}249484559.$$

Матрица $\mathbf{B}_0$

$$\begin{Vmatrix} -0{,}441793230 & -0{,}290634525 & 0{,}441793230 & 0 \\ 0{,}278436861 & 0 & 0{,}278436861 & -0{,}846503150 \\ -1{,}23212425 & 0 & -1{,}23212425 & 0{,}305154074 \\ 0{,}159261077 & 1{,}28610071 & -0{,}159261077 & 0 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{B}_1$

$$\begin{Vmatrix} -1{,}61042025 & -0{,}089648965 & 0{,}064705657 & -0{,}093429932 \\ -0{,}093429932 & 0 & -0{,}093429932 & -0{,}387921081 \\ -0{,}064705657 & -0{,}089648965 & 1{,}61042025 & 0{,}093429932 \\ -0{,}089648965 & 0{,}558216979 & 0{,}089648965 & 0 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{B}_2$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0{,}367549695 & -0{,}279356790 & 0{,}034700492 \\ -0{,}034700492 & -0{,}317200880 & 0{,}034700492 & 0 \\ -0{,}279356790 & -0{,}367549695 & 0 & 0{,}034700492 \\ -0{,}367549695 & 0 & -0{,}367549695 & 0{,}317200880 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{B}_3$

$$\begin{Vmatrix} 1{,}29453757 & -0{,}0668728327 & 0{,}120855187 & 0{,}026678130 \\ 0{,}069620286 & 0{,}051513305 & -0{,}069620286 & 0{,}003762514 \\ 0{,}120855186 & 0{,}0668728327 & 0{,}034737568 & 0{,}026678130 \\ 0{,}103126810 & -0{,}003762514 & 0{,}103126810 & -0{,}113855431 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{B}_4$

$$\begin{Vmatrix} 0{,}274636403 & 0{,}0239035671 & -0{,}244147749 & -0{,}108404225 \\ 0{,}017572613 & 0 & 0{,}017572612 & 0{,}191343298 \\ 0{,}244147749 & 0{,}0239035671 & -0{,}274636403 & 0{,}108404225 \\ 0{,}295323986 & -0{,}0544046576 & -0{,}295323986 & 0 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{B}_5$

$$\begin{Vmatrix} -0{,}638371620 & -0{,}004501406 & 0{,}007754370 & -0{,}019939662 \\ -0{,}075045546 & 0{,}114650294 & 0{,}075045546 & 0 \\ 0{,}007754370 & 0{,}004501406 & -0{,}638371620 & -0{,}019939662 \\ -0{,}045662155 & 0 & -0{,}045662155 & 0{,}02279992 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{C}_1$

$$\begin{Vmatrix} 0 & -0{,}665292157 \\ 0{,}561028239 & 0 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{C}_2$

$$\begin{Vmatrix} 0{,}186233680 & 0 \\ 0 & -0{,}186233680 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{C}_3$

$$\begin{Vmatrix} -0{,}154478806 & 0 \\ 0 & -0{,}0148035460 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{C}_4$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0{,}0985296863 \\ -0{,}150954873 & 0 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{C}_5$

$$\begin{Vmatrix} 0{,}0468202978 & 0 \\ 0 & 0{,}157145038 \end{Vmatrix}$$

Подробное описание вычислительной процедуры получения нормализующего преобразования (5.24), как и всех следующих ниже нормализующих заменах переменных, имеется в работе [39].

Таким образом, мы получили (с точностью до e^2) каноническое преобразование $\tilde{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathbf{p}} \to \mathbf{q}''$, $\mathbf{p}''$ гамильтониана $\tilde{H}_2$ к нормальной форме (5.26). Это преобразование задается формулами (5.21), (5.22), (5.24) и (5.25). Обратное преобразование легко получить, вычислив соответствующие обратные матрицы.

5.3. Исключение членов третьей степени относительно координат и импульсов. После нормализации квадратичной части $\tilde{H}_2$ новая функция Гамильтона H'' с точностью до величин четвертого порядка малости относительно $|\mathbf{q}''|$, $|\mathbf{p}''|$ и e запишется, как

легко проверить, в виде

$$H''(\mathbf{q}'', \mathbf{p}'', \nu)=H_2'' + H_3''^{(0)}+e(\sin \nu G_3 + \cos \nu F_3) + H_4''^{(0)}. \quad (5.27)$$

Здесь H_2'' есть функция (5.26), $H_3''^{(0)}$ и $H_4''^{(0)}$ — это функции $\tilde{H}_3^{(0)}$ и $\tilde{H}_4^{(0)}$, в которых переменные $\tilde{q}^{(i)}$, $\tilde{p}^{(i)}$ выражены через $q''^{(i)}$, $p''^{(i)}$ при помощи матрицы, задающей преобразования (5.21) — (5.22). Формы третьей степени G_3 и F_3 в (5.27) не зависят от ν, а переменные $q''^{(3)}$ и $p''^{(3)}$ входят в них только квадратичным образом.

Каноническое преобразование $\mathbf{q}''$, $\mathbf{p}'' \to \hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{p}}$, исключающее из гамильтониана (5.27) члены третьей степени

$$H_3''^{(0)} + e(\sin \nu G_3 + \cos \nu F_3),$$

зададим при помощи производящей функции вида

$$\hat{S} = (\mathbf{q}'', \hat{\mathbf{p}}) + W_3(\mathbf{q}'', \hat{\mathbf{p}}) + e[\sin \nu K_3(\mathbf{q}'', \hat{\mathbf{p}}) + \cos \nu \Gamma_3(\mathbf{q}'', \hat{\mathbf{p}})]. \quad (5.28)$$

Структура форм W_3, K_3 и Γ_3 аналогична структуре форм G_3 и F_3. Подберем их так, чтобы в новой функции Гамильтона $\hat{H}$ отсутствовали члены третьей степени относительно $\hat{q}^{(i)}$, $\hat{p}^{(i)}$.

Из тождества, связывающего новую $\hat{H}$ и старую H'' функции Гамильтона с производящей функцией $\hat{S}$ канонического преобразования, получим три уравнения относительно W_3, K_3 и Γ_3:

$$DW_3 = H_3''^{(0)}, \quad D\Gamma_3 = K_3 + F_3, \quad DK_3 = -\Gamma_3 + G_3, \quad (5.29)$$

где через D обозначен следующий оператор:

$$D = \lambda_1\left(\hat{p}^{(1)}\frac{\partial}{\partial \hat{p}^{(1)}} - q''^{(1)}\frac{\partial}{\partial q''^{(1)}}\right) + \lambda_2\left(q''^{(2)}\frac{\partial}{\partial \hat{p}^{(2)}} - \hat{p}^{(2)}\frac{\partial}{\partial q''^{(2)}}\right) + \\ + \lambda_3\left(q''^{(3)}\frac{\partial}{\partial \hat{p}^{(3)}} - \hat{p}^{(3)}\frac{\partial}{\partial q''^{(3)}}\right). \quad (5.30)$$

В формах $H_3''^{(0)}$, F_3 и G_3, входящих в (5.29), величины $p''^{(i)}$ заменены на $\hat{p}^{(i)}$.

Приравняв в обеих частях уравнений (5.29) одночлены при одинаковых степенях $q''^{(i)}$, $\hat{p}^{(i)}$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов искомых форм W_3, K_3 и Γ_3. Из-за того, что $q''^{(3)}$ и $\hat{p}^{(3)}$ содержатся в $H_3''^{(0)}$, G_3 и F_3 квадратично, многие из коэффициентов форм W_3, K_3 и Γ_3 будут равняться нулю. Коэффициенты форм W_3, K_3 и Γ_3 были вычислены на ЭВМ.

Каждую из этих форм зададим в виде суммы

$$\sum c_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6} q''^{k_1}_{(1)} q''^{k_2}_{(2)} \hat{p}^{k_3}_{(1)} \hat{p}^{k_4}_{(2)} q''^{k_5}_{(3)} \hat{p}^{k_6}_{(3)},$$

где суммирование ведется по целым неотрицательным числам k_i, сумма которых равна трем. Числовые значения коэффициентов

Таблица 21

Индекс коэффициента $c_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}$	Числовое значение коэффициента $c_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}$		
	в форме W_3	в форме K_3	в форме Γ_3
000300	0,746583163	0	0,565777617
001200	—2,200475216	—4,21598988	—0,880868731
002100	0,784525932	2,76719842	0,746392105
003000	0,085276911	0,476844592	—0,092220428
010200	0	2,08944869	0
011100	1,489351118	—0,041403661	0,617559866
012000	—0,839003171	—1,96308889	—0,789252689
020100	—0,208836809	0	—0,229043264
021000	—0,463353884	0,284907670	0,303335836
030000	0	0,118217723	0
100200	—2,200475216	4,21598988	—0,880868731
101100	3,470378379	0	3,40582548
102000	—2,275945950	—3,17134578	—1,38332186
110100	—1,489351118	—0,041403661	—0,617559866
111000	0	3,07303700	0
120000	—0,463353884	—0,284907669	0,303335836
200100	0,784525932	—2,76719842	0,746392105
201000	—2,275945950	3,17134578	—1,38332186
210000	0,839003171	—1,96308889	0,789252689
300000	0,085276911	—0,476844592	—0,09220428
100020	—1,725855874	3,41495947	—0,361180392
010020	0	2,14279121	0
001020	—1,725855874	—3,41495947	—0,361180392
000120	0,650519542	0	0,398125980
100011	1,205447559	—0,960237641	0,254325223
010011	1,486767095	0	1,15838060
001011	—1,205447559	—0,960237641	—0,254325223
000111	0	0,556735971	0
100002	—0,997437105	0,573897516	—0,476295743
010002	0	0,087794522	0
001002	—0,997437105	—0,573897516	—0,476295743
000102	1,425728815	0	1,15795834

приведены в табл. 21. Невыписанные в табл. 21 коэффициенты форм W_3, K_3 и Γ_3 равны нулю.

Связь между новыми переменными $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ и старыми $\mathbf{q}''$, $\mathbf{p}''$ с точностью до величин третьего порядка малости относительно $|\mathbf{q}''|$, $|\mathbf{p}''|$ и e задается формулами

$$q''^{(i)} = \hat{q}^{(i)} - \frac{\partial W_3}{\partial \hat{p}^{(i)}} - e\sin\nu\frac{\partial K_3}{\partial \hat{p}^{(i)}} - e\cos\nu\frac{\partial \Gamma_3}{\partial \hat{p}^{(i)}} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 W_3}{\partial \hat{p}^{(i)}\partial \hat{q}^{(j)}}\frac{\partial W_3}{\partial \hat{p}^{(j)}},$$

$$p''^{(i)} = \hat{p}^{(i)} + \frac{\partial W_3}{\partial \hat{q}^{(i)}} + e\sin\nu\frac{\partial K_3}{\partial \hat{q}^{(i)}} + e\cos\nu\frac{\partial \Gamma_3}{\partial \hat{q}^{(i)}} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 W_3}{\partial \hat{q}^{(i)}\partial \hat{q}^{(j)}}\cdot\frac{\partial W_3}{\partial \hat{p}^{(j)}} \quad (i=1,2,3). \quad (5.31)$$

Здесь в формах W_3, K_3, Γ_3 вместо аргументов $\mathbf{q}''$ стоят величины $\hat{\mathbf{q}}$. Обратное преобразование с той же точностью запишется в виде

$$\hat{q}^{(i)} = q''^{(i)} + \frac{\partial W_3}{\partial p''^{(i)}} + e\sin\nu\frac{\partial K_3}{\partial p''^{(i)}} + e\cos\nu\frac{\partial \Gamma_3}{\partial p''^{(i)}} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 W_3}{\partial p''^{(i)}\partial p''^{(j)}}\frac{\partial W_3}{\partial q''^{(j)}},$$

$$\hat{p}^{(i)} = p''^{(i)} - \frac{\partial W_3}{\partial q''^{(i)}} - e\sin\nu\frac{\partial K_3}{\partial q''^{(i)}} - e\cos\nu\frac{\partial \Gamma_3}{\partial q''^{(i)}} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 W_3}{\partial q''^{(i)}\partial p''^{(j)}}\frac{\partial W_3}{\partial q''^{(j)}} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5.32}$$

В этих формулах формы W_3, K_3, Γ_3 имеют своими аргументами переменные $\mathbf{q}''$, $\mathbf{p}''$.

5.4. Нормализация совокупности членов четвертого порядка. В переменных $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{p}}$, введенных в предыдущем параграфе, гамильтониан задачи с точностью до членов четвертого порядка относительно $|\hat{\mathbf{q}}|$, $|\hat{\mathbf{p}}|$ и e будет таким:

$$\hat{H} = H_2''(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) + \hat{H}_4^{(0)}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}), \tag{5.33}$$

где H_2'' вычисляется по формуле (5.26), а $\hat{H}_4^{(0)}$ имеет вид

$$\hat{H}_4^{(0)} = H''^{(0)}_4(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) + \frac{1}{2}\lambda_2\left[\left(\frac{\partial W_3}{\partial \hat{q}^{(2)}}\right)^2 - \left(\frac{\partial W_3}{\partial \hat{p}^{(2)}}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\lambda_3\left[\left(\frac{\partial W_3}{\partial \hat{q}^{(3)}}\right)^2 - \left(\frac{\partial W_3}{\partial \hat{p}^{(3)}}\right)^2\right] + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial H_3''^{(0)}}{\partial \hat{p}^{(j)}}\frac{\partial W_3}{\partial \hat{q}^{(j)}}. \tag{5.34}$$

В (5.34) $H_3''^{(0)}$ и W_3 — функции переменных $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{p}}$.

Теперь сделаем каноническую замену переменных $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{p}} \to \mathbf{q}^*$, $\mathbf{p}^*$ при помощи производящей функции

$$S^* = (\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{p}^*) + W_4(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{p}^*). \tag{5.35}$$

Коэффициенты формы четвертой степени W_4 подберем так, чтобы в новых переменных $\mathbf{q}^*$, $\mathbf{p}^*$ члены четвертой степени в гамильтониане имели нормальную форму

$$H_4^{*(0)} = c_{200}(q^{*(1)}p^{*(1)})^2 + c_{020}\left(\frac{q^{*2}_{(2)} + p^{*2}_{(2)}}{2}\right)^2 + c_{002}\left(\frac{q^{*2}_{(3)} + p^{*2}_{(3)}}{2}\right)^2 + c_{110}(q^{*(1)}p^{*(1)})\left(\frac{q^{*2}_{(2)} + p^{*2}_{(2)}}{2}\right) + c_{101}(q^{*(1)}p^{*(1)})\left(\frac{q^{*2}_{(3)} + p^{*2}_{(3)}}{2}\right) + c_{011}\left(\frac{q^{*2}_{(2)} + p^{*2}_{(2)}}{2}\right)\left(\frac{q^{*2}_{(3)} + p^{*2}_{(3)}}{2}\right). \tag{5.36}$$

В (5.36) величины c_{ijk} — константы, являющиеся инвариантами исходной функции Гамильтона относительно канонических преобразований. Процедура нахождения формы W_4 и коэффициентов c_{ijk} нормальной формы (5.36) весьма стандартна (см. преобразование Биркгофа в § 1 главы 3), и потому мы здесь на ней не останавливаемся. Форму W_4 будем представлять в виде такой суммы:

$$W_4 = \sum w_{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6} \hat{q}_{(1)}^{k_1} \hat{q}_{(2)}^{k_2} p_{(1)}^{*k_3} p_{(2)}^{*k_4} \hat{q}_{(3)}^{k_5} p_{(3)}^{*k_6},$$

где суммирование происходит по целым неотрицательным числам k_i, сумма которых равна четырем. Числовые значения коэффициентов формы W_4 были получены на ЭВМ. Эти значения сведены в табл. 22. Невыписанные коэффициенты формы W_4 равны нулю. Коэффициенты c_{ijk}, входящие в нормальную форму (5.36) членов четвертого порядка в новой функции Гамильтона, имеют следующие числовые значения:

$c_{200} = -1{,}92495045$, $c_{020} = -1{,}94195756$, $c_{002} = -1{,}28232557$,
$c_{110} = -14{,}2446161$, $c_{101} = -11{,}8222486$, $c_{011} = 3{,}13444410$.

С точностью до величин третьего порядка малости старые переменные $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ выражаются через новые $\mathbf{q}^*$, $\mathbf{p}^*$ согласно формулам

$$\hat{q}^{(j)} = q^{*(j)} - \frac{\partial W_4(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*)}{\partial p^{*(j)}}, \quad \hat{p}^{(j)} = p^{*(j)} + \frac{\partial W_4(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*)}{\partial q^{*(j)}} \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{5.37}$$

Замена переменных, обратная (5.37), с той же точностью задается формулами

$$q^{*(j)} = \hat{q}^{(j)} + \frac{\partial W_4(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})}{\partial \hat{p}^{(j)}}, \quad p^{*(j)} = \hat{p}^{(j)} - \frac{\partial W_4(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})}{\partial \hat{p}^{(j)}} \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{5.38}$$

Таким образом, мы нашли вещественное каноническое преобразование $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*$, приводящее функцию Гамильтона (5.10), описывающую движение космического аппарата относительно точки либрации L_2, к нормальной форме, содержащей величины до четвертого порядка малости включительно относительно $|\mathbf{q}^*|$, $|\mathbf{p}^*|$ и e. Это преобразование схематически выглядит так: 1) $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{q}'', \mathbf{p}''$ (линейное преобразование, приводящее к нормальной форме квадратичную часть гамильтониана; см. формулы (5.21), (5.22) и (5.24), (5.25)); 2) $\mathbf{q}'', \mathbf{p}'' \to \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}$ (исключение из функции Гамильтона членов третьей степени относительно координат и импульсов; см. формулы (5.31), (5.32)); 3) $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}} \to \mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*$ (нормализация совокупности членов четвертой степени; см. формулы (5.37), (5.38)). Согласно указанной схеме, исходные величины $q^{(i)}$, $p^{(i)}$ легко вычисляются по известным значениям $q^{*(i)}$, $p^{*(i)}$ и наоборот.

Таблица 22

Индекс коэффициента $w_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}$	Числовое значение коэффициента $w_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}$	Индекс коэффициента $w_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}$	Числовое значение коэффициента $w_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}$
000400	2,46578791	200020	—4,14054944
001300	—6,22916787	110020	—7,76555006
002200	7,40002310	101020	3,31568348
003100	—1,75750231	100120	—2,22664160
004000	—0,854524547	020020	0
010300	2,83818588	011020	—4,86255316
011200	—3,83448225	010120	23,8357405
012100	—0,666860651	002020	7,62697715
013000	2,19926340	001120	—6,47068885
020200	0	000220	2,99802101
021100	2,79546129	200011	4,25989016
022000	—2,03262786	110011	2,52974784
030100	—0,553699999	101011	1,79582987
031000.	0,626876590	100111	—7,29668759
040000	0,152090730	020011	—19,1640094
100300	—4,85997365	011011	—4,55249672
101200	0	010111	1,79533475
102100	—14,6378177	002011	7,31181418
103000	5,30365267	001111	—9,58863702
110200	—10,3586362	000211	—22,8099819
111100	16,7556303	200002	0,377834646
112000	—2,73595364	110002	—3,40772282
120100	—2,63136014	101002	0
121000	—16,5677667	100102	—1,14285015
130000	—0,150633933	020002	—0,337515709
200200	2,49039403	011002	—1,73401731
201100	—15,7981069	010102	—18,3902492
202000	0	002002	1,63710322
210100	8,92716071	001102	—3,88366484
211000	—10,8033415	000202	1,39515361
220000	2,96865583	000040	0,991848859
300100	—0,925745462	000031	—0,395325819
301000	3,89169338	000022	0
310000	—1,61978834	000013	0,880384132
400000	0,272267629	000004	0

5.5. Общее решение нормализованной системы. Условно-периодические движения. В переменных q^*, p^* функция Гамильтона с точностью до величин четвертого порядка малости относительно $|q^*|$, $|p^*|$ и e запишется в виде

$$H^* = \Lambda_1 (q^{*(1)}p^{*(1)}) + \Lambda_2\rho_2^* + \Lambda_3\rho_3^* + c_{200} (q^{*(1)}p^{*(1)})^2 + c_{020}\rho_2^{*2} + \\ + c_{002}\rho_3^{*2} + c_{110} (q^{*(1)}p^{*(1)})\, \rho_2^* + c_{101} (q^{*(1)}p^{*(1)})\, \rho_3^* + c_{011}\rho_2^*\rho_3^* \tag{5.39}$$

$$(q^{*(j)} = \sqrt{2\rho_j^*} \sin \varphi_j,\ p^{*(j)} = \sqrt{2\rho_j^*} \cos \varphi_j\ (j = 2, 3)).$$

Общее решение соответствующей системы дифференциальных уравнений определяется формулами

$$q^{*(1)} = q_0^{*(1)} \exp \varphi_1^*, \qquad p^{*(1)} = p_0^{*(1)} \exp(-\varphi_1^*), \tag{5.40}$$

$$q^{*(j)} = \sqrt{2\rho_{j0}^*} \sin \varphi_j^*, \qquad p^{*(j)} = \sqrt{2\rho_{j0}^*} \cos \varphi_j^* \quad (j = 2, 3), \tag{5.41}$$

$$\varphi_1^* = \omega_1(\nu - \nu_0), \quad \varphi_2^* = \omega_2(\nu - \nu_0) + \varphi_{20}^*, \quad \varphi_3^* = \omega_3(\nu - \nu_0) + \varphi_{30}^*, \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Lambda_1 + 2c_{200}(q_0^{*(1)} p_0^{*(1)}) + c_{110}\rho_{20}^* + c_{101}\rho_{30}^*, \\ \omega_2 &= \Lambda_2 + 2c_{020}\rho_{20}^* + c_{011}\rho_{30}^* + c_{110}(q_0^{*(1)} p_0^{*(1)}), \\ \omega_3 &= \Lambda_3 + 2c_{002}\rho_{30}^* + c_{101} q_0^{*(1)} p_0^{*(1)} + c_{011}\rho_{20}^*. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Через ν_0 в (5.42) обозначено значение истинной аномалии ν в начальный момент времени $t = t_0$. Величины $q_0^{*(1)}$, $p_0^{*(1)}$, $\rho_{j0}^{*(1)}$, φ_{j0}^* $(j = 2, 3)$ играют роль произвольных постоянных интегрирования.

Общее решение (5.40) — (5.42) вместе с формулами нормализующих преобразований и координатных переходов позволяет для любого момента времени получить приближенные значения координат и компонент вектора скорости космического аппарата в абсолютной системе координат.

Движение космического аппарата в окрестности L_2, в силу существования в общем решении экспоненциально возрастающих функций времени, неустойчиво. Но если начальные условия выбрать так, чтобы

$$q_0^{*(1)} = p_0^{*(1)} = 0, \tag{5.44}$$

то, согласно (5.40), (5.41), движение космического аппарата вблизи L_2 будет условно-периодическим (в рамках рассмотренного приближения). Если же начальные условия таковы, что выполняется только одно из равенств (5.44):

$$q_0^{*(1)} = 0, \tag{5.45}$$

то движение космического аппарата также будет происходить вблизи L_2, а с увеличением t оно будет асимптотически приближаться к условно-периодическому движению.

§ 6. Оценка точности построенной теории движения КА

6.1. Общие замечания. Среди всего множества траекторий движения КА в окрестности L_2 наибольший практический интерес представляют условно-периодические траектории. Наиболее существенным достоинством предложенного в настоящей главе аналитического метода расчета движения КА является возможность приближенного описания многообразия таких траекторий.

Но поскольку реализованная процедура аналитического метода расчета лишь приближенно описывает движение КА, то тем самым и многообразие условно-периодических траекторий определено также приближенно. В частности, в точном решении задачи о движении КА, определяемом начальными данными, соответствующими условно-периодическому движению приближенной задачи, неизбежно будут присутствовать экспоненциально возрастающие функции времени. Для оценки точности приближенного метода было проведено сравнение с результатами численного интегрирования строгих уравнений движения в декартовых координатах. Эти результаты рассматривались как эталонные. Вообще говоря, достаточно точное вычисление координат КА в окрестности неустойчивой особой точки с помощью численного интегрирования также является некоторой проблемой, так как методические ошибки аппроксимации и ошибки округления экспоненциально возрастают. Оценки показали, что их суммарная погрешность на интервале 10 *сут* не превышает примерно 10 *м*, что существенно меньше ошибок приближенного метода. Поэтому для наших целей результаты численного интегрирования можно принять за эталон.

Эталонные расчеты проводились в двух вариантах.

1) Движение КА определяется решением точной системы уравнений ограниченной задачи трех тел (Земля — Луна — КА). Движение Луны эллиптическое.

2) Движение КА определяется решением точной системы уравнений ограниченной задачи четырех тел (Земля — Луна — Солнце — КА). Геоцентрические координаты и компоненты вектора скорости Луны $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{v}_1(t)$ определяются численным интегрированием уравнений задачи трех тел (Земля — Луна — Солнце).

Первый из этих вариантов служит для выявления возможных грубых ошибок алгоритма и оценки методических ошибок, связанных с учетом в приближенной теории предыдущего параграфа членов лишь до конечного порядка малости. Второй вариант оценивает степень пригодности построенной в предыдущем параграфе теории в случае эллиптической задачи трех тел для описания реального движения при наличии солнечных возмущений. В обоих вариантах сравнение результатов проводилось на траекториях, соответствующих приближенно условно-периодическим траекториям $q_0^{*(1)} = p_0^{*(1)} = 0$, для различных начальных значений $q_0^{*(i)}$, $p_0^{*(i)}$ $(i = 2, 3)$.

6.2. Результаты численных экспериментов в эллиптической задаче. Сравнение результатов, полученных приближенным методом, с результатами эталонных расчетов проводилось для трех траекторий, определяемых такими начальными данными при $t = t_0$:

$$q^{*(1)} = p^{*(1)} = 0,\ q^{*(2)} = p^{*(2)} = q^{*(3)} = p^{*(3)} = \delta,$$

где $\delta = 0{,}005$, 0,01 и 0,02. Эти значения δ соответствуют орбитам, удаленным от точки L_2 примерно на 2000, 4000 и 8000 *км*.

Обозначим через $\mathbf{r}'(t - t_0)$ и $\mathbf{r}'_э(t - t_0)$ геоцентрические радиусы-векторы КА, вычисленные соответственно в приближенном и эталонном расчетах. Ошибку приближенного метода расчета будем оценивать величинами компонент Δx, Δy, Δz вектора

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}'(t - t_0) - \mathbf{r}'_э(t - t_0).$$

В результате вычислений с различными значениями δ были получены зависимости компонент вектора $\Delta \mathbf{r}$ от времени. Эти зависимости представлены на рис. 45 сплошными линиями. Видно, что

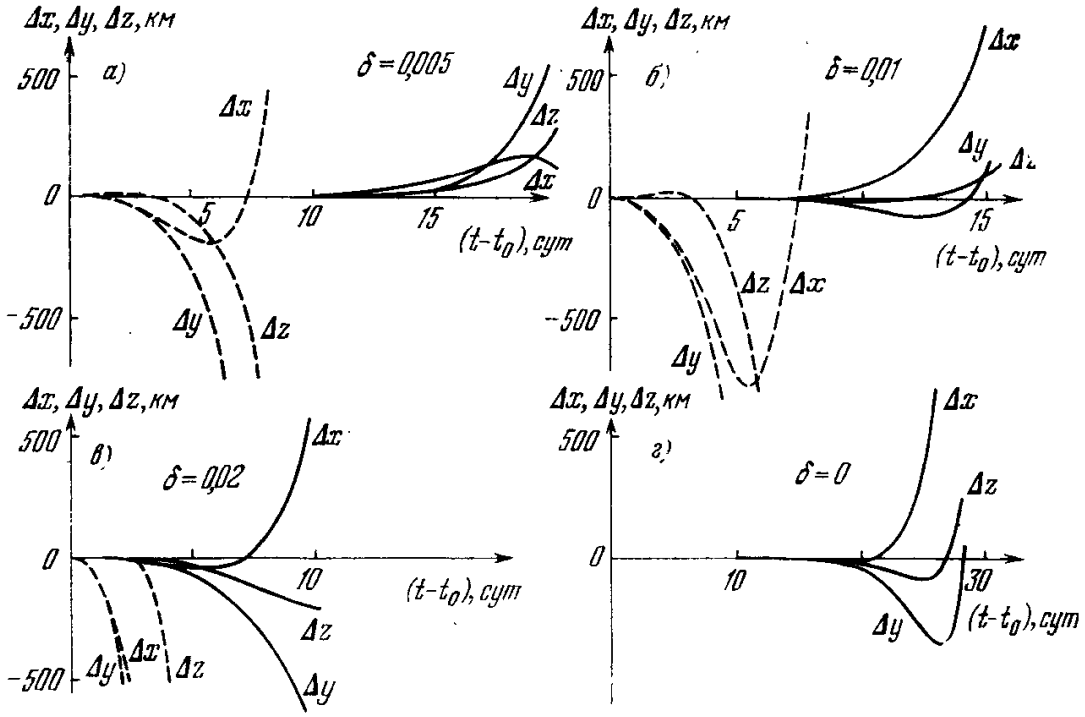

Рис. 45. Ошибки аналитической теории в случае эллиптической ограниченной задачи трех тел.

ошибка достигает величины 50 — 70 *км* за время 15, 10 и 5 *сут* соответственно для $\delta = 0{,}005$, 0,01 и 0,02. В последующие моменты времени ошибки растут очень быстро и при $t - t_0 = 20$, 15 и 10 *сут* соответственно превосходят 500 *км*.

Если в трех рассмотренных вариантах зафиксировать интервал времени $t - t_0 = 7$ *сут* (это примерно половина периода либрации КА в окрестности L_2 системы Земля — Луна), то максимальные ошибки составят 0,9, 11 и 210 *км* соответственно. Из-за влияния неучтенных членов нормализованного гамильтониана можно ожидать ошибку, пропорциональную δ^4. С этим примерно согласу-

ется зависимость изохронной ошибки от δ, выявленная в результате проведенных расчетов.

Дополнительный расчет с начальными данными, соответствующими точке либрации (δ = 0), показал, что в этом случае максимальная ошибка 50 *км* достигается только через 20 *сут* (см. рис. 45, *г*), а в конце семисуточного интервала ошибка не превосходит 60 *м*.

На рис. 45 пунктирными линиями показана зависимость ошибок от времени для случая, когда приближенные расчеты выполнены в рамках линейной теории, т. е. в уравнениях движения отброшены нелинейные члены относительно переменных $q^{*(i)}$, $p^{*(i)}$.

Из рисунков видно, что в этом случае с увеличением δ вдвое изохронная ошибка увеличивается в четыре раза. Сравнение сплошных и пунктирных кривых показывает, как и следовало ожидать, существенную роль нелинейных членов.

6.3. Ошибки теорий в случае учета солнечных возмущений. Проверка точности построенной теории движения вблизи L_2 при учете солнечных возмущений была осуществлена следующим

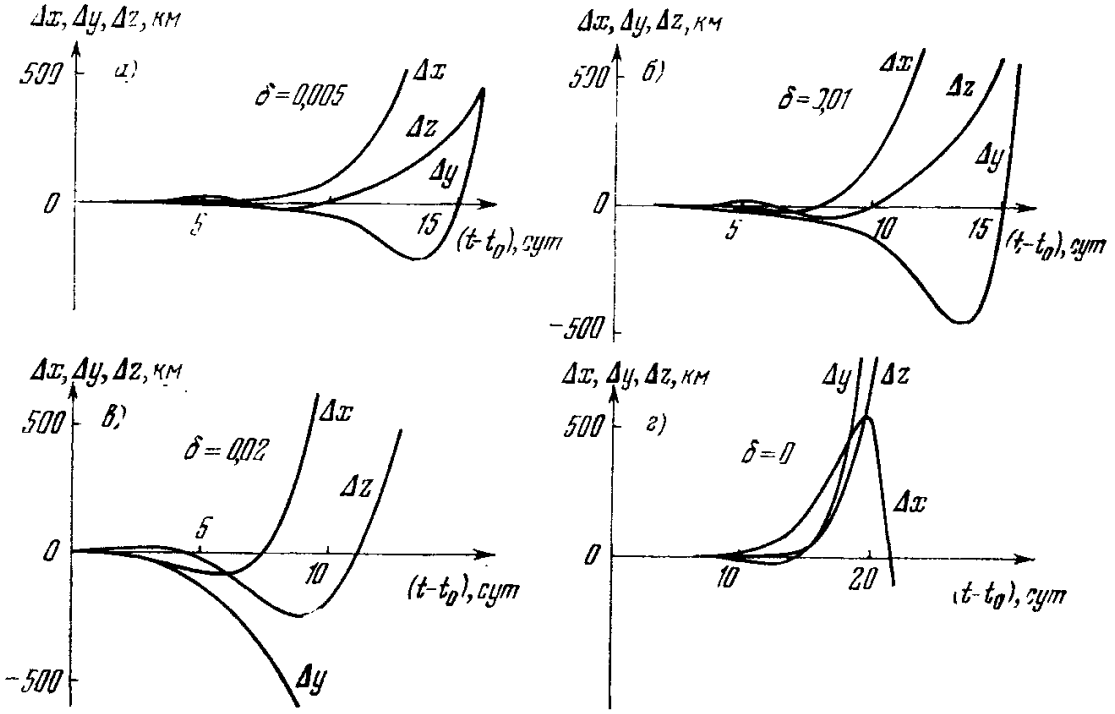

Рис. 46. Ошибки аналитической теории при учете солнечных возмущений.

образом [40]: все необходимые для расчета координатные переходы § 3 осуществлялись на основании реального движения Луны (которое задавалось табличным способом, причем нужные таблицы получались из численного интегрирования задачи четырех тел Земля — Луна — Солнце — КА), а нормализующие преобра-

зования § 5 осуществлялись на основе эллиптического движения Луны, причем для элементов орбиты Луны принимались их оскулирующие значения на начальный момент времени t_0. Таким образом, влияние Солнца на относительное движение не учитывалось.

Расчеты проводились для тех же начальных данных, что и в предыдущем параграфе. Зависимости Δx, Δy, Δz от времени представлены на рис. 46 для $\delta = 0{,}005$; 0,01; 0,02; 0. Сравнение рис. 45, *г* и 46, *г* показывает, что недостаточно полный учет солнечных возмущений приводит к более быстрому нарастанию ошибки. Резкое нарастание ошибки в рассматриваемом варианте $\delta = 0$ происходит примерно на двенадцатые сутки (а не на двадцатые сутки, как в эллиптической задаче).

Из сравнения результатов приближенного решения эллиптической задачи трех тел и задачи четырех тел при различных δ следует, что при $\delta < 0{,}01$ основные ошибки обусловлены недостаточно полным учетом солнечных возмущений. При $\delta > 0{,}01$ определяющими становятся нелинейные члены, неучтенные в приближенной методике. В конце семисуточного интервала времени ошибка составляет 3,5, 30, 60 и 300 *км* для $\delta = 0$; 0,005; 0,01; 0,02 соответственно.

Для оценки зависимости методической ошибки от начального положения Луны и Солнца была проведена дополнительная серия расчетов с $\delta = 0{,}01$. Оказалось, что ошибка слабо зависит от этих параметров и в конце семисуточного интервала для всех вариантов изменяется в пределах 50—80 *км*.

Заметим, что для рассматриваемой методики очень существенно использование в расчетных формулах параметров реального (а не эллиптического) движения Луны. Попытка аппроксимировать движение Луны на семисуточном интервале времени формулами задачи двух тел приводит к ошибкам определения геоцентрических координат порядка 1000—2000 *км*.

ДОПОЛНЕНИЕ

ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ЭЛЛИПСОИДА

§ 1. Уравнения движения

Кроме точек либрации задачи трех тел, в небесной механике известны еще точки либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида. Их существование было установлено Ю. В. Батраковым в работе [6]. Эти точки либрации представляют собой частные решения дифференциальных уравнений движения материальной точки в окрестности вращающегося с постоянной угловой скоростью трехосного гравитирующего эллипсоида. Во вращающейся, связанной с эллипсоидом, системе координат эти частные решения представляют собой положения равновесия. Таких равновесных положений материальной точки всего четыре. Они расположены на продолжениях большой и малой осей экваториального сечения эллипсоида симметрично относительно его центра масс.

В статье [1] В. К. Абалакин исследовал устойчивость упомянутых точек либрации в линейном приближении и установил, что две точки либрации, расположенные на продолжении большой полуоси экваториального сечения эллипсоида, неустойчивы по Ляпунову (выполнены достаточные условия неустойчивости), а две другие точки, расположенные на продолжении малой полуоси, устойчивы в первом приближении (выполнены необходимые условия устойчивости).

Дальнейшее исследование устойчивости точек либрации, расположенных на продолжении малой полуоси экваториального сечения эллипсоида, проведено в работах С. Г. Журавлева [25, 184, 185]. Использовав недавние результаты теории гамильтоновых систем, изложенные в главах 4 и 5 настоящей книги, С. Г. Журавлев получил строгие выводы об устойчивости этих точек либрации.

Ниже кратко излагаются результаты упомянутых работ Ю. В. Батракова, В. К. Абалакина и С. Г. Журавлева, посвященных точкам либрации в окрестности вращающегося эллипсоида. Сначала получим уравнения движения. Пусть материальная точка движется в поле тяготения вращающегося с постоянной угловой скоростью ω трехосного гравитирующего эллипсоида массы M. Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$, связанную с эллипсоидом. Начало этой системы координат поместим в центр

масс O эллипсоида; оси Ox, Oy и Oz совпадают с главными центральными осями инерции эллипсоида, и направление угловой скорости вращения последнего совпадает с направлением оси Oz (рис. 47).

Дифференциальные уравнения движения материальной точки во вращающейся системе координат $Oxyz$ можно (см. [24]) записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\frac{dy}{dt} - \omega^2 x &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt} - \omega^2 y &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \qquad (1.1)$$

где V — потенциал притяжения эллипсоида.

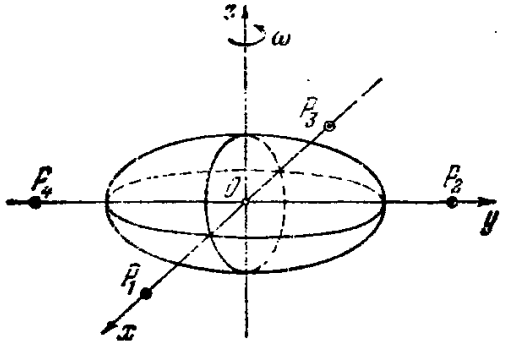

Рис. 47. Точки либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида.

Пусть эллипсоид представляет собой однородное гравитирующее тело, поверхность которого можно записать в виде уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Потенциал такого эллипсоида на внешнюю точку задается формулой Дирихле [24]

$$V = \frac{3}{4} fM \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}, \qquad (1.2)$$

где f — гравитационная постоянная, а u — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1. \qquad (1.3)$$

Пусть эллипсоид мало отличается от однородного шара радиуса R и имеет объем, равный объему этого шара. Тогда

$$a^2 = R^2 + \alpha', \quad b^2 = R^2 + \beta', \quad c^2 = R^2 + \sigma', \qquad (1.4)$$

где α', β' и σ' — малые по сравнению с R^2 величины, которые в силу равенства объемов эллипсоида и шара удовлетворяют с точностью до малых более высокого порядка соотношению $\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$. Разлагая потенциал (1.2) в ряд по степеням α', β', γ', получаем выражение для потенциала притяжения эллипсоида в виде

$$V = \frac{fM}{\rho} + \frac{3}{10} fM \frac{\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \sigma' z^2}{\rho^5} + \ldots \qquad (1.5)$$

Здесь не выписаны члены более высокого порядка относительно

α', β', σ', а через ρ обозначено расстояние от материальной точки до центра масс эллипсоида.

Для дальнейшего удобнее рассматривать уравнения движения в безразмерных переменных. Положим

$$\tau = \omega t, \quad \xi = x \cdot a_0^{-1}, \quad \eta = y \cdot a_0^{-1}, \quad \zeta = z \cdot a_0^{-1},$$

где $a_0^3\omega^2 = fM$. Введем еще вместо трех малых величин α', β', σ' один параметр ε ($0 < \varepsilon \ll 1$), связанный с упомянутыми величинами соотношениями

$$\frac{3}{10}\frac{\alpha'}{a_0^2} = \varepsilon\alpha, \quad \frac{3}{10}\frac{\beta'}{a_0^2} = \varepsilon\beta, \quad \frac{3}{10}\frac{\sigma'}{a_0^2} = \varepsilon\sigma. \tag{1.6}$$

В новых переменных уравнения движения (1.1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2\frac{d\eta}{d\tau} - \xi &= \frac{\partial\overline{V}}{\partial\xi}, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\frac{d\xi}{d\tau} - \eta &= \frac{\partial\overline{V}}{\partial\eta}, \\ \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= \frac{\partial\overline{V}}{\partial\zeta}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\overline{V} = \frac{1}{r} + \varepsilon\frac{\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \sigma\zeta^2}{r^5} + \ldots, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \tag{1.8}$$

§ 2. Точки либрации

Найдем положения равновесия системы (1.7), которые определяют координаты точек либрации P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида. Из (1.7) получаем, что положения равновесия должны удовлетворять такой системе уравнений:

$$\frac{\partial\overline{V}}{\partial\xi} + \xi = 0, \quad \frac{\partial\overline{V}}{\partial\eta} + \eta = 0, \quad \frac{\partial\overline{V}}{\partial\zeta} = 0. \tag{2.1}$$

Используя равенства (1.8), перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} \xi - \frac{\xi}{r^3} + \xi\left[\varepsilon\left(\frac{2\alpha}{r^5} - 5\frac{\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \sigma\zeta^2}{r^7}\right) + \ldots\right] &= 0, \\ \eta - \frac{\eta}{r^3} + \eta\left[\varepsilon\left(\frac{2\beta}{r^5} - 5\frac{\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \sigma\zeta^2}{r^7}\right) + \ldots\right] &= 0, \\ -\frac{\zeta}{r^3} + \zeta\left[\varepsilon\left(\frac{2\sigma}{r^5} - 5\frac{\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \sigma\zeta^2}{r^7}\right) + \ldots\right] &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Из последнего уравнения системы (2.2) видно, что при достаточно малых значениях ε она может иметь только такие решения, для

которых $\zeta = 0$. Положив в (2.2) величину ζ равной нулю, получим для нахождения координат точек либрации систему двух уравнений

$$\xi\left\{1-\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}+\varepsilon\left[\frac{2\alpha}{(\xi^2+\eta^2)^{5/2}}-\frac{\alpha\xi^2+\beta\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^{7/2}}\right]+\ldots\right\}=0,$$
$$\eta\left\{1-\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}+\varepsilon\left[\frac{2\beta}{(\xi^2+\eta^2)^{5/2}}-\frac{\alpha\xi^2+\beta\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^{7/2}}\right]+\ldots\right\}=0, \quad (2.3)$$

которая при малых ε имеет четыре решения, определяющих координаты четырех точек либрации P_i. Имеем

$$\begin{aligned}
&P_1: \xi_0 = 1+\varepsilon\alpha+\ldots, && \eta_0 = 0, && \zeta_0 = 0;\\
&P_2: \xi_0 = 0, && \eta_0 = 1+\varepsilon\beta+\ldots, && \zeta_0 = 0;\\
&P_3: \xi_0 = -1-\varepsilon\alpha-\ldots, && \eta_0 = 0, && \zeta_0 = 0;\\
&P_4: \xi_0 = 0, && \eta_0 = -1-\varepsilon\beta-\ldots, && \zeta_0 = 0.
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Точки либрации лежат на продолжениях большой и малой полуосей экваториального сечения эллипсоида симметрично относительно его центра масс. Схематически они изображены на рис. 47.

§ 3. Линейный анализ устойчивости точек либрации

Исследуем устойчивость полученных точек либрации. Ввиду симметрии можно ограничиться рассмотрением одной из точек, например P_1. Рассмотрим сначала устойчивость в линейном приближении. Положим

$$\xi = \xi_0 + q_1, \quad \eta = \eta_0 + q_2, \quad \zeta = \zeta_0 + q_3, \quad (3.1)$$

где ξ_0, η_0, ζ_0 — координаты точки либрации P_1, определяемые формулами (2.4). Линеаризованные уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d^2q_1}{d\tau^2} - 2\frac{dq_2}{d\tau} - 3(1+2\varepsilon\alpha+\ldots)q_1 = 0, \quad (3.2)$$
$$\frac{d^2q_2}{d\tau^2} + 2\frac{dq_1}{d\tau} + [2\varepsilon(\alpha-\beta)+\ldots]q_2 = 0, \quad (3.3)$$
$$\frac{d^2q_3}{d\tau^2} + [1+2\varepsilon(\alpha-\sigma)+\ldots]q_3 = 0. \quad (3.4)$$

Характеристическое уравнение системы (3.2) — (3.4) распадается на два уравнения: одно четвертого, а другое второго порядков:

$$\lambda^4 + [1-2\varepsilon(2\alpha+\beta)+\ldots]\lambda^2 + 6\varepsilon(\beta-\alpha)+\ldots = 0, \quad (3.5)$$
$$\lambda^2 + 1 + 2\varepsilon(\alpha-\sigma)+\ldots = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) получаем, что если $\alpha < \beta$, то для достаточно малых

ε характеристическое уравнение имеет три пары чисто мнимых корней:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1,\ \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2,\ \lambda_{5,6} = \pm i\omega_3, \qquad (3.7)$$

где ω_i —частоты малых колебаний материальной точки вблизи P_1:

$$\omega_1 = 1 + \varepsilon(\alpha - 4\beta) + \ldots,\quad \omega_2 = \sqrt{6\varepsilon(\beta - \alpha)} + \ldots,\quad \omega_3 = 1 + \varepsilon(\alpha - \sigma) + \ldots \qquad (3.8)$$

Если же $\alpha > \beta$, то при достаточно малых ε один из корней характеристического уравнения будет вещественным положительным числом $\lambda = \sqrt{6\varepsilon(\alpha - \beta)} + \ldots$

Таким образом, в случае выполнения неравенства $\alpha < \beta$ (т. е. точка либрации P_1 (а также и точка P_3) расположена на продолжении малой полуоси экваториального сечения эллипсоида) линеаризованная система (3.2) — (3.4) устойчива, а значит, для полной нелинейной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения выполнены необходимые условия устойчивости. В случае же, когда $\alpha > \beta$ (т. е. точка либрации P_1 (а также и точка P_3) расположена на продолжении большой полуоси экваториального сечения эллипсоида), линейная система (3.2) — (3.4) неустойчива, а также неустойчива по Ляпунову и полная нелинейная система уравнений возмущенного движения.

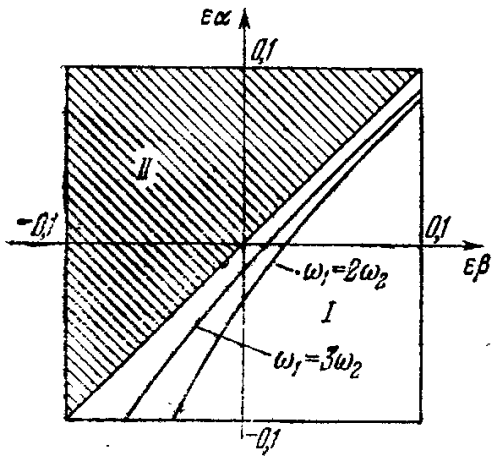

Рис. 48. Области устойчивости и неустойчивости точек либрации трехосного гравитирующего эллипсоида.

На рис. 48 в плоскости параметров $\varepsilon\alpha$ и $\varepsilon\beta$ показаны область I, где выполнены необходимые условия устойчивости точек либрации, и область II, в которой точки либрации неустойчивы по Ляпунову (на рис. 48 принято $|\varepsilon\alpha| < 0{,}1$ и $|\varepsilon\beta| < 0{,}1$).

§ 4. Результаты нелинейного исследования устойчивости

С. Г. Журавлевым в работах [25, 184, 185] проведено подробное нелинейное исследование устойчивости точек либрации P_i для значений параметров $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, принадлежащих области I рис. 48, где выполняются необходимые условия устойчивости. Нелинейное исследование представляет значительные трудности, потому что в области I, как показано в статье [184], гамильтониан возмущенного движения не будет знакоопределенной функцией. Здесь ситуация совершенно аналогична той, которая имеет место в задаче об устойчивости треугольных точек либрации круговой ограниченной

задачи трех тел (см. главы 7 и 8 книги). Совсем не останавливаясь на очень громоздких вычислениях, проведенных в работах [25, 184, 185], приведем только окончательные результаты.

Рассмотрим сначала случай плоской задачи, т. е. случай, когда материальная точка во все время движения не выходит из плоскости экваториального сечения эллипсоида. В статье [184] показано, что в области I существуют кривые, на которых частоты ω_1, ω_2 удовлетворяют резонансным соотношениям третьего и четвертого порядков $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$. Эти кривые представлены на рис. 48. Расчеты, проведенные в [184, 185], показали, что для значений параметров $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, лежащих на кривой $\omega_1 = 2\omega_2$ и на части кривой $\omega_1 = 3\omega_2$, где выполняется неравенство $-0{,}0634 < \varepsilon\beta < -0{,}0629$, точки либрации неустойчивы по Ляпунову. В остальной части области I точки либрации устойчивы по Ляпунову (кроме, быть может, двух точек кривой $\omega_1 = 3\omega_2$, в которых $\varepsilon\beta = -0{,}0634$ или $-0{,}0629$; эти две точки разделяют на кривой $\omega_1 = 3\omega_2$ интервалы устойчивости и неустойчивости, в них вопрос об устойчивости остался открытым). Отметим, что для исследования устойчивости в нерезонансном случае в работах [184, 185], как и в главе 7 настоящей книги, пришлось учесть в разложении гамильтониана члены до шестого порядка включительно относительно координат и импульсов возмущенного движения.

В случае пространственной задачи, т. е. когда материальная точка в возмущенном движении может выходить из плоскости экваториального сечения эллипсоида, неустойчивость на кривой $\omega_1 = 2\omega_2$ и на части резонансной кривой $\omega_1 = 3\omega_2$, конечно, остается. Если же параметры $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$ таковы, что резонансные соотношения $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ не выполнены, то, как показано в работе [25], точки либрации, лежащие на продолжении малой полуоси экваториального сечения эллипсоида, будут устойчивы для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

В статье [184] рассмотрен вопрос об устойчивости точек либрации для случая Земли. Фигура Земли аппроксимировалась при помощи эллипсоида, мало отличающегося от шара. Параметры $\varepsilon\alpha$ и $\varepsilon\beta$ оказались очень малыми и не лежат на кривых $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$. Поэтому для Земли точки либрации, расположенные на продолжении малой полуоси экваториального сечения аппроксимирующего эллипсоида, устойчивы по Ляпунову (в плоской задаче) или устойчивы для большинства начальных условий (в пространственной задаче).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абалакин В. К. К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида.— Бюлл. ИТА, 1957, т. 6, № 8.
2. Арнольд В. И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае.— Доклады Академии наук СССР, 1961, т. 137, № 2, с. 255—257.
3. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— Успехи математических наук, 1963, т. 18, вып. 6, с. 91—192.
4. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Успехи математических наук, 1963, т. 18, вып. 5, с. 13—40.
5. Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы.— Доклады Академии наук СССР, 1964, т. 156, № 1, с. 9—12.
6. Батраков Ю. В. Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида.— Бюлл. ИТА, 1957, т. 6, № 8.
7. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
8. Борн М. Лекции по атомной механике. Харьков, 1934.
9. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М.: Мир, 1964.
10. Брюно А. Д. Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов.— Матем. сб., 1970, т. 83, вып. 2, с. 273.
11. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений.— Труды московского математического общества, 1971, т. 25, с. 119—262.
12. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений.— Труды московского математического общества, 1972, т. 26, с. 199—239.
13. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона.— Математические заметки, 1967, т. 1, № 3, с. 325—330.
14. Брюно А. Д. О локальных задачах механики. Препринт ИПМ АН СССР, № 96, 1973.
15. Булгаков Б. В. О нормальных координатах.— Прикладная математика и механика, 1946, т. 10, вып. 2, с. 273.
16. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
18. Градштейн Н. С., Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
19. Гребеников Е. А. Об устойчивости лагранжевых треугольных решений ограниченной эллиптической задачи трех тел.— Астрон. ж., 1964, т. 41, вып. 3, с. 567.

20. Гурса Э. Курс математического анализа, т. II. М.: Гостехиздат, 1933.
21. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
22. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.
23. Дубошин Г. Н. (ред.). Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. Авторы: Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.
24. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
25. Журавлев С. Г. Об устойчивости точек либрации вращающегося трехосного эллипсоида в пространственном случае.— Астрономический журнал, 1974, т. 51, вып. 6.
26. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941.
27. Заславский Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний.— Успехи физических наук, 1971, т. 105, вып. 1, с. 3—40.
28. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
29. Зигель К. Л. О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия. Сборник переводов «Математика», 1961, т. 5, № 2, с. 129—155.
30. Зигель К. Л. Об интегралах канонических систем. Сборник переводов «Математика», 1961, т. 5, № 2, с. 103—117.
31. Каменков Г. В. Избранные труды, т. 2. М.: Наука, 1972.
32. Коддингтон Э. А., Ливенсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
33. Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами.— Доклады Академии наук СССР, 1950, т. 73, № 3.
34. Куницын А. Л. Геометрическая интерпретация необходимых условий устойчивости треугольных точек либрации общей задачи трех тел.— Celestial Mechanics, 1971, v. 3, № 2, pp. 222—226.
35. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, М.: Гостехиздат, 1953.
36. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. I. Механика. М.: Наука, 1965.
37. Леонтович А. М. Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел.— Доклады Академии наук СССР, 1962, т. 143, № 3, с. 525—529.
38. Лидов М. Л., Лукьянов С. С., Тесленко Н. М. Автоматическая станция в окрестности лунной либрационной точки L_2 : I. Предварительный анализ схемы запуска и управления на галоорбите. Препринт ИПМ АН СССР, № 116, 1974.
39. Лидов М. Л., Вашковьяк М. А., Маркеев А. П. Теория пассивного движения космического аппарата вблизи коллинеарной точки лабрации L_2 системы Земля — Луна. Препринт ИПМ АН СССР, № 56, 1975.
40. Лидов М. Л., Вашковьяк М. А., Маркеев А. П. О точности полуаналитического метода расчета движения КА в окрестности лунной либрационной точки. Препринт ИПМ АН СССР, № 85, 1975.
41. Лидов М. Л., Вашковьяк М. А., Маркеев А. П. Полуаналитический метод расчета движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации.— Космические исследования, 1976, т. 14, № 6.

42. Лукьянов Л. Г. Об устойчивости в первом приближении треугольных лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел.— Бюлл. ИТА, 1969, т. 11, № 10 (133), с. 693.
43. Лукьянов Л. Г. Движение вблизи треугольных лагранжевых решений ограниченной эллиптической задачи трех тел.— Вестник МГУ, Физика и астрономия, 1968, № 2, с. 82—96.
44. Лукьянов Л. Г. Решения, близкие к треугольным лагранжевым.— Вестник МГУ, Физика и астрономия, 1968, № 4, с. 99—103.
45. Лукьянов Л. Г. Влияние возмущающего тела на движение вблизи треугольных лагранжевых решений ограниченной эллиптической задачи трех тел.— Вестник МГУ, Физика и астрономия, 1969, № 1, с. 63—74.
46. Лукьянов Л. Г. О косвенном действии притяжения Солнца на движение вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна.— Вестник МГУ, Физика и астрономия, 1969, № 6, с. 9—15.
47. Лукьянов Л. Г. Об одном способе определения отношения масс Земли и Луны.— Астрономический журнал, 1970, т. 47, № 4, с. 894—901.
48. Ляпунов А. М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954.
49. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
50. Ляпунов А. М. К вопросу об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
51. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966.
52. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
53. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем.— Прикладная математика и механика, 1970, т. 34, вып. 6, с. 997.
54. Маркеев А. П. О нормализации гамильтоновой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— Прикладная математика и механика, 1972, т. 36, вып. 5, с. 805.
55. Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса.— Прикладная математика и механика, 1968, т. 32, вып. 4, с. 738—744.
56. Маркеев А. П. Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел.— Прикладная математика и механика, 1969, т. 33 вып. 1, с. 112—114.
57. Маркеев А. П. Исследование движения в некоторых задачах небесной механики. Кандидатская диссертация, Московский физико-технический институт, 1969.
58. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел.— Прикладная математика и механика, 1973, т. 37, вып. 4.
59. Маркеев А. П. Исследование устойчивости лагранжевых решений плоской эллиптической задачи трех тел. Препринт ИПМ, № 1, 1973, деп. № 5828-73.
60. Маркеев А. П. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.— Прикладная математика и механика, 1969, т. 33, вып. 3, с. 562.
61. Маркеев А. П. О методе точечных отображений и некоторых его приложениях в задаче трех тел. Препринт ИПМ, № 49, 1973, деп. № 6727-73.
62. Маркеев А. П. Об устойчивости треугольных точек либрации в эллиптической ограниченной задаче трех тел.— Прикладная математика и механика, 1970, т. 34, вып. 2, с. 227.

63. Маркеев А. П. Об устойчивости треугольных лагранжевых решений пространственной круговой ограниченной задачи трех тел.— Астрономический журнал, 1971, т. 48, вып. 4, с. 862.
64. Маркеев А. П. Об устойчивости лагранжевых решений пространственной эллиптической задачи трех тел.— Celestial Mechanics, 1973, v. 8, pp. 307—322.
65. Маркеев А. П., Сокольский А. Г. Численное исследование устойчивости лагранжевых решений эллиптической ограниченной задачи трех тел.— Прикладная математика и механика, 1974, т. 38, вып. 1, с. 49.
66. Маркеев А. П., Об устойчивости треугольных точек либрации в системе Солнце — Юпитер.— Астрономический журнал, 1974, т. 51, № 3.
67. Маркеев А. П. О «диффузии Арнольда» в многомерной задаче об устойчивости треугольных точек либрации. Препринт ИПМ АН СССР, № 109, 1974.
68. Маркеев А. П., Сокольский А. Г. Исследование периодических движений, близких лагранжевым решениям ограниченной задачи трех тел. Препринт ИПМ АН СССР, № 110, 1975.
69. Маркеев А. П., Сокольский А. Г. Об устойчивости периодических движений, близких лагранжевым решениям.— Астрономический журнал, 1977, т. 54, № 2.
70. Маркеев А. П., Сокольский А. Г. Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. Препринт ИПМ АН СССР, № 31, 1976.
71. Мерман Г. А. О неустойчивости периодического решения канонической системы с одной степенью свободы в случае главного резонанса. В кн.: «Проблемы движения искусственных небесных тел». М.: Изд-во АН СССР, 1963, с. 18.
72. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
73. Мозер Ю. О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь. Сборник переводов «Математика», 1962, т. 6, вып. 5, с. 51—67.
74. Мустахишев К. М. К вопросу об устойчивости гамильтоновых систем.— Известия Академии наук Каз.ССР, Серия физ.-матем., 1967, № 1, с. 63.
75. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
76. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— Известия вузов, Радиофизика, 1958, т. 1, №№ 1, 2, 5, 6.
77. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, том 2, Киев, 1963.
78. Нехорошев Н. Н. О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. Кандидатская диссертация, Московский государственный университет, 1972.
79. Нехорошев Н. Н. Устойчивые оценки снизу для гладких отображений и для градиентов гладких функций.— Математический сборник, 1973, т. 90, вып. 3.
80. Нехорошев Н. Н. Метод последовательных канонических замен переменных. Добавление к книге Ю. Мозера «Лекции о гамильтоновых системах». М.: Мир, 1973, с. 150—164.
81. Нехорошев Н. Н. О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.— Функциональный анализ, 1971, т. 5, вып. 4, с. 82.
82. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр., т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1972.
83. Рябов Ю. А. О периодических решениях вблизи треугольных точек либрации ограниченной плоской круговой задачи трех тел.— Астрономический журнал, 1952, т. 29, № 5, с. 582—596.

84. Смарт У. Небесная механика. М.: Мир, 1965.
85. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка.— Прикладная математика и механика, 1977, т. 41, вып. 1, с. 24—33.
86. Сокольский А. Г. Исследование устойчивости лагранжевых решений плоской ограниченной задачи трех тел. Дипломная работа, Московский физико-технический институт, 1973.
87. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот.— Прикладная математика и механика, 1974, т. 38, вып. 5, с. 791—799.
88. Сокольский А. Г. Об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел при критическом отношении масс.— Прикладная математика и механика, 1975, т. 39, вып. 2, с. 366—369.
89. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968.
90. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937.
91. Уиттекер Э., Ватсон Д. Курс современного анализа, т. 2. М.: Физматгиз, 1963.
92. Хазин Л. Г. Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов.— Прикладная математика и механика, 1971, т. 35, вып. 3.
93. Хапаев М. М. Обобщение второго метода Ляпунова и исследование некоторых резонансных задач.— Доклады Академии наук СССР, 1970, т. 193, № 1, с. 46—49.
94. Холшевников К. В. Преобразования Ли в небесной механике. В кн.: «Астрономия и геодезия». Томск: Изд-во Томского университета, 1973.
95. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.
96. Шарлье К. Небесная механика. М.: Наука, 1966.
97. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
98. Alan J., Kenneth H. Canonical forms for symplectic and hamiltonian matrices.— Celestial Mechanics, 1974, v. 9, № 2, pp. 213—238.
99. Alfriend K. T., Rand R. M. The stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies.— AIAA Journal, 1969, v. 7, № 6.
100. Anonymous. New natural satellites of the Earth.— Sky and Telescope, 1961, July, p. 10.
101. Anonymous. More about the earth's cloud satellites. — Sky and Telescope, 1961, August, p. 63.
102. Arnold V. I., Avez A. Ergodic problems of classical mechanics. New York, 1968.
103. Bennett A. Characteristic exponents of the five equlibrium solution in the elliptically restricted problem.— Icarus, 1965, v. 4, № 2.
104. Bennett A. Analitical determination of characteristic exponents.— AIAA Paper, 1965, № 65.
105. Birchoff G. D. Surface transformations and their dynamical application.— Acta Mathematica, 1922, v. 43, p. 1.
106. Breakwell J., Pringl R. Progress in Astronautics and Aeronautics: Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics. New York; Acad. Press, 1966, v. 17, pp. 55—73.
107. Breakwell J. V., Kamel A. A., Rather M. J. Station-keeping for a translunar communication station. AAS/AIAA Astrodynamics Conference Vali, Colorado, July, 16—18, 1973.
108. Campbell J. A., Jeffris W. H. Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit.— Celestial Mechanics, 1970, v. 2.

109. Cherry T. M.,On the transformation of Hamiltonian systems of linear differential equations with constant or periodic coefficients.— Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 1927, v. 26, pt. 3, p. 211.
110. Danby J. M. A. Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies — Astr. J., 1964, v. 69, № 2, p. 165.
111. Deprit A., Deprit-Bartholomé. Stability of the triangular Lagrangian points.— Astron. Journ., 1967, v. 72, № 2, p. 173.
112. Deprit A., Henrard J., Rom A. Trojan Orbits, pt. 2. Birkhoff's normalization.— Icarus, 1967, v. 6, pp. 381—406.
113. Deprit A. Canonical transformations depending on a small parameter.— Celestial Mechanics, 1969, v. 1, № 1.
114. Deprit A., Delie A. Trojan orbits. I. d'Alembert series at L_4.— Icarus, 1965, v. 4, № 3, pp. 242—266.
115. Deprit A., Henrard J. A manifold of periodic orbits. — Advances in Astronomy and Astrophysics, New York; London: Academic Press, 1968, v. 3, pp. 1—124.
116. Deprit A., Henrard J., Rom A. Trojan orbits. II. Birkhoff's normalization.— Icarus, 1967, v. 6, № 3, pp. 381—406.
117. Deprit A., Henrard J., Price J., Rom A. Birkhoff's normalization.— Celest. Mech., 1969, v. 1, № 2, pp. 222—251.
118. Deprit A., Price J. F. The computation of characteristic exponents in the planar restricted problem of three bodies;— Astron. J., 1965, v. 70, № 10, pp. 836—846.
119. Deprit A., Henrard J. Natural families of periodic orbits.— Astron. J., 1967, v. 72, № 2, pp. 158—172.
120. Deprit A., Palmore J. Analitical continuation and firstorder stability of the short-period orbits at L_4 in Sun-Jupiter system.— Astron. J., 1966, v. 71, № 2, pp. 94—98.
121. Deprit A., Rabe E., Periodic Trojan orbit for the resonance 1/12.— Astron. J., 1969, v. 74, № 2, pp. 317—320.
122. Deprit A. Limiting orbits around the equilateral centers of libration. — Astron. J., 1966, v. 71, № 2, pp. 77—87.
123. Deprit A., Henrard J. The Trojan manifold-survey and conjectures. in book: G. E. O. Giacaglia (ed.). Periodic orbits, stability and resonances, 1970, Reidel Rublishing Company, pp. 1—18.
124. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum.— Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 1767, t. 11, pp. 144—151.
125. Euler E. A., Yu E. Y. Optimal station-keeping at collinear points.— AIAA Paper, 1969, № 906, pp. 1—7.
126. Farquhar R. W. Station-keeping in the vicinity of collinear libration points with an application to a lunar communications problem. AAS Preprint 66-132, July, 1966.
127. Farquhar R. W. Lunar communications with libration-point satellites.— Journal of Spacecraft and Rockets, 1967, v. 4, № 10, pp. 1383—1384.
128. Farquhar R. W. The control and use of libration-point satellites. Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, SUDAAR, № 350, July, 1968.
129. Farquhar R. W. Future missions for libration-point satellites.— A Publication of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1969, v. 7, № 5, pp. 52—56.
130. Farquhar R. W. Limit-cycle analysis of a controlled libration-point satellite.— Journal of the Astronautical Sciences, 1970, v. 17, № 5, pp. 267—291.
131. Farquhar R. W. A halo-orbit lunar station.— Astronautics and Aeronautics, 1972, v. 10, № 6, pp. 59—63.

132. Farquhar R. W., Kamel A. A. Quasi-periodic orbits about the translunar libration point.— AIAA Paper, 1972, № 72—935, pp. 1—11.
133. Farquhar R. W., Kamel A. A. Quasi-periodic orbits about the translunar libration point.— Celestial Machanics, 1973, v. 7, № 4.
134. Gascheau G. Examen d'une classe d'equations differentielles et application a un cas particulier du probleme des trois corps.— Comptes Rendus, 1843, v. 16, p. 393.
135. Gerding R. B. Rendezvous equations in the vicinity of the second libration point.— Journal of Spacecraft and Rockets, 1971, v. 8, № 3, pp. 292—294.
136. Giacaglia G. E. O. Characteristic Exponents at L_4 and L_5 in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies.— Celestial Mechanics, 1971, v. 4, № 3/4.
137. Giacaglia G. E. O. Perturbation methods in non-linear systems.— Applied Mathematical Science, v. 8, New York: Springer, 1972.
138. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems.— Comm. Pure appl. math., 1964, v. 17, № 4, pp. 509—526.
139. Gröbner W. Die Lie-reihen und ihre anwendungen. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenshaften, 1967.
140. Henrard J. Periodic orbits emanating from a resonaut equilibrium.— Celest. Mech., 1970, v. 1, № 3/4, pp. 437—466.
141. Heppenheimer T. A. Optimal controls for out-of-plane motion about the translunar libration points.— Journal of spacecraft and Rockets, 1970, v. 7, № 9, pp. 1088—1092.
142. Hori G. I. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables.— Astron. Soc., Japan, 1966, v. 18, № 4, pp. 287—296.
143. Kamel A. A. Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter. — Celestial Mechanics, 1969, v. 1, № 2, pp. 190—199.
144. Kamel A. A. Perturbation theory based on Lie transforms and its application to the stability of motion near sun-perturbed Earth-Moon triangular libration points. Nasa, CR 1622, 1970.
145. Kampen E. R., Wintner A. On canonical transformations of Hamiltonian systems.— Amer. J. Math., 1936, v. 58, № 4, p. 851.
146. Kolenkiewicz R., Carpenter L. Stable periodic orbits about the Sun perturbed Earth-Moon traingular points.— AIAA Journal, 1968, v. 6, № 7.
147. Kunitsyn A. L. On the stability of laplace's solutions of the unrestricted three body problem.— Celestial Mechanics, 1974, v. 9, № 4, pp. 471—481.
148. Lagrange J. L. Eassais sur le probléme des trois corps. Paris, 1772.
149. Lancos Cf. C. Eine neue transformation theorie linearer kanonischer gleichungen.— Ann. Physik, 1934, 5 Folge, Bd. 20, S. 653.
150. Lanzano P. Contributions to the elliptic restricted three body problem.— Icarus, 1967, v. 6, № 1.
151. Levi-Civita T. Sorpa alcuni criteri di instabilita.— Ann. mat. pura et appl., 1901, ser. 3, v. 5, p. 221.
152. Littlewood J. E. On the equilateral configuration in the restricted. problem of three bodies.— Proc. London Math. Soc., 1959, v. 3, № 9, pp. 343—372.
153. Littlewood J. E. The Lagrange configuration in celestial mechanics.— Proc. London Math. Soc., 1959, v. 3, № 9, p. 525—543.
154. Louterman G., Roels J. Normalisation des systémes linéaires canoniques et appication au probléme restrint des trois corps. — Celestial Mechanics, 1970, v. 3, № 1, p. 129.
155. Mersman W. A. A new algorithm for the Lie transformation. — Celestial Mechanics, 1970, v. 3, № 1.

156. Mersman W. A. Explicit recursive algorithms for the construction of equivalent canonical transformations.— Celestial Mechanics, 1971, v. 3, № 3.
157. Mozer J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian system.— Comm. Pure Appl. Math., 1958, v. 11, № 1, pp. 81—114.
158. Moser J. Stabilitatsverhalten kanonischer Differential gleichungs systeme.— Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, Math.-Phys., 1955, KL. IIa, № 6, SS. 87—120.
159. Moser J. On the elimination of the irrationality condition and Birkhoff's concept of complete stability.— Boletin Soc. Mat., Mexicane, 1960, pp. 167—175.
160. Nayfeh A. H., Kamel A. A. Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies.— AIAA Journal, 1970, v. 8, № 2.
161. Nayfeh A. H. Characteristic exponents for the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies.— AIAA Journal, 1970, v. 8, № 10.
162. Nicholson F. T. Effect of solar perturbation on motion near collinear Farth-Moon libration points.— AIAA Journal, 1967, v. 5, № 12.
163. Plummer H. C. On periodic orbits in the neighborhood of centres of libration.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1901, v. 62, pp. 6—17.
164. Pontecoulant G. de. Theorie analytique du systeme du monde. Paris: vol. 4, Bachelier, 1846.
165. Rabe E. Determination and survey of periodic Trojan orbits in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1961, v. 66, № 9, pp. 500—513.
166. Rabe E. Additional periodic Trojan orbits and further studies of their stability features.— Astron. J., 1962, v. 67, № 5.
167. Rabe E., Schanzle A. Periodic librations about the triangular solutions of the restricted earth-moon problem and their orbital stabilities.— Astron. J., 1962, v. 67, № 10, pp. 732—739.
168. Raithel W. The role of the cis-lunar libration point in lunar operations. Proceedings of 3d Space Congress, Canaveral Council of Technical Societies, March, 1966.
169. Routh E. J. Proceedings of the London Mathematical Society, 1875, vol. 6.
170. Schechter H. B. Three-dimensional nonlinear stability analysis of the Sun-perturbed Earth-Moon equilateral points.— AIAA Journal, 1968, vol. 6, № 7.
171. Schniad H. The equivalence of von Zeipel mappings and Lie transforms.— Celestial Mechanics, 1970, v. 2, № 1, pp. 114—120.
172. Schmidt D. S. Periodic solutions near a resonant equilibrium of a hamilotonian system.— Celest. Mech., 1974, v. 9, № 1, pp. 81—103.
173. Steg L., Vries J. P. de. Earth-Moon libration points: theory existence and applications.— Space Science Reviews, 1966, v. 5, № 2, pp. 210—233.
174. Steg L., Vries J. P. de. Earth-Moon libration points. Theory existence and applications.— Space Science Reviews, 1966, v. 5, № 2, pp. 210—233.
175. Szebehely V. Theory of orbits. The restricted problem of three bodies. New York; London: Academic Press, 1967.
176. Tapley B. D., Lewallen J. M. Solar influence on satellite motion near the stable Earth-Moon libration points.— AIAA J., 1964, v. 2, № 4.
177. Tapley B. D., Schultz B. E. Some additional results on solar influenced libration point Motion.— AIAA Paper, 1965, № 65—88.
178. Vries J. P. de. Motion of a particle in the vicinity of a triangular libration point in the Earth-Moon systeme Space Math. Part 2. Providence,

R. I. Amer. Math. Soc., 1966, pp. 31—69. (Русский перевод: Экспресс-информация «Астронавтика и ракетодинамика», 1968, № 24, с. 12—48.)
179. Williamson J. On algebraic problem concerning the normal form of linear dinamical systems.— Amer. J. Math., 1936, v. 58, № 1, p. 141.
180. Williamson J. On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics.— Amer. J. Math., 1937, v. 59, № 3, p. 599.
181. Williamson J. An algebraic problem involving the involutory integrals of linear dynamical systems.— Amer. J. Math., 1940, v. 62, № 4, p. 881.
182. Williamson J. The exponential representation of canonical matrices.— Amer. J. Math., 1939, v. 61, № 4, p. 897.
183. Wintner A. On the Linear conservative dynamical systems.— Ann. Mat. pura. Appl., Ser. 4, 1935, t. 13, p. 105.
184. Zhuravlev S. G. Stability of the libration points of a rotating triaxial ellipsoid.— Celestial Mechanics, 1972, v. 6, № 3.
185. Zhuravlev S. G. About stability of libration points of a rotating triaxial ellipsoid in a degenerate case.— Celestial Mechanics, 1973, v. 8, № 1.

А. П. Маркеев

ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ И КОСМОДИНАМИКЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7
Введение 9

Глава 1. **Точки либрации ограниченной задачи трех тел** 17
§ 1. Уравнения движения ограниченной задачи трех тел 17
§ 2. Точки либрации — частные решения ограниченной задачи трех тел 20
§ 3. Об устойчивости точек либрации 24

Глава 2. **Гамильтоновы системы линейных дифференциальных уравнений** 30
§ 1. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами 30
§ 2. Нормальная форма автономной системы линейных гамильтоновых уравнений в случае простых чисто мнимых корней характеристического уравнения 32
§ 3. Общие сведения о линейных системах с периодическими коэффициентами 35
§ 4. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами 37
§ 5. Нормализация гамильтоновой системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами 39
§ 6. Задача о параметрическом резонансе. Линейные гамильтоновы системы, содержащие малый параметр 42
§ 7. Нахождение областей параметрического резонанса в первом приближении по малому параметру 46

Глава 3. **Устойчивость положений равновесия гамильтоновых систем с одной степенью свободы** 52
§ 1. Преобразование Биркгофа 52
§ 2. Теорема Мозера об инвариантных кривых 57
§ 3. Теорема Арнольда—Мозера об устойчивости гамильтоновой системы с одной степенью свободы в общем эллиптическом случае 58
§ 4. Линейная нормализация 59
§ 5. Неустойчивость в случае целого числа 3λ 62
§ 6. Исследование устойчивости в случае целого числа 4λ . . . 64
§ 7. Устойчивость при резонансах произвольного порядка . . . 67

Глава 4. **Устойчивость автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы** 69
§ 1. Постановка задачи 69
§ 2. Исследование устойчивости при резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$ 70
§ 3. Устойчивость при резонансе $\omega_1 = 3\omega_2$ 73

§ 4. Об устойчивости в случае равных частот 77
§ 5. Исследование устойчивости при $c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 = 0$ 85

Глава 5. **Об устойчивости многомерных гамильтоновых систем** 87
§ 1. Устойчивость многомерных гамильтоновых систем для большинства начальных условий. Результаты Арнольда 87
§ 2. Формальная устойчивость. Теорема Брюно 90
§ 3 Оценка скорости диффузии Арнольда. Результаты Нехорошева 94
§ 4. Неавтономная система с двумя степенями свободы. Случай резонанса третьего порядка 97
§ 5. Об устойчивости неавтономной системы с двумя степенями свободы при резонансе четвертого порядка 102

Глава 6. **Метод точечных отображений в задачах нормализации и устойчивости нелинейных гамильтоновых систем** 106
§ 1. Необходимые понятия и определения 106
§ 2. Перенесение теоремы Четаева на точечные отображения . . . 108
§ 3. Разложение отображения в ряд 109
§ 4. Нормализация точечного отображения в окрестности неподвижной точки 112
§ 5. Получение функции Гамильтона по отображению 115
§ 6. Об устойчивости неподвижных точек отображения в случае резонанса 117

Глава 7. **Устойчивость точек либрации в плоской круговой задаче трех тел** 122
§ 1. Функция Гамильтона задачи трех тел 122
§ 2. Краткая предыстория решения задачи об устойчивости лагранжевых решений 123
§ 3. Гамильтониан возмущенного движения 125
§ 4. Решение задачи об устойчивости точек либрации для значений параметра μ из области устойчивости в первом приближении 126
§ 5. Об устойчивости точек либрации при критическом отношении масс 130

Глава 8. **Устойчивость точек либрации в пространственной круговой задаче трех тел** 132
§ 1. Нормальная форма функции Гамильтона 132
§ 2. Устойчивость для большинства начальных условий 134
§ 3. Формальная устойчивость 135
§ 4. Формальная устойчивость точек либрации при критическом отношении масс 143
§ 5. Выводы 145

Глава 9. **Устойчивость точек либрации в плоской эллиптической задаче трех тел** 147
§ 1. Краткая история рассматриваемой задачи 147
§ 2. Линейная нормализация с точностью до первой степени эксцентриситета 149
§ 3. Резонансные кривые 155
§ 4. Резонансы третьего порядка 157
§ 5. Об устойчивости при резонансах четвертого порядка 159
§ 6. Исследование устойчивости при нерезонансных значениях параметров 160
§ 7. Численное исследование при произвольных e и μ 163
§ 8. Обсуждение полученных результатов 169

Глава 10. Об устойчивости точек либрации в пространственной эллиптической задаче трех тел 173

§ 1. Тождественный резонанс 173
§ 2. Алгоритм линейной нормализации с точностью до второй степени эксцентриситета 174
§ 3. Нормальная форма функции Гамильтона 176
§ 4. Исследование устойчивости системы с функцией Гамильтона (3.4) 178
§ 5. Устойчивость точек либрации при малых e 180
§ 6. Неустойчивость точек либрации при малых μ и e 181
§ 7. Результаты численного исследования при произвольных e и μ. Устойчивость лагранжевых решений в системе Солнце—Юпитер 182

Глава 11. Основы метода Депри—Хори в теории возмущений гамильтоновых систем 186

§ 1. Введение 186
§ 2. Ряды Ли как каноническое преобразование 188
§ 3. О теории возмущений Депри 191
§ 4. Упрощение алгоритма Депри 196
§ 5. Формальная техника применения преобразования Ли . . . 199
§ 6. О теории возмущений, основанной на рядах Ли 202

Глава 12. Периодические движения, близкие к треугольным точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел 205

§ 1. Введение 205
§ 2. Три типа периодических движений 206
§ 3. Схема исследования устойчивости 209
§ 4. Орбиты первого приближения 210
§ 5. Построение периодических движений 212
§ 6. Гамильтониан возмущенного движения 215
§ 7. Резонансы 217
§ 8. Линейная нормализация. Параметрический резонанс . . . 221
§ 9. Резонансные кривые третьего и четвертого порядков . . . 227
§ 10. Нелинейная нормализация. Условия устойчивости 228
§ 11. Результаты расчетов 231

Глава 13. О движении космического аппарата вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна с учетом солнечных возмущений 237

§ 1. Влияние солнечных возмущений на движение космического аппарата, помещенного в точку либрации 237
§ 2. О периодических орбитах вблизи L_4. Гамильтониан движения КА в окрестности L_4 251
§ 3. О методе исследования. Предварительное преобразование функции Гамильтона 256
§ 4. Долгопериодическая часть гамильтониана и исключение независимой переменной 259
§ 5. Периодические орбиты и их устойчивость 261

Глава 14. Пассивное движение космического аппарата в окрестности прямолинейной точки либрации L_2 системы Земля—Луна . . 265

§ 1. Введение 265
§ 2. О траекториях линейной задачи 266

§ 3. Уравнения движения КА вблизи L_2 с учетом солнечных возмущений 269
3.1. Постановка задачи (269). 3.2. Вращающаяся система координат (270). 3.3. Безразмерные координаты (271). 3.4. Относительная система координат (272). 3.5. Разложение функции Гамильтона (272). 3.6. Уравнения движения Луны (274). 3.7. «Подвижная точка либрации» (275).

§ 4. Некоторые оценки 277
4.1. Оценки ускорений, действующих на КА (277). 4.2. Вынужденные колебания КА вблизи «подвижной точки либрации», обусловленные гравитационными солнечными возмущениями (278). 4.3. Вынужденные колебания КА, обусловленные силами светового давления (280).

§ 5. Эллиптическая задача 281
5.1. Предварительное преобразование гамильтониана (281). 5.2. Нормализация квадратичной части гамильтониана (284). 5.3. Исключение членов третьей степени относительно координат и импульсов (287). 5.4. Нормализация совокупности членов четвертого порядка (290). 5.5. Общее решение нормализованной системы. Условно-периодические движения (292).

§ 6. Оценка точности построенной теории движения КА 293
6.1. Общие замечания (293). 6.2. Результаты численных экспериментов в эллиптической задаче (294). 6.3. Ошибки теории в случае учета солнечных возмущений (296).

Дополнение. **Точки либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида** 298
§ 1. Уравнения движения 298
§ 2. Точки либрации 300
§ 3. Линейный анализ устойчивости точек либрации 301
§ 4. Результаты нелинейного исследования устойчивости 302

Литература 304