*Е.П.Аксенов*

**ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ**

М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977, 360 стр.

В книге дается систематическое изложение аналитической теории движения искусственных спутников Земли. Подробно рассматриваются возмущения, вызываемые зональными, тессеральными и секториальными гармониками геопотенциала и возмущения, обусловленные притяжением Луны и Солнца, сопротивлением атмосферы и световым давлением. Рассмотрено также влияние других возмущающих факторов. Особое внимание уделяется выводу окончательных рабочих формул, удобных для практических вычислений. Книга содержит ряд таблиц, необходимых для вычисления орбит.

Книга предназначена для специалистов в области небесной механики и астродинамики и для научных работников, занимающихся наблюдениями ИСЗ и их использованием в геодезии и геофизике. Она может служить также пособием для студентов старших курсов и аспирантов.

Предисловие 7

**Глава I. Гравитационное поле Земли 11**

§ 1.1. Притяжение объемного тела 11

§ 1.2. Основные сведения о полиномах Лежандра 13

§ 1.3. Присоединенные функции Лежандра. Общее выражение для сферической функции 15

§ 1.4. Нормированные и полностью нормированные присоединенные функции Лежандра 17

§ 1.5. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям 19

§ 1.6. Различные формулы для потенциала притяжения Земли 24

§ 1.7. Зональные, тессеральные и секториальные гармоники 27

§ 1.8. Постоянные гравитационного поля Земли. Стандартная Земля 29

§ 1.9. Промежуточное гравитационное поле Земли 32

§ 1.10. Геоид 36

§ 1.11. Сила тяжести 41

§ 1.12. Возмущающий потенциал 42

§ 1.13. Замечания 43

**Глава II. Первые интегралы уравнений промежуточного движения 47**

§ 2.1. Дифференциальные уравнения движения искусственного спутника 47

§ 2.2. Интегрирование уравнений промежуточного движения 49

§ 2.3. Первые интегралы 52

§ 2.4. Исследование первых интегралов 54

§ 2.5. Постоянные $a$, $e$, $\delta$ 58

§ 2.6. Корни многочленов $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ 60

§ 2.7. Качественная картина 62

§ 2.8. Частные случаи 65

§ 2.9. Замечания 66

**Глава III. Формулы промежуточного движения 68**

§ 3.1. Эллиптические функции Якоби 68

§ 3.2. Определение координаты $\eta$ 71
§ 3.3. Определение координаты $\zeta$ 73
§ 3.4. Связь между переменными $\theta$ и $\psi$ 75
§ 3.5. Определение координаты $\omega$ 77
§ 3.6. Связь между временем $t$ и переменными $\theta$ и $\psi$ 83
§ 3.7. Постоянная $i$ 87
§ 3.8. Определение $\psi$ для заданного момента времени $t$ 90
§ 3.9. Формула для определения долготы $\omega$ 91
§ 3.10. Формулы для прямоугольных координат 92
§ 3.11. Формулы для скорости 94
§ 3.12. Оценки периодических членов второго порядка 95
§ 3.13. Боковые члены третьего порядка 97
§ 3.14. Сводка формул 98
§ 3.15. Эйлерово и кеплерово движения. Элементы орбиты 99
§ 3.16. Вековые неравенства 102
§ 3.17. Разложение эллиптических функций в тригонометрические ряды 103
§ 3.18. Определение элементов орбиты по начальным условиям 105
§ 3.19. Замечания 109
**Глава IV. Дифференциальные уравнения для эйлеровых элементов промежуточной орбиты** **110**
§ 4.1. Введение 110
§ 4.2. Канонические элементы $A_k$ и $B_k$ 112
§ 4.3. Вычисление величины $A_1$ 113
§ 4.4. Вычисление величины $A_1$ 115
§ 4.5. Элементы $L$, $G$, $H$, $l$, $g$, $h$ 118
§ 4.6. Некоторые другие системы канонических элементов 121
§ 4.7. Задача об устойчивости движения спутника 122
§ 4.8. Аналог теоремы Лапласа 126
§ 4.9. Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов, аналогичные уравнениям Лагранжа 127
§ 4.10. Дифференциальные уравнения, аналогичные уравнениям Ньютона 129
§ 4.11. Еще одна форма дифференциальных уравнений для элементов 134
§ 4.12. Случай кеплеровых элементов 141
§ 4.13. Постановка задачи о возмущениях элементов промежуточной орбиты 144
§ 4.14. Замечания 147
**Глава V. Возмущения от зональных гармоник** **149**
§ 5.1. Возмущающая функция 149
§ 5.2. Коэффициенты $M_n^{(k)}(e)$ 152
§ 5.3. Коэффициенты $N_n^{(k)}(e)$ 155
§ 5.4. Коэффициенты $L_n^{(k)}(s)$ 157

§ 5.5. Выражения для $R'$, $F'$, Ф' 164
§ 5.6. Элементы как функции ν 165
§ 5.7. Соотношение между $t$ и ν 168
§ 5.8. Возмущения элемента $M$ 171
§ 5.9. Сводка формул для возмущений 172
§ 5.10. Возмущения от гармоники m-го порядка 175
§ 5.11. Влияние третьей гармоники 176
§ 5.12. Возмущения от гармоник четвертого и пятого порядков 178
§ 5.13. Вековые возмущения 180
§ 5.14. Случай малых $e$ 182
§ 5.15. Важнейшие долгопериодические неравенства 184
§ 5.16. Дальнейшее развитие теории 186
**Глава VI. Возмущения от тессеральных и векториальных гармоник 188**
§ 6.1. Постановка задачи 188
§ 6.2. Возмущения от второй векториальной гармоники 191
§ 6.3. Возмущения от гармоник третьего порядка 193
§ 6.4. Разложение возмущающей функции в общем случае 197
§ 6.5. Функции наклона $A_{nq}^{k}(i)$ 200
§ 6.6. Функции эксцентриситета $B_{nq}^{k}(e)$ 204
§ 6.7. Структура возмущений. Резонансные неравенства 206
§ 6.8. Замечания 211
**Глава VII. Лунно-солнечные возмущения 212**
§ 7.1. Постановка задачи 212
§ 7.2. Выражения для $R'$, $F'$, Ф' 214
§ 7.3. Дифференциальные уравнения для возмущений эйлеровых элементов 218
§ 7.4. Вековые возмущения 220
§ 7.5. Долгопериодические возмущения первого класса 221
§ 7.6. Долгопериодические возмущения второго класса 223
§ 7.7. Долгопериодические возмущения третьего класса 225
§ 7.8. Долгопериодические возмущения четвертого класса 227
§ 7.9. Возмущения элемента $M$ 230
§ 7.10. Определение элементов Луны и Солнца 232
§ 7.11. Некоторые свойства возмущений 234
§ 7.12. Замечания 237
**Глава VIII. Возмущения от сопротивления атмосферы 239**
§ 8.1. Введение 239
§ 8.2. Плотность атмосферы 240
§ 8.3. Сила сопротивления атмосферы 246
§ 8.4, Функции Бесселя мнимого аргумента 247
§ 8.5, Уравнения для возмущений элементов $a$, $p$, $i$ 248
§ 8.6. Уравнения для вековых возмущений элементов $a$, $p$, $i$ 251
§ 8.7. Асимптотические формулы для возмущений элементов $a$, $p$, $e$, $i$, $n$ 255

§ 8.8. Вывод уравнений для возмущений угловых элементов 257
§ 8.9. Сводка окончательных результатов 259
§ 8.10. Комбинированное влияние сопротивления атмосферы и сжатия Земли 261
§ 8.11. Влияние вращения атмосферы 263
§ 8.12. Другие возмущения от сопротивления атмосферы 267
§ 8.13. Формулы для определения плотности воздуха 271
§ 8.14. Продолжительность жизни спутника 273
§ 8.15. Общий обзор. Дальнейшее развитие 277
**Глава IX. Возмущения от светового давления 280**
§ 9.1. Давление света 280
§ 9.2. Возмущающая функция 285
§ 9.3. Возмущения элементов без учета влияния тени 287
§ 9.4. Теневая функция 290
§ 9.5. Выражение $P_n(\cos\lambda)$ через элементы орбиты 296
§ 9.6. Выражение $P_n(\cos\Phi)$ через элементы орбиты 299
§ 9.7. Уравнения для возмущений элементов с учетом тени 901
§ 9.8. Влияние светового давления на движение спутников 303
§ 9.9. Замечания 306
**Глава X. Другие возмущения. Вычисление возмущенных координат спутника 309**
§ 10.1. Введение 309
§ 10.2. Возмущения, вызываемые прецессией и нутацией экваториальной плоскости Земли 311
§ 10.3. Возмущения от приливной деформации Земли 320
§ 10.4. Влияние притяжения атмосферы 327
§ 10.5. Влияние электромагнитных сил 329
§ 10.6. Релятивистские эффекты 331
§ 10.7. Определение возмущенных координат спутника 332
Приложение 338
Литература 344
Именной указатель 356
Предметный указатель 358

Предметный указатель

Амплитуда (функция) 69
Аномалия истинная 101, 214
- средняя 100, 216, 322
- - в эпоху 101
- эксцентрическая 100
Аргумент перигея 100, 322, 325
- широты 101, 214, 325
Атмосфера стандартная 243
Вариации плотности атмосферы 328
Вектор магнитной напряженности 329
- скорости 329
Влияние вращения атмосферы 263
Возмущения вековые 150, 180, 220, 323, 328
- долгопсриодические 151, 210, 323, 327
- короткопериодические 151, 209, 268

- лунно-солнечные 212, 337
- от гармоник третьего порядка 193
- от прецессии и нутации экваториальной плоскости Земли 311, 337
- от приливной деформации Земли 320
- от светового давления 337
- от секториальных гармоник 188
- от тессеральных гармоник 188
- от электромагнитных сил 329
- первого порядка 146
- резонансные 210, 211
- релятивистские 331
Время запаздывания прилива 325, 326
- звездное гринвичское 47
- регуляризующее 66
Гармоники зональные 8, 27, 202, 337
- секториальные 9, 29, 211, 338
- тесссральные 9, 28, 211, 338
Геоид 36
- промежуточный 36
Геопотеициал 8, 211, 327, 328
Гиперболоид вращения однополостный 63, 64
Горб приливной 325
Гравитационное поле Земли 8, 11
Давление света 281
Движение возмущенное 9, 110, 111
- кеплерово 99, 111, 337
Движение невозмущениое 100
- плоское 65
- полюса 7
- промежуточное 49, 58, 66, 99, 110, 111, 207, 337
- среднее 216, 323—325
- - аномалистическое 102, 123, 207
- - драконическое 123
- - перигея 102, 207, 216
- - сидерическое 123
- - узла 102, 207, 216, 323
- условно-периодическое 64, 105
- эйлерово 99, 100
Дельта амплитуды 69
Деформация приливная Земли 323
Долгота восходящего узла 100
- средняя 325, 337
- узла 214, 216, 322, 325, 337
- - орбиты Луны 327
Задача двух неподвижных центров 35, 99
- - - - обобщенная 8, 35, 99
Запаздывание приливов 325
Заряд электрический 329
Земля стандартная 30
Импульсы обобщенные 111
Интеграл общий 51
- площадей 53
- полный 51
- эллиптический первого рода 69
- - - - полный 69, 72
- энергии 50
Координаты обобщенные 111
- сфероидальные 49, 106, 168
Косинус эллиптический 69
Коэффициент лобового сопротивления 246
Коэффициенты Ганзена 204, 205, 298
Критические значения наклона 235
Меридиан гринвичский 24
- местный 325
Метод вариации произвольных постоянных 111
- Гамильтона — Якоби 49, 66
- последовательных приближений 98, 107, 166
Модель атмосферы аналитическая 242
Модель атмосферы динамическая 243
- - локальная 244
- - статическая 244
Моменты инерции 22
Наклон 214
- критический 235, 290
- к эклиптике 325
- орбиты 100, 326

- эклиптики к экватору 325
Невязки 103
Неравенства вековые 97, 102, 327
- долгопериодические 184, 209, 210
- короткопериодические 209, 210
- периодические 9
- резонансные 206, 210, 211
- с периодом около суток 210
Несферичность Земли 7, 327
Нутация экваториальной плоскости 9
Операция основная 131
Орбита кеплерова 101, 112
- круговая 321
- промежуточная 8, 9, 49, 99, 101—103, 105, 110
- эйлерова 99, 102
Орбиты круговые 65, 66
- полярные 66
- эллипсоидальные 65
- эллиптические 65, 66
Параллакс 213
Параметр орбиты 324
Перигей 100
Период аномалистический 122
- драконический 122
- обращения линии узлов орбиты Луны 327
- сидерический 123
Плоскость экватора 325
Плотность атмосферы 240, 328, 340
Площадь миделева сечения 246
Поле гравитационное Земли 29
- - нормальное 44
- - промежуточное 34
- Земли магнитное 329
Полиномы Лежандра 13, 14, 18, 24
Полуось большая 100, 216, 323
Постоянная притяжения 11
- солнечная 281
Постоянные гравитационного поля Земли 30, 31
Потенциал аномальный 44
- возмущающий 42
- магнитного поля 329
- притяжения 8, 11, 13, 327, 329
Преобразование каноническое 112
Прецессия экваториальной плоскости 9
Приливы лунно-солнечные 7, 9, 325, 327
Притяжение атмосферы 9, 327, 328
- внешнего тела 212
- Луны и Солнца 8
- объемного тела 11
Продолжительность жизни спутника 273, 276
Радиус средний экваториальный 21, 24
Разложение возмущающей функции 197
- потенциала 19
Релятивистский эффект 9
Решение условно-периодическое 112
Ряд тригонометрический 71, 103—105
- Фурье 216
Световое давление 8, 9
Сила тяжести 41
Силы электромагнитные 9
Синус эллиптический 69
Скобки Лагранжа 136
Скорость вращения Земли угловая 47, 188, 207, 325
Сопротивление атмосферы 8, 9
Спутник суточный 211
Тело возмущающее 212, 213, 216
Теневой эффект 9
Теорема Виета 60, 62
- Дирихле 13
- Лапласа 127
- сложения 17
Теория условно-периодических движений 112
Точка весеннего равноденствия 212
Треппе приливное 325
Угловое расстояние перигея от узла 216
Узел восходящий 325

Уравнение Гамильтона — Якоби 50
- Лапласа 12
- Лежандра 15
- Пуассона 12
Уравнения возмущенного движения 48
- дифференциальные промежуточного движения 9, 49
- для возмущений эйлеровых элементов 218
- - эйлеровых элементов 110
- - элементов промежуточного движения 9, 207
- канонические 111
- Лагранжа 141
- невозмущенного движения 49
- Ньютона 142
Условие Гольдера 12
Устойчивость движения спутника 122, 125
Фаза запаздывания прилива 326
Формула Лапласа 15
- Родрига 13
Формулы для прямоугольных координат спутника 92
- - скорости спутника 94
Функции Бесселя мнимого аргумента 247
- наклона 200, 202, 203, 211
- сферические 8, 13, 327, 329
- эксцентриситета 199, 204, 206, 211
- эллиптические 68, 103
Функция возмущающая 48, 110, 149, 206, 207, 211—213, 285, 321
- Лежандра 17
- - присоединенная 15
- - - нормированная 18, 24
- - - полностью нормированная 18
- производящая 15
- силовая 8, 11, 110
- сферическая 16
- тени 9, 291
Шкала высот 244, 342
Эксцентриситет 64, 100, 211, 214, 216, 323
Электромагнитные силы 329
Элементы Делоне 111, 143
- канонические 111, 112, 121
- - Якоби 111
- кеплеровы 58, 101, 337
- Луны и Солнца 233
- неугловые 239
- орбиты 58, 106, 216
- промежуточной орбиты 99, 110, 216
- Пуанкаре 111, 144
- средние 102
- угловые 239
- эйлеровы 101, 110
Эллипс 100
Эллипсоид вращения сжатый 63—65
Эффект приливной деформации 327
- суточный 241
- широтный 269
Эффекты резонансные 211

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение движения искусственных спутников Земли представляет интерес не только для специалистов по астродинамике, занимающихся прогнозированием движения ИСЗ и проектированием их орбит. Проблема эта ныне интересует широкий круг ученых, и прежде всего астрономов, геофизиков и геодезистов. Определение постоянных гравитационного поля Земли и параметров земной атмосферы, изучение лунно-солнечных приливов и движения полюса — вот неполный перечень задач, которые уже сейчас успешно решаются с помощью наблюдений ИСЗ. Можно думать, что в будущем появятся и другие не менее итересные и важные задачи, решение которых будет тесно связано с использованием наблюдений искусственных спутников.

Для исследования движения искусственных спутников Земли используются все методы небесной механики: численные, аналитические и качественные. Особое место среди них занимают аналитические методы, которые могут конкурировать по точности с методами численного интегрирования, а вместе с качественными позволяют нарисовать довольно полную картину движения спутника на больших интервалах времени. Очень важно, что они дают возможность просто и наглядно охарактеризовать влияние каждого фактора, действующего на движение спутника. Эта книга посвящена аналитической теории движения искусственных спутников. В ней мы не будем касаться численных методов, но затронем некоторые качественные вопросы. Основное внимание мы уделим выводу и анализу рабочих формул, необходимых для практических вычислений.

Как известно, на движение искусственных спутников Земли оказывает влияние целый ряд возмущающих факторов. Важнейшими из них являются несферичность Земли,

сопротивление атмосферы, притяжение Луны и Солнца и световое давление. Однако наибольшие возмущения в движении близких спутников связаны с одним фактором, а именно со второй зональной гармоникой потенциала притяжения Земли. Она вызывает возмущения, которые в сотни и тысячи раз превосходят неравенства от других возмущающих сил. Поэтому, как и в теории Луны, здесь следует выделить главную проблему. Эта проблема заключается в интегрировании дифференциальных уравнений движения, правые части которых составлены с учетом лишь первых двух гармоник геопотенциала. Решение главной проблемы составляет первый этап построения аналитической теории движения ИСЗ. Второй этап состоит в определении остальных, уже менее значительных возмущений.

Главная проблема в теории ИСЗ может быть решена двумя способами: во-первых, с помощью классических методов возмущений и, во-вторых, путем построения промежуточных орбит на базе некоторых аппроксимирующих выражений для геопотенциала, допускающих интегрирование дифференциальных уравнений движения в замкнутой форме. Поскольку результаты применения классических методов приведены во многих монографиях по небесной механике *), в нашей книге мы ограничимся изложением второго способа. При этом в основу построения промежуточных орбит будет положена обобщенная задача двух неподвижных центров, силовая функция которой включает в себя как вторую, так и третью зональную гармонику геопотенциала и позволяет проинтегрировать уравнения движения в квадратурах.

По своему содержанию книга разделена на 10 глав. Первая глава имеет в известной степени вводный характер. В ней приводятся основные сведения из теории потенциала, выводится разложение потенциала притяжения Земли по сферическим функциям, даются различные формы записи геопотенциала, используемые на практике. Здесь же вводится понятие о промежуточном гравитационном поле Земли.

---

*) См., например, книгу Г. А. Чеботарева «Аналитические и численные методы небесной механики» и книгу Д. Брауэра и Дж. Клеменса «Методы небесной механики».

Вторая и третья главы посвящены решению главной проблемы в теории спутника — построению промежуточной орбиты. В них проводится интегрирование дифференциальных уравнений промежуточного движения, подробно исследуются первые интегралы этих уравнений, дается качественная картина. Особое внимание уделяется выводу всех необходимых формул, описывающих промежуточную орбиту.

В четвертой главе выводятся различные формы дифференциальных уравнений для элементов промежуточного движения. Дается общий метод решения этих уравнений, позволяющий находить все возмущения в движении спутника, которые не были учтены при построении промежуточной орбиты. Приводятся также некоторые качественные исследования возмущенного движения спутника.

В последующих трех главах излагается теория гравитационных возмущений. Здесь последовательно определяются возмущения элементов орбиты спутника, вызываемые зональными, тессеральными и секториальными гармониками геопотенциала, и возмущения, обусловленные притяжением Луны и Солнца.

Восьмая глава посвящена исследованию влияния сопротивления атмосферы на движение ИСЗ. Наиболее подробно рассмотрены вековые возмущения и общая эволюция орбиты спутника. Более кратко изложены периодические неравенства.

В девятой главе дается изложение теории возмущений от светового давления. Центральным местом здесь является введение так называемой теневой функции, которая позволяет получить аналитические выражения для возмущений с учетом теневого эффекта.

В последней, десятой главе рассматриваются возмущения, обусловленные остальными возмущающими факторами. К ним относятся прецессия и нутация экваториальной плоскости, лунно-солнечные приливы, электромагнитные силы, притяжение атмосферы и, наконец, релятивистские эффекты. В заключительном параграфе этой главы приводится общая схема вычисления возмущенных координат спутника.

Написанию этой книги способствовали лекции для студентов и аспирантов, которые автор читал на протяжении нескольких лет в Московском университете. В книге

использованы публикации как отечественных, так и зарубежных ученых. Значительное место занимают исследования самого автора. Однако многие интересные работы в ней не нашли своего отражения. Чтобы как-то восполнить этот пробел, автор включил в каждую главу специальный параграф, в котором дается общая характеристика полученных результатов и приводятся ссылки на литературные источники.

В книге использована следующая нумерация формул. В номере формулы первое число соответствует главе, второе — параграфу, третье — порядковому номеру формулы внутри параграфа. Нумерация параграфов — двухступенчатая: первое число в номере параграфа соответствует главе, второе — порядковому номеру параграфа внутри главы. Ссылки на литературные источники имеют собственную нумерацию в каждой главе.

В заключение автор благодарит своих друзей и коллег Е. А. Гребеникова и В. Г. Демина, добрые советы которых ускорили работу над книгой. Автор благодарен также своим ученикам и коллегам С. Н. Вашковьяк, Н. В. Емельянову, Б. Н. Носкову, И. П. Прохоровой, В. С. Уральской и В. М. Чепуровой за замечания и помощь при подготовке рукописи к печати.

*Автор*

ГЛАВА I

# ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

## § 1.1 Притяжение объемного тела

Рассмотрим задачу о притяжении материальной точки $P$ единичной массы некоторым телом $M$. Будем предполагать, что тело имеет произвольную форму, а плотность распределения масс внутри него является кусочно-непрерывной функцией координат.

Возьмем прямоугольную, жестко связанную с телом систему координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс тела (рис. 1). Тогда *потенциал притяжения* или *силовая функция* тела $M$ в точке $P$ с координатами $\xi$, $\eta$, $\zeta$ будет даваться формулой

$$U = f \iiint_T \frac{\varkappa\, d\tau}{\Delta}, \qquad (1.1.1)$$

где $f$ — постоянная притяжения,

$$\Delta = \sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}$$

есть расстояние точки $P$ от текущей точки $P'$ с координатами $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, в которой находится элемент объема $d\tau$, а интеграл берется по всему объему $T$, занятому притягивающим телом.

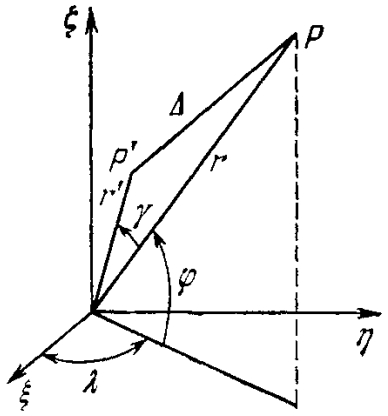


Рис. 1. Система координат.

Если через $r$ и $r'$ обозначить радиусы-векторы точек $P$ и $P'$, а через $\gamma$ — угол между ними, то для $\Delta$ и $\gamma$ будем иметь

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}, \qquad (1.1.2)$$

$$\cos\gamma = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{rr'}. \qquad (1.1.3)$$

Потенциал $U$ обладает следующими свойствами *):

1) *потенциал $U$ есть функция, непрерывная во всем пространстве, обращающаяся в нуль в бесконечности, причем*

$$\lim_{r\to\infty}(rU) = fm, \tag{1.1.4}$$

*где $m$ — масса тела,*

2) *частные производные первого порядка потенциала $U$ по координатам являются непрерывными функциями во всем пространстве, обращающимися в нуль в бесконечности,*

3) *если через $X$, $Y$, $Z$ обозначить проекции силы притяжения точки $P$ телом $M$ на координатные оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, то во всем пространстве*

$$X = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \tag{1.1.5}$$

4) *во внешнем относительно тела $M$ пространстве потенциал $U$ удовлетворяет уравнению Лапласа:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0, \tag{1.1.6}$$

5) *внутри тела $M$ потенциал $U$ удовлетворяет уравнению Пуассона:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -4\pi f\varkappa.$$

Первые четыре свойства легко доказываются, когда плотность $\varkappa$ — кусочно-непрерывная функция. Для доказательства же свойства 5 требуется наложить на плотность более жесткое условие. Наиболее общим таким условием является условие Гольдера. Плотность $\varkappa$ удовлетворяет условию Гольдера, если точку $P$, лежащую внутри тела, можно заключить в такой объем, что для любых двух точек $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ и $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ этого объема имеет место следующее неравенство:

$$|\varkappa(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) - \varkappa(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)| < A\rho^{\alpha},$$

*) Подробнее о теории потенциала см. книги Г. Н. Дубошина [1], [2], М. Ф. Субботина [3], Л. Н. Сретенского [4].

где

$$\rho = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2},$$

а $A$ и $\alpha$ — постоянные, причем $0 < \alpha < 1$.

Очевидно, это условие будет выполнено, если плотность имеет непрерывные частные производные первого порядка.

Перечисленные свойства называются *характеристическими*, ибо согласно *теореме Дирихле* они вполне определяют потенциал притяжения тела, а поэтому могут быть использованы для его практического определения.

Второй способ нахождения потенциала заключается в непосредственном вычислении интеграла (1.1.1). Однако в конечном виде этот интеграл берется только в некоторых частных случаях, таких, например, как случай однородного шара или шара с концентрическим распределением плотности и случай однородного двухосного или трехосного эллипсоида. Так, для концентрического шара потенциал дается формулой

$$U = \frac{fm}{r}, \tag{1.1.7}$$

где $m$ — масса шара.

Если же на форму тела и распределение масс внутри него не накладывается никаких ограничений, кроме тех, которые были сделаны в начале этого параграфа, интеграл (1.1.1) можно вычислить только при помощи ряда. Наиболее распространенным в настоящее время разложением для потенциала является разложение по сферическим функциям. Применение сферических функций, как мы увидим в § 1.5, позволяет получить довольно простую и удобную для практических приложений аналитическую формулу для потенциала.

## § 1.2. Основные сведения о полиномах Лежандра

*Полином Лежандра* $P_n(z)$ порядка $n$ можно определить формулой

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}, \tag{1.2.1}$$

носящей название *формулы Родрига*.

Для первых $P_n(z)$ имеем

$$\left.\begin{aligned} P_0(z) &= 1, \\ P_1(z) &= z, \\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(-1+3z^2), \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(-3z+5z^3), \\ P_4(z) &= \frac{1}{8}(3-30z^2+35z^4), \\ P_5(z) &= \frac{1}{8}(15z-70z^3+63z^5), \\ P_6(z) &= \frac{1}{16}(-5+105z^2-315z^4+231z^6). \end{aligned}\right\} \quad (1.2.2)$$

Из формулы (1.2.1) легко получается следующее общее выражение для $P_n(z)$:

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^{h} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!\,(n-r)!\,(n-2r)!} z^{n-2r}, \quad (1.2.3)$$

где $h = \frac{n}{2}$ или $h = \frac{n-1}{2}$, смотря по тому, которое из этих чисел целое.

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения

$$(n+1)\,P_{n+1}(z) - (2n+1)\,zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0. \quad (1.2.4)$$

В дальнейшем нам потребуются также следующие формулы:

$$(1-z^2)\frac{dP_n(z)}{dz} = nP_{n-1}(z) - nzP_n(z), \quad (1.2.5)$$

$$\frac{dP_{n+1}(z)}{dz} - \frac{dP_{n-1}(z)}{dz} = (2n+1)\,P_n(z). \quad (1.2.6)$$

Отметим некоторые свойства полиномов Лежандра *):

1) полином Лежандра является четной или нечетной функцией в зависимости от того, четна или нечетна его

*) Подробное изложение теории полиномов Лежандра можно найти в монографии Е. Гобсона [5], в книге Э. Т. Уиттекера и Дж. Н. Ватсона [6] и в книге А. Ф. Никифорова и В. Б. Уварова [34].

степень, так что

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z),$$

2) на границах интервала $[-1, +1]$ полином Лежандра принимает следующие значения:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n,$$

3) для любого $z$ из промежутка $(-1, +1)$

$$|P_n(z)| < 1 \qquad (n > 0). \tag{1.2.7}$$

4) при больших $n$ имеется следующая оценка:

$$|P_n(z)| < \sqrt{\frac{\pi}{2n(1-z^2)}}; \tag{1.2.8}$$

5) полином Лежандра можно представить формулой

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n \, d\varphi, \tag{1.2.9}$$

носящей имя Лапласа,

6) производящей функцией для $P_n(z)$ является функция $(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-1/2}$, так что

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(z), \tag{1.2.10}$$

7) полином Лежандра удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(1-z^2)\frac{d^2P_n}{dz^2} - 2z\frac{dP_n}{dz} + n(n+1)P_n = 0, \tag{1.2.11}$$

которое называется *уравнением Лежандра*.

## § 1.3. Присоединенные функции Лежандра. Общее выражение для сферической функции

*Присоединенную функцию Лежандра* $P_n^{(k)}(z)$ порядка $n$ и индекса $k$ можно определить формулой

$$P_n^{(k)}(z) = (1-z^2)^{k/2}\frac{d^k P_n(z)}{dz^k}, \tag{1.3.1}$$

где $P_n(z)$ — полином Лежандра.

При помощи равенств (1.2.2) из формулы (1.3.1) легко находим явные выражения для нескольких первых $P_n^{(k)}(z)$:

$$\left.\begin{aligned}
P_2^{(2)} &= 3(1-z^2),\\
P_3^{(1)} &= \frac{3}{2}(-1+5z^2)(1-z^2)^{1/2},\\
P_3^{(2)} &= 15z(1-z^2),\\
P_3^{(3)} &= 15(1-z^2)^{3/2},\\
P_4^{(1)} &= \frac{5}{2}(-3z+7z^3)(1-z^2)^{1/2},\\
P_4^{(2)} &= \frac{15}{2}(-1+7z^2)(1-z^2),\\
P_4^{(3)} &= 105z(1-z^2)^{3/2},\\
P_4^{(4)} &= 105(1-z^2)^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.2)$$

Для вычисления $P_n^{(k)}(z)$ высших порядков можно воспользоваться следующими рекуррентными соотношениями:

$$(n+2-k)P_{n+2}^{(k)}(z) - (2n+3)zP_{n+1}^{(k)}(z) + (n+k+1)P_n^{(k)}(z) = 0,$$

$$P_n^{(k+2)}(z) - \frac{2(k+1)z}{\sqrt{1-z^2}}P_n^{(k+1)}(z) + (n-k)(n+k+1)P_n^{(k)}(z) = 0.$$

При этом достаточно пользоваться только первой формулой, принимая за исходные данные

$$P_{k-1}^{(k)} = 0, \quad P_k^{(k)} = 1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2k-1)(1-z^2)^{k/2}. \qquad (1.3.3)$$

Полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра являются составными элементами сферических функций. Функции двух аргументов $\theta$ и $\psi$

$$P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\psi \quad \text{и} \quad P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\psi.$$

называются *элементарными сферическими функциями*, а *сферическая функция* $Y_n(\theta, \psi)$ *порядка* $n$ определяется формулой

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\psi + B_{nk}\sin k\psi],$$

где $A_{nk}$ и $B_{nk}$ — произвольные постоянные.

Функция $Y_n$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\psi^2}+n(n+1)Y_n=0,$$

а присоединенная функция Лежандра $P_n^{(k)}(z)$ является одним из решений уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+\left[n(n+1)-\frac{k^2}{1-z^2}\right]y=0,$$

которое при $k=0$ переходит в уравнение Лежандра.

Приведем теперь формулу, которая играет важную роль в теории сферических функций и их приложениях. Она имеет вид

$$P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\omega)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')+$$
$$+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(\cos\theta)P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\omega, \qquad (1.3.4)$$

и носит название *теоремы сложения для полиномов Лежандра.*

Отметим еще одно свойство, которое нам потребуется в дальнейшем. Оно заключается в том, что интеграл по поверхности сферы единичного радиуса от произведения элементарных сферических функций различных порядков и индексов равен нулю, в то время как

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[P_n^{(k)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos k\psi\\ \sin k\psi\end{matrix}\right]^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi=\frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \qquad (1.3.5)$$

Другие свойства сферических функций можно найти в уже упомянутой монографии Е. Гобсона.

## § 1.4. Нормированные и полностью нормированные присоединенные функции Лежандра

В различных приложениях теории потенциала наряду с присоединенными функциями часто используются так называемые нормированные и полностью нормированные присоединенные функции Лежандра. Они вводятся следующим образом. Пусть $P_n^{(k)}(z)$ дается равенствами

(1.3.1) и (1.2.3). Тогда *нормированная присоединенная функция Лежандра* $p'^{(k)}_n(z)$ определится формулой

$$p'^{(k)}_n(z) = \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}\, P^{(k)}_n(z), \tag{1.4.1}$$

*а для полностью нормированной присоединенной функции Лежандра* $p^{(k)}_n(z)$ имеем

$$p^{(k)}_n(z) = \sqrt{2n+1}\sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}\, P^{(k)}_n(z), \tag{1.4.2}$$

или

$$p^{(k)}_n(z) = \sqrt{2n+1}\, p'^{(k)}_n(z). \tag{1.4.3}$$

Таким образом,

$$P^{(k)}_n(z) = (1-z^2)^{k/2}\frac{d^k P_n(z)}{dz^k}, \tag{1.4.4}$$

$$p'^{(k)}_n(z) = \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}\,(1-z^2)^{k/2}\frac{d^k P_n(z)}{dz^k}, \tag{1.4.5}$$

$$p^{(k)}_n(z) = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}}\,(1-z^2)^{k/2}\frac{d^k P_n(z)}{dz^k}, \tag{1.4.6}$$

где $P_n(z)$ — полином Лежандра.

Используемое здесь нормирование имеет следующий смысл. Если для $P^{(k)}_n$ согласно (1.3.5)

$$\int_S \left[P^{(k)}_n(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\psi\right]^2 dS = \frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2\pi}{2n+1}, \tag{1.4.7}$$

то в случае $p'^{(k)}_n$ и $p^{(k)}_n$

$$\int_S \left[p'^{(k)}_n(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\psi\right]^2 dS = \frac{4\pi}{2n+1}, \tag{1.4.8}$$

$$\int_S \left[p^{(k)}_n(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\psi\right]^2 dS = 4\pi, \tag{1.4.9}$$

где $S$ — поверхность сферы единичного радиуса.

## § 1.5. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям

Как и раньше, будем предполагать, что притягивающее тело имеет произвольную форму, а плотность $\varkappa$ является кусочно-непрерывной функцией координат. Тогда в системе координат $O\xi\eta\zeta$, жестко связанной с телом, потенциал притяжения $U$ в точке $P$ согласно § 1.1 будет даваться формулой

$$U = f \iiint_T \frac{\varkappa \, d\tau}{\Delta}, \tag{1.5.1}$$

где $f$ — постоянная тяготения,

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma}, \qquad \cos\gamma = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{rr'},$$

причем $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ — радиус-вектор и координаты точки $P$, а $r'$, $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ — радиус-вектор и координаты точки $P'$, в которой находится элемент объема $d\tau$.

Предполагая, что точка $P$ лежит вне притягивающего тела, разложим $\Delta^{-1}$ в ряд по степеням отношения $r'/r$. Прежде всего, мы имеем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}},$$

а это дает нам возможность применить формулу (1.2.10). При помощи этой формулы находим следующее разложение для $1/\Delta$:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma), \tag{1.5.2}$$

подставляя которое в (1.5.1), получаем

$$U = f \iiint_T \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma) \, \varkappa \, d\tau. \tag{1.5.3}$$

Перейдем теперь к полярным координатам:

$$\xi = r\cos\varphi\cos\lambda, \qquad \xi' = r'\cos\varphi'\cos\lambda',$$
$$\eta = r\cos\varphi\sin\lambda, \qquad \eta' = r'\cos\varphi'\sin\lambda',$$
$$\zeta = r\sin\varphi, \qquad \zeta' = r'\sin\varphi'.$$

Тогда для $\cos\gamma$ найдем

$$\cos\gamma = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda').$$

Для того чтобы выразить правую часть (1.5.3) через полярные координаты, воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра (1.3.4), которая в данном случае выглядит так:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\sin\varphi) P_n(\sin\varphi') + \\ + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin\varphi) P_n^{(k)}(\sin\varphi') \cos k(\lambda-\lambda'). \quad (1.5.4)$$

Поскольку

$$\cos k(\lambda - \lambda') = \cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda',$$

то равенство (1.5.4) можно записать в виде

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\sin\varphi) P_n(\sin\varphi') + \\ + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin\varphi) \cos k\lambda \, [P_n^{(k)}(\sin\varphi') \cos k\lambda'] + \\ + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin\varphi) \sin k\lambda \, [P_n^{(k)}(\sin\varphi') \sin k\lambda'].$$

Если подставить это равенство в формулу (1.5.3), то получим

$$U = f\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\sin\varphi) \int\int_T\int r'^n P_n(\sin\varphi') \varkappa \, d\tau + \\ + f\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(k)}(\sin\varphi) \cos k\lambda \times \\ \times \int\int_T\int \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi') \cos k\lambda' \, \varkappa \, d\tau + \\ + f\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(k)}(\sin\varphi) \sin k\lambda \times \\ \times \int\int_T\int \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi') \sin k\lambda' \, \varkappa \, d\tau. \quad (1.5.5)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} mr_0^n J_n &= -\int\int\int_T r'^n P_n(\sin\varphi')\,\varkappa\,d\tau, \\ mr_0^n C_{nk} &= \int\int\int_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi')\cos k\lambda'\,\varkappa\,d\tau, \\ mr_0^n S_{nk} &= \int\int\int_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi')\sin k\lambda'\,\varkappa\,d\tau, \end{aligned}\right\} \quad (1.5.6)$$

где $m$ — масса тела, $r_0$ —некоторая линейная величина. В случае Земли в качестве $r_0$ удобно принять средний экваториальный радиус. Очевидно, величины $J_n$, $C_{nk}$ и $S_{nk}$ являются безразмерными.

С учетом этих обозначений формула (1.5.5) принимает вид

$$U = -\frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \\ + \frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)\,[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda]. \quad (1.5.7)$$

Коэффициенты $J_n$, $C_{nk}$ и $S_{nk}$ зависят от формы тела и распределения масс внутри него. Рассмотрим первые из них. Пусть в (1.5.6) $n = 0$. Тогда, так как

$$P_0(\sin\varphi') = 1 \quad \text{и} \quad \int\int\int_T \varkappa\,d\tau = m,$$

то

$$J_0 = -1. \quad (1.5.8)$$

Полагая в формулах (1.5.6) $n = 1$ и $k = 1$ и учитывая, что

$$P_1(\sin\varphi') = \sin\varphi', \quad P_1^{(1)}(\sin\varphi') = \cos\varphi',$$

находим

$$mr_0 J_1 = -\int\int\int_T \varkappa r' \sin\varphi'\, d\tau = -\int\int\int_T \zeta'\, dm = -m\zeta_0,$$

$$mr_0 C_{11} = \int\int\int_T \varkappa r' \cos\varphi' \cos\lambda'\, d\tau = \int\int\int_T \xi'\, dm = m\xi_0,$$

$$mr_0 S_{11} = \int\int\int_T \varkappa r' \cos\varphi' \sin\lambda'\, d\tau = \int\int\int_T \eta'\, dm = m\eta_0,$$

где $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ — координаты центра масс тела. Поскольку начало системы координат $O\xi\eta\zeta$ находится в центре инерции тела, то отсюда заключаем, что

$$J_1 = 0, \quad C_{11} = 0, \quad S_{11} = 0. \tag{1.5.9}$$

Если в формулах (1.5.6) положить $n = 2$ и $k = 1$, $k = 2$, то можно легко получить следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} C_{21} &= \frac{E}{mr_0^2}, \quad S_{21} = \frac{D}{mr_0^2}, \\ J_2 &= \frac{2C-(A+B)}{2mr_0^2}, \\ C_{22} &= \frac{B-A}{4mr_0^2}, \quad S_{22} = \frac{F}{2mr_0^2}, \end{aligned}\right\} \tag{1.5.10}$$

где $A$, $B$, $C$ — *главные центральные моменты инерции*; $D$, $E$, $F$ — *произведения инерции*, т. е.

$$A = \int\int\int_T (\eta'^2 + \zeta'^2)\,\varkappa\, d\tau, \quad B = \int\int\int_T (\xi'^2 + \zeta'^2)\,\varkappa\, d\tau,$$

$$C = \int\int\int_T (\xi'^2 + \eta'^2)\,\varkappa\, d\tau, \quad D = \int\int\int_T \eta'\zeta'\,\varkappa\, d\tau,$$

$$E = \int\int\int_T \zeta'\xi'\varkappa\, d\tau, \qquad F = \int\int\int \xi'\eta'\varkappa\, d\tau.$$

На основании (1.5.8) и (1.5.9) формула (1.5.7) принимает следующий окончательный вид:

$$U=\frac{fm}{r}\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)\left[C_{nk}\cos k\lambda+S_{nk}\sin k\lambda\right]\right\}. \tag{1.5.11}$$

Сделаем теперь несколько замечаний.

1. Полученное разложение для потенциала $U$ сходится абсолютно и равномерно при

$$r>\bar{r}, \tag{1.5.12}$$

где $\bar{r}$ — расстояние наиболее удаленной точки поверхности тела от его центра масс. Действительно, поскольку $|P_n(\sin\varphi)|\leqslant 1$, то ряд (1.5.2), а следовательно, и (1.5.3) абсолютно и равномерно сходится, если $r>r'$, где $r'$ — радиус-вектор точки, лежащей внутри или на поверхности тела. Но $\max r'=\bar{r}$. Отсюда и получаем условие (1.5.12).

2. Предположим, что одна из осей координат, скажем, ось $O\zeta$, совпадает с главной центральной осью инерции. Тогда произведения инерции $D$ и $E$ будут равны нулю, а поэтому

$$C_{21}=0 \quad \text{и} \quad S_{21}=0.$$

Если принять, что все три координатные оси совпадают с главными центральными осями инерции, то будет равен нулю также и коэффициент $S_{22}$.

3. При выводе формулы (1.5.11) мы предполагали, что плотность $\varkappa$ является функцией лишь координат. Очевидно, эта формула будет иметь место, если плотность $\varkappa$ зависит также от времени. В случае абсолютно твердого тела, как показывают равенства (1.5.6), коэффициенты $J_n$, $C_{nk}$ и $S_{nk}$ будут постоянными. Если же плотность $\varkappa$ и форма тела зависят от времени, то $J_n$, $C_{nk}$ и $S_{nk}$ будут функциями времени.

## § 1.6. Различные формулы для потенциала притяжения Земли

Пусть прямоугольная, жестко связанная с Землей, правая система координат $O\xi\eta\zeta$ такова, что ее начало находится в центре масс Земли, основная плоскость $\xi\eta$ совпадает с экваториальной плоскостью, ось $O\zeta$ направлена в северный полюс, а ось $O\xi$ пересекает *гринвичский меридиан*. Пусть далее $r$, $\varphi$ и $\lambda$ — радиус-вектор, широта и долгота:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\cos\varphi\cos\lambda, \\ \eta &= r\cos\varphi\sin\lambda, \\ \zeta &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1.6.1}$$

Тогда на основании предыдущего параграфа потенциал притяжения Земли во внешней точке с координатами $r$, $\varphi$, $\lambda$ будет даваться формулой

$$U = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)\left[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda\right]\right\}, \tag{1.6.2}$$

где $f$ — постоянная притяжения, $m$ и $r_0$ — масса и средний экваториальный радиус Земли; $J_n$, $C_{nk}$ и $S_{nk}$ — безразмерные коэффициенты, зависящие от формы Земли и распределения масс внутри нее; $P_n$ и $P_n^{(k)}$ — полином и присоединенная функция Лежандра, причем

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}, \tag{1.6.3}$$

$$P_n^{(k)}(z) = (1-z^2)^{k/2}\frac{d^k P_n(z)}{dz^k}. \tag{1.6.4}$$

Разложение (1.6.2), согласно замечанию 1 § 1.5, сходится абсолютно и равномерно при

$$r > \bar{r},$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор наиболее удаленной точки земной поверхности.

Так как ось $O\zeta$ совпадает с осью вращения Земли, т. е. с одной из главных центральных осей инерции, то на основании замечания 2 § 1.5

$$C_{21} = 0 \quad \text{и} \quad S_{21} = 0.$$

Формула (1.6.2) была рекомендована Комиссией № 7 Международного Астрономического Союза как стандартная форма записи потенциала притяжения Земли. В литературе, однако, широко распространены и другие формулы для потенциала. Отметим здесь главные из них. Прежде всего имеем

$$U = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} J_{nk} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi) \cos k(\lambda - \lambda_{nk}) \right\}, \qquad (1.6.5)$$

где новые коэффициенты $J_{nk}$ и $\lambda_{nk}$ связаны со старыми $C_{nk}$ и $S_{nk}$ равенствами *)

$$\left.\begin{aligned} C_{nk} &= J_{nk} \cos k\lambda_{nk}, \\ S_{nk} &= J_{nk} \sin k\lambda_{nk}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.6.6)$$

или

$$J_{nk} = \sqrt{C_{nk}^2 + S_{nk}^2}, \quad \operatorname{tg} k\lambda_{nk} = \frac{S_{nk}}{C_{nk}}. \qquad (1.6.7)$$

Формула (1.6.5) удобна при теоретических исследованиях.

Заменим теперь в разложении (1.6.2) $P_n^{(k)}$ нормированными присоединенными функциями Лежандра $p_n'^{(k)}$ согласно равенству

$$p_n'^{(k)}(z) = \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}\, P_n^{(k)}(z).$$

---

*) В некоторых работах вместо $J_n$ используются величины $I_n = -J_n$.

Тогда потенциал $U$ запишется в виде

$$U = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n p_n'^{(k)}(\sin\varphi)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda]\right\}, \tag{1.6.8}$$

где коэффициенты $A_{nk}$ и $B_{nk}$ связаны с $C_{nk}$ и $S_{nk}$ соотношениями

$$A_{nk} = \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}}\,C_{nk}, \quad B_{nk} = \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}}\,S_{nk}. \tag{1.6.9}$$

Если, наконец, в разложении (1.6.2) заменить $P_n^{(k)}$ полностью нормированными функциями Лежандра $p_n^{(k)}$:

$$p_n^{(k)}(z) = \sqrt{2n+1}\,\sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}\,P_n^{(k)}(z),$$

то будем иметь еще одну формулу для $U$:

$$U = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n p_n^{(k)}(\sin\varphi)\,[\overline{C}_{nk}\cos k\lambda + \overline{S}_{nk}\sin k\lambda]\right\}, \tag{1.6.10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \overline{C}_{nk} &= \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}}\cdot\frac{C_{nk}}{\sqrt{2n+1}}, \\ \overline{S}_{nk} &= \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}}\cdot\frac{S_{nk}}{\sqrt{2n+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6.11}$$

Формула (1.6.10) часто используется в работах, связанных с определением коэффициентов гравитационного поля Земли.

## § 1.7. Зональные, тессеральные и секториальные гармоники

Рассмотрим структуру разложения потенциала $U$:

$$U = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)\,[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda]\right\}. \tag{1.7.1}$$

Все члены этого разложения можно разделить на три типа. Пусть $k = 0$. Тогда мы будем иметь члены вида

$$-\frac{fm}{r} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi).$$

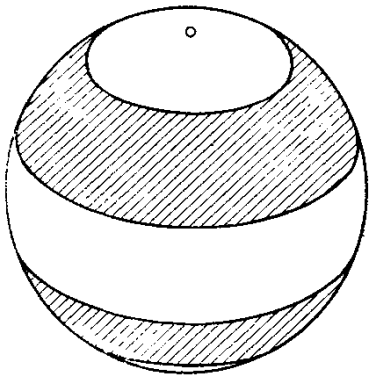

Рис. 2. Положительные и отрицательные значения зональной гармоники для $n = 4$.

Поскольку полином Лежандра $P_n$ имеет $n$ действительных различных и по абсолютной величине меньших единицы корней, то на сфере $P_n(\sin\varphi)$ будет менять знак на $n$ параллелях. Таким образом, сфера разделится на $n+1$ широтных зон, в которых этот член будет попеременно принимать положительные и отрицательные значения. Такой член называется *зональной гармоникой порядка n*. Распределение положительных и отрицательных значений рассматриваемой гармоники для $n = 4$ приводится на рис. 2.

Пусть $0 < k < n$. Тогда мы будем иметь члены вида

$$\frac{fm}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n C_{nk} P_n^{(k)}(\sin\varphi)\cos k\lambda$$

и

$$\frac{fm}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n S_{nk} P_n^{(k)}(\sin\varphi)\sin k\lambda,$$

которые обращаются в нуль на $n - k$ параллелях, определяемых уравнением

$$\frac{d^k P_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^k} = 0,$$

и на $2k$ меридианах:

$$\cos k\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin k\lambda = 0.$$

Следовательно, в этом случае сфера делится на $n + k + 1$ сферических трапеций, в каждой из которых эти члены

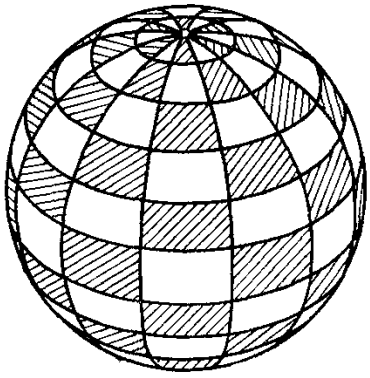

Рис. 3. Положительные и отрицательные значения тессеральной гармоники для $n = 10$ и $k = 6$.

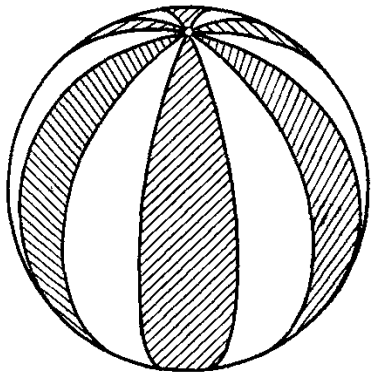

Рис. 4. Положительные и отрицательные значения секториальной гармоники для $n = 6$.

сохраняют знаки. Такие члены называются *тессеральными гармониками порядка n и индекса k*. Распределение положительных и отрицательных значений тессеральной гармоники для $n = 10$ и $k = 6$ указано на рис. 3.

Пусть, наконец, $k = n$, и мы тогда получим члены вида

$$\frac{fm}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n C_{nn} P_n^{(n)}(\sin\varphi)\cos n\lambda$$

и

$$\frac{fm}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n S_{nn} P_n^{(n)}(\sin\varphi)\sin n\lambda.$$

Поскольку

$$\frac{d^n P_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^n} = \text{const},$$

то такие члены обращаются в нуль только на меридианах, для которых

$$\cos n\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin n\lambda = 0.$$

В этом случае сфера делится на $2n$ знакопостоянных секторов, вследствие чего такие члены называются *секториальными гармониками порядка n*. Соответствующее распределение положительных и отрицательных областей для $n = k = 6$ указано на рис. 4.

Рассмотрим теперь механический смысл различных слагаемых разложения (1.7.1). Поскольку первый член представляет собой потенциал шара со сферическим распределением плотности, то все остальные слагаемые характеризуют отличие Земли от тела сферической структуры. Основным из этих слагаемых является вторая зональная гармоника, которая определяет сплюснутость Земли у полюсов, т. е. полярное сжатие Земли. Другие гармоники характеризуют более мелкие детали. Так, тессеральные и секториальные гармоники характеризуют отличие Земли от тела, динамически симметричного относительно оси вращения, а зональные гармоники нечетного порядка и тессеральные гармоники, для которых $n - k$ нечетно, определяют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

## § 1.8. Постоянные гравитационного поля Земли. Стандартная Земля

Числовые значения коэффициентов разложения потенциала притяжения Земли определяются как при помощи гравиметрических и геодезических измерений, так и по наблюдениям Луны и искусственных небесных тел. В последние годы часто используется комбинированный метод, основанный на совместном использовании гравиметрических и спутниковых данных. Начиная с 1958 г. при помощи наблюдений искусственных спутников Земли было выведено несколько десятков систем постоянных геопотенциала *). Наиболее полные результаты были получены в Смитсонианской обсерватории США на основе

*) Подробная сводка этих данных приведена в обзоре Л. П. Пеллинена [7].

фотографических и лазерных наблюдений специальных спутников с привлечением гравиметрических и геодезических измерений. Выведенная в США система постоянных получила название *Стандартной Земли*. Под Стандартной Землей здесь понимается совокупность коэффициентов разложения геопотенциала и геоцентрических координат нескольких пунктов на земной поверхности.

Стандартная Земля I была опубликована в 1966 г. [8] *). Для ее вывода были использованы фотографические наблюдения искусственных спутников, выполненные на 15 камерах Бейкера — Нанна.

В 1970 г. была опубликована Стандартная Земля II. Она является обобщением и уточнением Стандартной Земли I. Здесь были использованы наблюдения 19 спутников, полученные камерами Бейкера — Нанна и лазерными установками. Использовались как обычные, так и синхронные наблюдения. Кроме того, были привлечены гравиметрические измерения и геодезические данные, а также наблюдения зондов. В результате были определены координаты многих наблюдательных станций и все коэффициенты разложения геопотенциала до 16-го порядка включительно и некоторые более высокие гармоники. Точность определения координат многих станций составляет около 10 *м*.

Приведем основные параметры, характеризующие гравитационное поле, соответствующие Стандартной Земле II. Для $fm$ и $r_0$ имеем

$$fm = 3{,}986013 \cdot 10^5 \ км^3 \cdot сек^{-2},$$
$$r_0 = 6378{,}155 \ км.$$

Коэффициенты зональных гармоник до 21-го порядка включительно равны [10], [11]:

$$J_2 = 1082{,}628 \cdot 10^{-6}, \quad J_3 = -2{,}538 \cdot 10^{-6},$$
$$J_4 = -1{,}593 \cdot 10^{-6}, \quad J_5 = -0{,}230 \cdot 10^{-6},$$
$$J_6 = 0{,}502 \cdot 10^{-6}, \quad J_7 = -0{,}361 \cdot 10^{-6},$$
$$J_8 = -0{,}118 \cdot 10^{-6}, \quad J_9 = -0{,}100 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{10} = -0{,}354 \cdot 10^{-6}, \quad J_{11} = 0{,}202 \cdot 10^{-6},$$

*) См. также русский перевод [9].

$$J_{12} = -0{,}042 \cdot 10^{-6}, \quad J_{13} = -0{,}123 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{14} = -0{,}073 \cdot 10^{-6}, \quad J_{15} = -0{,}174 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{16} = 0{,}187 \cdot 10^{-6}, \quad J_{17} = 0{,}085 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{18} = -0{,}231 \cdot 10^{-6}, \quad J_{19} = -0{,}216 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{20} = -0{,}005 \cdot 10^{-6}, \quad J_{21} = 0{,}145 \cdot 10^{-6},$$

Коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник (полностью нормированные) до шестого порядка включительно приводятся в табл. 1. Коэффициенты

Таблица 1

**Коэффициенты $\bar{C}_{nk}$ и $\bar{S}_{nk}$ (полностью нормированные)**

| $n, k$ | $\bar{C}_{nk} \cdot 10^8$ | $\bar{S}_{nk} \cdot 10^8$ | $n, k$ | $\bar{C}_{nk} \cdot 10^8$ | $\bar{S}_{nk} \cdot 10^8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2,2 | 241,29 | —136,41 | 3,1 | 196,98 | 26,015 |
| 3,2 | 89,204 | —63,468 | 3,3 | 68,630 | 143,04 |
| 4,1 | —52,989 | —48,765 | 4,2 | 33,024 | 70,633 |
| 4,3 | 98,943 | —15,467 | 4,4 | —7,9692 | 33,928 |
| 5,1 | —5,3816 | —9,7905 | 5,2 | 61,286 | —35,087 |
| 5,3 | —43,083 | —8,6663 | 5,4 | —26,693 | 8,3010 |
| 5,5 | 12,593 | —59,910 | 6,1 | —9,8984 | 3,7652 |
| 6,2 | 5,4825 | —35,175 | 6,3 | 2,7873 | 4,4626 |
| 6,4 | —0,040342 | —40,388 | 6,5 | —21,143 | —52,264 |
| 6,6 | 8,8693 | —7,4756 | 7,1 | 24,142 | 11,567 |

гармоник более высокого порядка даны в Приложении (табл. 35).

Из приведенных результатов видно, во-первых, что коэффициент $J_2$ имеет порядок $10^{-3}$, в то время как остальные $J_n$ и коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник являются малыми порядка $10^{-6}$ и выше. Следовательно, основным (после первого) членом в разложении потенциала $U$ является вторая зональная гармоника. Именно она должна вызывать самые значительные возмущения в движении спутника.

Во-вторых, эти результаты указывают на то, что коэффициенты $J_n$ и $J_{nk}$ весьма медленно убывают с возрастанием $n$. Это подтверждается также аналитическими исследованиями, проведенными К. В. Холшевниковым [12]. При достаточно общих предположениях относительно

плотности Земли им были получены следующие оценки:

$$|J_n| \leqslant \frac{c_1}{n^{5/2}}, \quad |J_{nk}| \leqslant \frac{c_2}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}},$$

где $c_1$ и $c_2$ — постоянные.

Таким образом, хотя разложение для $U$ абсолютно сходится во всем пространстве $r > \bar{r}$, где $\bar{r}$ — расстояние от центра Земли самой удаленной точки ее поверхности, его сходимость в случае $r_0/r$, близких к единице, является весьма медленной.

## § 1.9. Промежуточное гравитационное поле Земли

Рассмотрим следующую функцию координат $\xi$, $\eta$, $\zeta$:

$$W = \frac{fm}{2}\left\{\frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2}\right\}, \tag{1.9.1}$$

где $f$ и $m$ — постоянная притяжения и масса Земли, $i = \sqrt{-1}$,

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma + i)]^2},$$
$$r_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma - i)]^2},$$

а $c$ и $\sigma$ — вещественные постоянные. Разложим $W$ в ряд по степеням $c/r$, где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Для этого воспользуемся формулой (1.2.10). Тогда

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n (\sigma+i)^n}{r^n} P_n\left(\frac{\zeta}{r}\right), \tag{1.9.2}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n (\sigma-i)^n}{r^n} P_n\left(\frac{\zeta}{r}\right). \tag{1.9.3}$$

Подставляя эти разложения в формулу (1.9.1) и вводя средний экваториальный радиус $r_0$ и геоцентрическую широту $\varphi$, получим

$$W = -\frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty} J_n' \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi), \tag{1.9.4}$$

где

$$J'_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{c}{r_0}\right)^n [(1+i\sigma)(\sigma+i)^n + (1-i\sigma)(\sigma-i)^n]. \quad (1.9.5)$$

Из равенств (1.9.2) и (1.9.3) следует, что разложения для $1/r_1$ и $1/r_2$ абсолютно сходятся в области

$$r > c\sqrt{1+\sigma^2}. \quad (1.9.6)$$

В этой же области будет сходиться и ряд (1.9.4).

Положим в (1.9.5) $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} J'_0 &= -1, \quad J'_1 = 0, \\ J'_2 &= \varkappa^2(1+\sigma^2), \\ J'_3 &= 2\varkappa^3\sigma(1+\sigma^2), \\ J'_4 &= -\varkappa^4(1+\sigma^2)(1-3\sigma^2), \\ J'_5 &= -4\varkappa^5\sigma(1-\sigma^4), \end{aligned}\right\} \quad (1.9.7)$$

где

$$\varkappa = \frac{c}{r_0}.$$

Легко убедиться в том, что все коэффициенты $J'_n$ являются вещественными. Для этого достаточно заметить, что при любом целом $n$ величины $(\sigma+i)^n$ и $(\sigma-i)^n$, входящие в формулу (1.9.5), будут комплексно сопряженными. Поэтому $W$ является вещественной функцией координат $r$ и $\varphi$.

С учетом первых двух равенств (1.9.7) формула (1.9.4) может быть представлена в виде

$$W = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\right\}. \quad (1.9.8)$$

Сравнение этой формулы с формулой (1.6.2) показывает, что функцию $W$ можно интерпретировать как потенциал притяжения некоторого тела, обладающего осевой симметрией. Поэтому поставим следующую задачу: подберем числовые значения постоянных $c$ и $\sigma$ таким образом, чтобы $W$ по возможности была бы наиболее близкой к потенциалу притяжения Земли.

Поскольку в разложении (1.9.8) $m$ — масса Земли, то первый член этого разложения равен первому члену разложения (1.6.2) для потенциала $U$. Если теперь

постоянными $c$ и $\sigma$ распорядиться так, чтобы

$$J_2' = J_2, \quad J_3' = J_3,$$

т. е. выбрать их из условий

$$c^2(1+\sigma^2) = J_2 r_0^2, \quad 2c^3\sigma(1+\sigma^2) = J_3 r_0^3, \tag{1.9.9}$$

то уже первые три члена разложения (1.9.8) будут соответственно равны первым трем членам разложения (1.6.2).

Разрешая уравнения (1.9.9) относительно $c$ и $\sigma$, находим

$$c = r_0\left\{J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2\right\}^{1/2}, \quad \sigma = \frac{J_3}{2J_2}\left\{J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \tag{1.9.10}$$

Так как в случае Земли

$$J_2 > 0, \quad J_2 > \left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2,$$

то из формул (1.9.10) следует, что постоянные $c$ и $\sigma$ будут действительными величинами.

Подставляя в (1.9.10) вместо $r_0$, $J_2$ и $J_3$ их числовые значения из § 1.8, получим

$$c = 209{,}729 \text{ км}, \quad \sigma = -0{,}035647. \tag{1.9.11}$$

При этих значениях для $r_0$, $c$ и $\sigma$ находим

$$J_4' = 1{,}166\cdot 10^{-6}, \quad J_5' = -0{,}006\cdot 10^{-6}, \tag{1.9.12}$$

причем коэффициенты $J_n'$ при $n \geqslant 6$ будут меньше $10^{-9}$. Таким образом, хотя $J_4'$ и $J_4$ не равны друг другу, однако их разность меньше, чем $J_4$. Вследствие малости отношения $c/r_0$ постоянные $J_n'$ будут убывать с возрастанием $n$ быстрее, чем $J_n$. Поэтому разности $J_n - J_n'$ будут иметь порядок $10^{-6}$ и выше.

В дальнейшем гравитационное поле, потенциал которого определяется формулами (1.9.8), (1.9.5), (1.9.10), будем называть *промежуточным гравитационным полем Земли*. Такое название объясняется тем обстоятельством, что потенциал $W$ имеет промежуточный характер между потенциалом истинной Земли и потенциалом Земли шарообразной.

Отметим важнейшие свойства функции $W$.

1. Функция $W$ включает в себя вторую, третью и частично четвертую зональные гармоники потенциала притяжения Земли.

2. Разность $U - W$ содержит члены, порядок которых равен $10^{-6}$ и выше. При этом зональные гармоники, начиная с шестой, а также тессеральные и секториальные гармоники этой разности практически не отличаются от соответствующих членов потенциала притяжения Земли.

3. Функция $W$ зависит от трех постоянных $fm$, $c$ и $\sigma$ (или $fm$, $J_2$ и $J_3$), которые в настоящее время определены с наиболее высокой точностью.

4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в поле с потенциалом $W$ строго интегрируются в квадратурах.

Последнее, чрезвычайно важное для приложений свойство, является следствием того, что $W$ может рассматриваться как силовая функция *задачи двух неподвижных центров* с массами $\frac{m}{2}(1 + i\sigma)$ и $\frac{m}{2}(1 - i\sigma)$, удаленными друг от друга на расстояние, равное $2ic$. А задача двух неподвижных центров, как известно, одна из немногих задач механики, которые интегрируются в квадратурах. В отличие от классической задачи, в которой массы центров и их взаимное расстояние являются действительными величинами, эту задачу мы будем называть в дальнейшем *обобщенной задачей двух неподвижных центров*.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Положим в (1.9.8) и (1.9.5) $\sigma = 0$. Тогда найдем

$$W = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\sin\varphi)\right\}, \qquad (1.9.13)$$

где

$$J'_{2n} = (-1)^{n+1}\left(\frac{c}{r_0}\right)^{2n}.$$

Полученная формула содержит только четные зональные гармоники. Поэтому можно различать два варианта задачи: *симметричный* ($\sigma = 0$) и *несимметричный* ($\sigma \neq 0$). В обоих вариантах силовая функция строго учитывает вторую зональную гармонику — самый существенный (после первого) член потенциала притяжения Земли. Но несимметричный случай имеет преимущество перед симметричным, поскольку он учитывает частично (посредством третьей гармоники) асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Пусть теперь $\sigma = 0$ и $c = 0$. Тогда

$$W = \frac{fm}{r},$$

т. е. в этом случае силовая функция $W$ представляет собой потенциал шарообразной Земли.

## § 1.10. Геоид

Под *геоидом* понимается уровенная поверхность потенциала силы тяжести, которая совпадает на океане с уровнем невозмущенной воды. Поскольку *потенциал силы тяжести* равен сумме потенциала притяжения Земли $U$ и центробежного потенциала, то знание потенциала $U$ позволяет найти уровенную поверхность Земли. Уровенная поверхность, соответствующая Стандартной Земле II, показана на рис. 5.

Рассмотрим теперь уровенную поверхность, которая соответствует промежуточному потенциалу $W$. Такую поверхность можно назвать *промежуточным геоидом*, так как она занимает промежуточное положение между геоидом и сферической поверхностью.

Итак, предположим, что имеется некоторое тело, потенциал которого во внешнем пространстве дается формулой (1.9.8). Пусть, далее, это тело вращается вокруг оси $O\zeta$ с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли $n_\oplus$, и его внешняя поверхность совпадает с уровенной поверхностью. Следуя работе [13], изучим эту поверхность и сравним ее с уровенной поверхностью Земли.

Поскольку центробежный потенциал равен $\frac{1}{2} n_\oplus^2 \times$ $\times r^2 \cos^2 \varphi$, то уровенные поверхности, соответствующие потенциалу $W$, будут даваться уравнением

$$\frac{n_\oplus^2}{2} r^2 \cos^2 \varphi + W(r, \varphi) = C, \qquad (1.10.1)$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Из семейства поверхностей, определяемых уравнением (1.10.1), мы рассмотрим одну поверхность, а именно ту, экваториальный радиус которой равен экваториальному радиусу Земли $r_0$. Тогда, полагая в (1.10.1) $\varphi = 0$ и

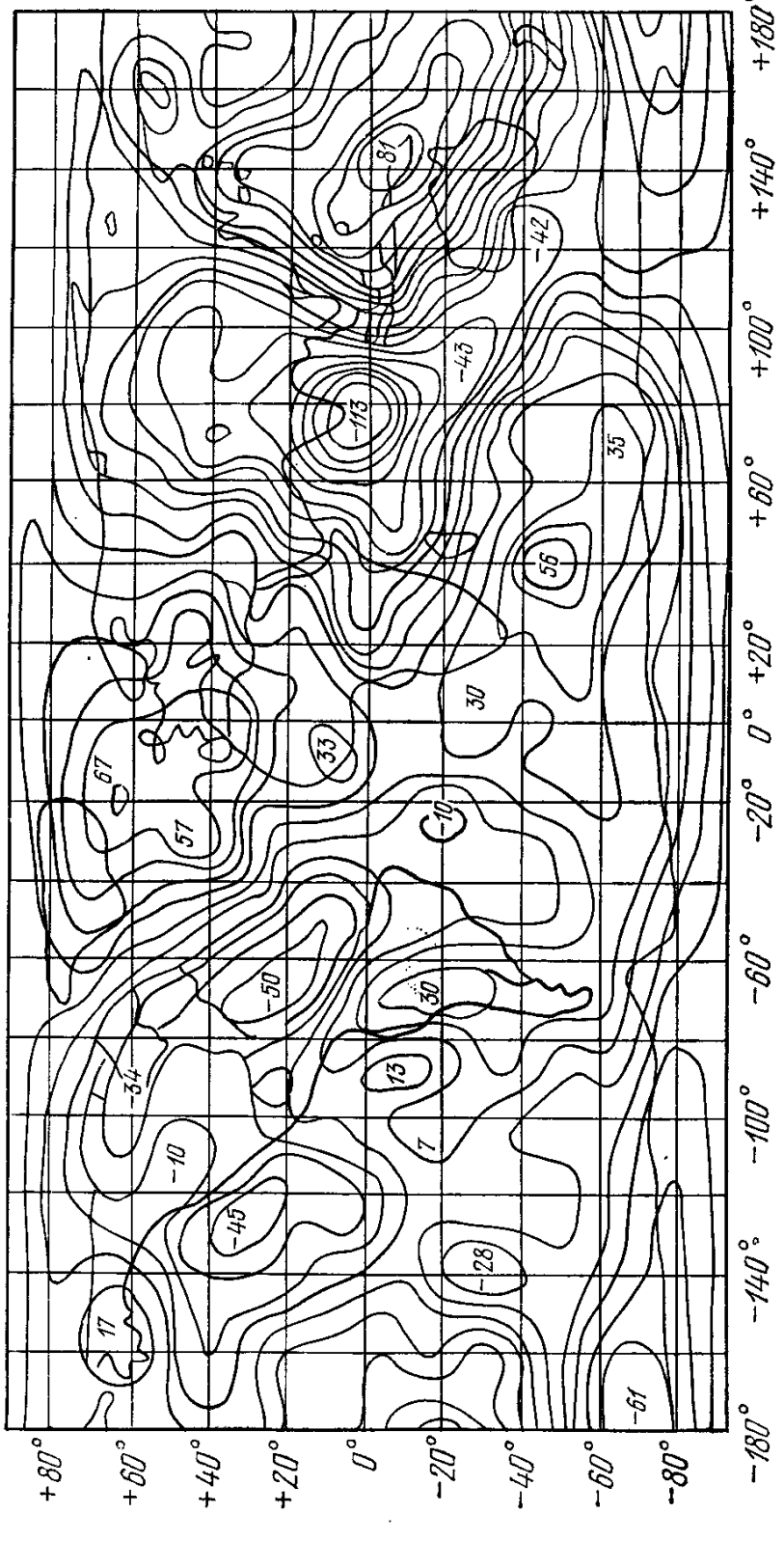


**Рис. 5.** Карта геоида, соответствующего Стандартной Земле II (превышения уровенной поверхности над эллипсоидом относимости с большой полуосью 6378155 *м* и сжатием 1/298,25).

$r = r_0$, получим

$$C = \frac{n_\oplus^2 r_0^2}{2} + W(r_0, 0),$$

или, если воспользоваться формулой (1.9.8),

$$C = \frac{fm}{r_0}\left\{1 + \frac{1}{2}q - \sum_{n=2}^{\infty} J_n' P_n(0)\right\}, \qquad (1.10.2)$$

где

$$q = \frac{n_\oplus^2 r_0^3}{fm}. \qquad (1.10.3)$$

Уравнение (1.10.1) при помощи (1.10.2) и (1.9.8) теперь запишется в виде

$$\frac{fm}{r}\left\{1 + \frac{1}{2}q\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 \cos^2\varphi - \sum_{n=2}^{\infty} J_n'\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\right\} =$$

$$= \frac{fm}{r_0}\left\{1 + \frac{1}{2}q - \sum_{n=2}^{\infty} J_n' P_n(0)\right\}. \qquad (1.10.4)$$

Если принять величины $\varkappa = \frac{c}{r_0}$, $\sigma$ и $n_\oplus$ за малые первого порядка, то $q$ и $J_2'$ будут иметь второй порядок малости, $J_3'$ и $J_4'$ будут четвертого порядка, $J_5'$ и $J_6'$ — шестого порядка и т. д.

Будем искать решение уравнения (1.10.4) в виде ряда по степеням малых $q$ и $J_n'$. Тогда, полагая

$$r = r_0(1 + qx_1 + J_2'x_2 + J_3'x_3 + J_4'x_4 + J_2'^2 x_5 + q^2 x_6 + qJ_2'x_7 + \ldots) \qquad (1.10.5)$$

и подставляя (1.10.5) в (1.10.4), мы получим следующие уравнения для определения $x_k$:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\sin^2\varphi,$$
$$x_2 = P_2(\sin\varphi) - P_2(0),$$
$$x_3 = P_3(\sin\varphi) - P_3(0),$$
$$x_4 = P_4(\sin\varphi) - P_4(0),$$
$$x_5 = x_2^2 - 3x_2 P_2(\sin\varphi),$$
$$x_6 = x_1^2 + x_1\cos^2\varphi,$$
$$x_7 = 2x_1x_2 + x_2\cos^2\varphi - 3x_1 P_2(\sin\varphi).$$

Вычислив отсюда при помощи (1.2.2) величины $x_1, x_2, \ldots, x_7$ и подставив их в (1.10.5), а затем заменив $J_2'$, $J_3'$ и $J_4'$ их выражениями из (1.9.7), мы окончательно до членов четвертого порядка включительно найдем

$$r = r_0 (1 + \beta_1 \sin\varphi + \beta_2 \sin^2\varphi + \beta_3 \sin^3\varphi + \beta_4 \sin^4\varphi), \quad (1.10.6)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1 = 3\varkappa^3\sigma, \quad \beta_3 = -5\varkappa^5\sigma, \\ &\beta_2 = -\frac{3}{2}\varkappa^2(1+\varkappa^2+\sigma^2) - \frac{3}{4}\varkappa^2 q - \frac{1}{2}q(1+q), \\ &\beta_4 = \frac{3}{4}q^2 + \frac{3}{4}\varkappa^2 q - \frac{1}{8}\varkappa^4. \end{aligned}\right\} \quad (1.10.7)$$

Рассмотрим подробнее поверхность (1.10.6). Обозначим через $r_0'$ и $r_0''$ полярные радиусы северного и южного полушарий и введем следующие величины:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{r_0 - r_0'}{r_0}, \\ \alpha'' &= \frac{r_0 - r_0''}{r_0}, \\ \alpha &= \frac{r_0 - \frac{1}{2}(r_0' + r_0'')}{r_0}. \end{aligned}\right\} \quad (1.10.8)$$

Очевидно, $\alpha$ есть среднее сжатие поверхности (1.10.6), а $\alpha'$ и $\alpha''$ суть сжатия северного и южного полушарий.

Полагая в формуле (1.10.6) $\varphi = 90°$ и $\varphi = -90°$, мы из (1.10.8) получим

$$\alpha = \frac{1}{2}q + \frac{3}{2}\varkappa^2(1+\sigma^2) - \frac{1}{4}q^2 + \frac{13}{8}\varkappa^4.$$

$$\alpha' = \alpha + 2\varkappa^3\sigma, \quad \alpha'' = \alpha - 2\varkappa^3\sigma.$$

Таким образом, все три сжатия отличаются друг от друга членами четвертого порядка малости.

Если в формуле (1.10.6) отбросить члены четвертого порядка, то ее можно привести к виду

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{r_0^2} + \frac{\zeta^2}{r_0^2(1-\alpha)^2} = 1.$$

Следовательно, с точностью до членов второго порядка включительно уровенная поверхность совпадает со сжатым эллипсоидом вращения.

Подставим в формулу (1.10.6) числовые значения постоянных $r_0$, $q$, $\varkappa$, $\sigma$ согласно работе [14], и примем, что

$$n_{\oplus} = 0{,}7292123 \cdot 10^{-4}\ сек^{-1}.$$

Тогда, если взять за единицу длины 1 $м$, будем иметь

$$r = 6378165 - 21464 \sin^2\varphi + 74 \sin^4\varphi - \\ - 24 \sin\varphi + 41 \sin^3\varphi. \quad (1.10.9)$$

Для сжатий $\alpha$, $\alpha'$ и $\alpha''$ получаем

$$\alpha = \frac{1}{298{,}19}, \quad \alpha' = \frac{1}{298{,}42}, \quad \alpha'' = \frac{1}{297{,}96}.$$

Превышения поверхности (1.10.9) над эллипсоидом относимости с большой полуосью и сжатием, равными

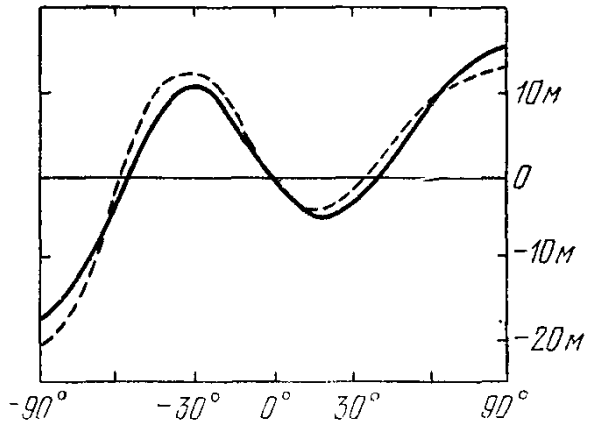


Рис. 6. Превышения геоида и промежуточного геоида над эллипсоидом относимости.

6378165 $м$ и 1 : 298,25 показаны на рис. 6 (пунктирная кривая). На этом же рисунке приводятся высоты геоида, выведенного И. Козаи с учетом зональных гармоник до 14-го порядка включительно [14] (сплошная кривая). Максимальное отклонение поверхности (1.10.9) от геоида И. Козаи составляет всего лишь 3 $м$.

## § 1.11. Сила тяжести

Рассмотрим распределение силы тяжести на уровенной поверхности (1.10.6). Ускорение силы тяжести $g$ дается формулой

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial \varphi}\right)^2}, \qquad (1.11.1)$$

где

$$\overline{W} = \frac{n_\oplus^2}{2} r^2 \cos^2 \varphi + W.$$

Так как второе слагаемое правой части (1.11.1) имеет четвертый порядок малости, то с точностью до членов четвертого порядка включительно будем иметь

$$g = \left|\frac{\partial \overline{W}}{\partial r}\right| \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \overline{W}}{\partial \varphi}\right)^2 \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^{-2}\right\}. \qquad (1.11.2)$$

Вычислив при помощи (1.9.8) частные производные $\overline{W}$ по $r$ и $\varphi$ и подставив их в формулу (1.11.2), мы с принятой точностью найдем

$$g = \frac{fm}{r^2}\left\{1 - q\left(\frac{r}{r_0}\right)^5 \cos^2\varphi - 3J_2'\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 P_2 - \right.$$
$$- 4J_3'\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 P_3 - 5J_4'\left(\frac{r_0}{r}\right)^4 P_4 -$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left[3J_2'\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + q\left(\frac{r}{r_0}\right)^3\right]^2 (\sin^2\varphi - \sin^4\varphi)\right\}.$$

Подставляя сюда вместо $r$ его выражение из (1.10.6) и используя формулы (1.9.7), мы окончательно получим

$$g = g_0 (1 + \alpha_1 \sin\varphi + \alpha_2 \sin^2\varphi + \alpha_3 \sin^3\varphi + \alpha_4 \sin^4\varphi), \qquad (1.11.3)$$

где

$$g_0 = \frac{fm}{r_0^2}\left(1 - q + \frac{3}{2}\varkappa^2 + \frac{3}{2}\varkappa^2\sigma^2 + \frac{15}{8}\varkappa^4\right),$$
$$\alpha_1 = 6\varkappa^3\sigma, \quad \alpha_3 = -10\varkappa^3\sigma,$$
$$\alpha_2 = 2q - \frac{3}{2}\varkappa^2(1 + \sigma^2) + 4q^2 + \frac{9}{2}\varkappa^2 q,$$
$$\alpha_4 = -\frac{7}{4}q^2 - \frac{21}{2}\varkappa^2 q - \frac{21}{8}\varkappa^4.$$

Если подставить в формулу (1.11.3) численные значения для постоянных $fm$, $r_0$, $q$, $\varkappa$ и $\sigma$, то она примет вид

$$g = 978{,}028 + 5{,}246 \sin^2 \varphi - 0{,}062 \sin^4 \varphi - \\ - 0{,}007 \sin \varphi + 0{,}012 \sin^3 \varphi. \quad (1.11.4)$$

Приведем для сравнения формулу для нормальной силы тяжести $g_n$, полученную Гельмертом [15],

$$g_n = 978{,}030 + 5{,}229 \sin^2 \varphi - 0{,}043 \sin^4 \varphi. \quad (1.11.5)$$

На рис. 7 показано поведение разности $g - g_n$ в зависимости от геоцентрической широты. Максимальное значение этой разности составляет в южном полушарии

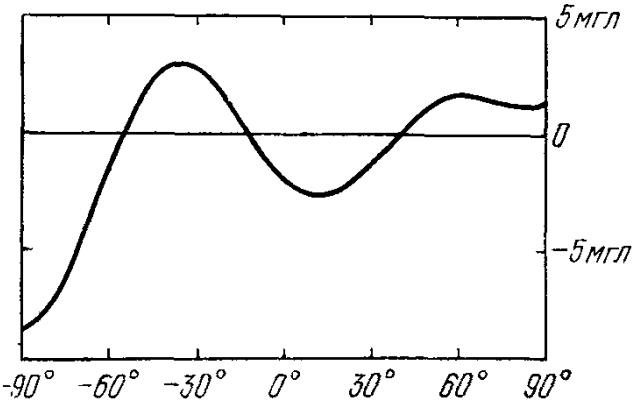


Рис. 7. Разность $g - g_n$ как функция геоцентрической широты.

— 9 *мгл*, а в северном — 2,6 *мгл*. Заметим, что на такую или бóльшую величину отличаются значения силы тяжести, вычисленные по различным нормальным формулам *).

## § 1.12. Возмущающий потенциал

В § 1.9 мы ввели промежуточное гравитационное поле Земли, потенциал $W$ которого определяется формулой (1.9.1) или (1.9.8). Пусть теперь

$$U = W + R_T, \quad (1.12.1)$$

где через $U$, как и раньше, обозначен потенциал притяжения реальной Земли. Тогда $R_T$ можно назвать *возму-*

*) См. формулы Гейсканена, Кассиниса и др. [15].

*щающим потенциалом.* Используя формулы (1.6.5) и (1.9.8), для $R_T$ находим следующее выражение:

$$R_T = \frac{fm}{r} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \\ + \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} J_{nk} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi) \cos k(\lambda - \lambda_{nk}), \quad (1.12.2)$$

где

$$j_n = -(J_n - J'_n), \quad (1.12.3)$$

причем $J'_n$ даются формулой (1.9.5).

Если воспользоваться числовыми данными, приведенными в § 1.6, то для постоянных $j_n$ получим (в единицах $10^{-6}$)

$$\begin{aligned} j_4 &= 0{,}427, & j_5 &= 0{,}236, \\ j_6 &= -0{,}502, & j_7 &= 0{,}361, \\ j_8 &= 0{,}118, & j_9 &= 0{,}100, \\ j_{10} &= 0{,}354, & j_{11} &= -0{,}202, \\ j_{12} &= 0{,}042, & j_{13} &= 0{,}123, \\ j_{14} &= 0{,}073, & j_{15} &= 0{,}174, \\ j_{16} &= -0{,}187, & j_{17} &= -0{,}085, \\ j_{18} &= 0{,}231, & j_{19} &= 0{,}216, \\ j_{20} &= 0{,}005, & j_{21} &= -0{,}145. \end{aligned}$$

Числовые значения для $J_{nk}$ находятся из табл. 1 с помощью формул (1.6.7) и (1.6.11).

## § 1.13. Замечания

Представление потенциала притяжения Земли в виде ряда по сферическим функциям стало классическим. В силу простоты сферических функций оно очень удобно для аналитических и численных исследований движения искусственных спутников. Однако, как уже отмечалось, такое разложение обладает одним существенным недостатком, а именно медленной сходимостью, вследствие чего при точных исследованиях движения близких

спутников необходимо учитывать достаточно большое число членов. Это обстоятельство заставляет искать другие формы разложения потенциала.

В 1965 г. Г. Н. Дубошин получил разложение потенциала объемного тела в ряд по функциям Ламе [16]. В последнее время Л. А. Савров нашел формулы, связывающие коэффициенты разложения по функциям Ламе с коэффициентами разложения по сферическим функциям [17].

В 1971 г. Балмино представил аномальную часть потенциала Земли потенциалом притяжения некоторой совокупности точечных масс [18]. Им было использовано 126 материальных точек с заданными координатами в теле Земли.

Пока еще трудно судить о том, насколько целесообразно использовать полученные разложения для решения дифференциальных уравнений движения спутника. Можно лишь заметить, что эти разложения также содержат большое число членов, а используемые в них функции являются более сложными, чем сферические.

По-видимому, самым существенным фактом является то, что для описания гравитационного поля Земли с нужной нам в настоящее время точностью требуется большое число постоянных (порядка 100, а может быть и больше). Трудности здесь обусловлены скорее физической стороной проблемы, чем математической.

Теперь о промежуточном гравитационном поле Земли. В гравиметрии гравитационное поле Земли обычно разбивают на две части: нормальную и аномальную. Под *нормальным гравитационным полем* понимают поле некоторой идеализированной Земли, потенциал которого содержит наиболее значительные члены разложения: нулевого, первого и некоторые члены второго порядка относительно сжатия Земли. В *аномальный потенциал* включают члены второго порядка и выше. В этом отношении введенное в § 1.9 промежуточное гравитационное поле Земли может рассматриваться как нормальное поле. Главное же отличие промежуточного потенциала $W$ от других нормальных потенциалов заключается лишь в том, что он позволяет строго проинтегрировать дифференциальные уравнения движения спутника.

Первые аппроксимирующие выражения для потенциала притяжения Земли (на практике, в сущности, совпа-

дающие друг с другом), которые допускают интегрирование в квадратурах, были предложены в 1959 и 1960 гг. в работах Дж. Винти [19] и М. Д. Кислика [20]. Значение этих работ для теории движения спутников трудно переоценить. Если выражения Винти и Кислика разложить в ряды по сферическим функциям, то они могут быть представлены формулой (1.9.13), т. е. будут совпадать с симметричным вариантом силовой функции задачи двух неподвижных центров. Такая связь двух задач была установлена в 1961 г. в статье Е. А. Гребеникова, В. Г. Демина и автора [21]. Указание на такую аналогию содержится также в книге Д. Брауэра и Дж. Клеменса [22], изданной в США в 1961 г. *).

Идея применить обобщенную задачу двух неподвижных центров для построения промежуточных орбит искусственных спутников была выдвинута в 1961 г. Е. А. Гребениковым, В. Г. Деминым и автором [24], [25]. Предложенная этими авторами формула (1.9.8) обобщала результаты Дж. Винти и М. Д. Кислика на случай несимметричного тела. Оказалось также, что менее удачная, но, несомненно, представляющая интерес аппроксимирующая формула Р. Баррара [26] может рассматриваться как некоторый предельный случай формулы (1.9.8). Другими словами, формула (1.9.8) содержит в себе все аппроксимирующие выражения для потенциала как частные или предельные случаи.

В последние годы были предприняты попытки обобщить формулу (1.9.8) с тем, чтобы учесть большее число членов геопотенциала. В 1966 г. А. Кук нашел выражение для потенциала некоторого трехосного тела, содержащее четыре произвольных параметра [27]. Таким образом, появилась возможность учесть также один долготный член потенциала Земли. Однако дифференциальные уравнения движения с таким потенциалом интегрируются только в том случае, если притягивающее тело не вращается. Это обстоятельство и затрудняет использование потенциала, предложенного А. Куком, в теории движения спутников. Подобные трудности имеют место и при использовании формулы, полученной Е. И. Бурштейн

*) Некоторые замечания по этому поводу см. в обзорной статье М. С. Ярова-Ярового [23].

в 1972 г. [28] и формулы, недавно выведенной И. С. Козловым [29].

Интересно отметить, что еще в 1958 г. Р. Ньютон пытался применить классическую задачу двух неподвижных центров для изучения движения искусственных спутников Луны [30] *). Но, оставаясь в области действительных масс и расстояний, он мог аппроксимировать только потенциал вытянутого тела, вследствие чего эта работа не могла иметь приложений к спутникам Земли. Интересное применение этой классической задачи в теории движения спутников Луны было сделано в последнее время Г. Г. Команом [33]. Используя отличный от Р. Ньютона подход, он добился того, чтобы промежуточный потенциал содержал в себе первые три зональные гармоники потенциала притяжения Луны.

---

*) О задаче двух неподвижных центров см. работы Г. Бадаляна [31] и В. Г. Демина [32].

ГЛАВА II

# ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ДВИЖЕНИЯ

## § 2.1. Дифференциальные уравнения движения искусственного спутника

В § 1.6 мы ввели подвижную, жестко связанную с Землей, систему координат $O\xi\eta\zeta$ и соответствующие ей полярные координаты $r$, $\varphi$ и $\lambda$. Возьмем теперь неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс Земли такую, чтобы ось $Oz$ была направлена в северный полюс, а ось $Ox$ — в точку весеннего равноденствия. Пусть, далее, $w$ есть долгота, отсчитываемая от неподвижной оси $Ox$. Тогда (рис. 8)

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos w,\\ y &= r\cos\varphi\sin w,\\ z &= r\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.1)$$

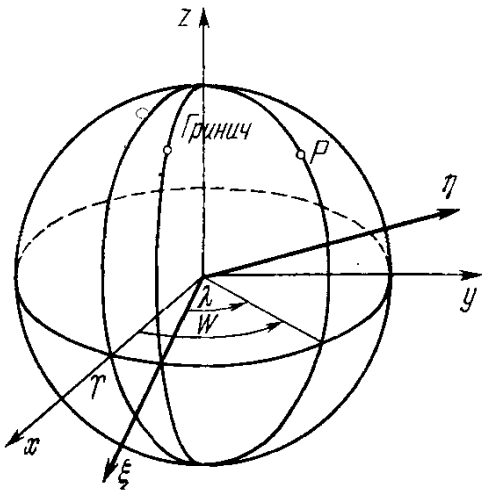


Рис. 8. Системы координат.

причем

$$w = \lambda + S, \qquad (2.1.2)$$

где $S$ есть гринвичское звездное время, которое можно представить формулой

$$S = n_{\oplus}(t - t_0) + S_0. \qquad (2.1.3)$$

Здесь $n_{\oplus}$ — угловая скорость вращения Земли, $t_0$ — начальный момент времени, а $S_0$ есть значение $S$ при $t = t_0$.

Предположим сначала, что на спутник действует только сила притяжения Земли. Тогда на основании § 1.1 дифференциальные уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (2.1.4)$$

где предполагается, что потенциал притяжения Земли $U$ выражен посредством формул (2.1.1) и (2.1.2) через $x$, $y$, $z$.

Уравнения (2.1.4) не являются точными уравнениями движения спутника, поскольку они не учитывают таких сил, как сопротивление атмосферы, притяжение Луны и Солнца, световое давление и т. д.

Пусть $R_L$ и $R_S$ означают возмущающие функции, обусловленные соответственно действием Луны и Солнца, а $F_x$, $F_y$, $F_z$ — составляющие возмущающего ускорения, вызванного сопротивлением атмосферы, световым давлением и другими факторами. Тогда, если ввести при помощи формулы (1.12.1) промежуточный и возмущающий потенциалы, то уравнения движения спутника в поле притяжения Земли с учетом влияния Луны, Солнца, сопротивления атмосферы, светового давления и т. д. можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial x} + F_x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial R}{\partial y} + F_y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial z} + F_z, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.5)$$

где

$$R = R_T + R_L + R_S.$$

Формула для $R_T$ приводится в § 1.12. Явные выражения для $R_L$, $R_S$ и $F_x$, $F_y$, $F_z$ мы дадим в тех главах, где будем рассматривать влияние соответствующих возмущающих факторов. Заметим лишь, что для близких ИСЗ функции $R_L$ и $R_S$ имеют примерно тот же порядок малости, что и функция $R_T$. Что касается $F_x$, $F_y$, $F_z$, то их величина зависит не только от высоты перигея орбиты, но и от массы и площади поперечного сечения спутника. Однако для большинства ИСЗ возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы и световым давлением, можно рассматривать как возмущения второго порядка относительно сжатия Земли.

В дальнейшем уравнения (2.1.5) мы будем называть *уравнениями возмущенного движения*, а функцию $R$ — *возмущающей функцией*. Если в этих уравнениях положить $R = 0$ и $F_x = F_y = F_z = 0$, то полученные уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z}, \qquad (2.1.6)$$

можно назвать *уравнениями промежуточного движения*, поскольку они имеют промежуточный характер между уравнениями возмущенного движения и *уравнениями невозмущенного движения*. Очевидно, последние имеют вид (2.1.6), если в качестве $W$ взять функцию $fm/r$. Движения, описываемые уравнениями (2.1.6), будем называть *промежуточными движениями*, а соответствующие им орбиты — *промежуточными орбитами*.

## § 2.2. Интегрирование уравнений промежуточного движения

В настоящем параграфе мы сведем дифференциальные уравнения (2.1.6) к квадратурам, которые и будут в дальнейшем использованы для построения промежуточной орбиты спутника. Для этого мы воспользуемся методом Гамильтона — Якоби и сфероидальными координатами $\xi$, $\eta$, $w$, которые связаны с прямоугольными координатами $x$, $y$, $z$ формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\,\cos w,\\ y &= \sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\,\sin w,\\ z &= c\sigma+\xi\eta. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.1)$$

Согласно § 1.9 в уравнениях (2.1.6) функция $W$ определяется так:

$$W=\frac{fm}{2}\left\{\frac{1+i\sigma}{r_1}+\frac{1-i\sigma}{r_2}\right\},$$

где

$$r_1=\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma+i)]^2},$$
$$r_2=\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma-i)]^2}.$$

Поэтому в новых координатах функция $W$ запишется в виде

$$W=\frac{fm(\xi-c\sigma\eta)}{J}, \qquad (2.2.2)$$

где

$$J=\xi^2+c^2\eta^2.$$

Пусть теперь $T$ — кинетическая энергия спутника:

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).$$

В координатах $\xi$, $\eta$, $w$ она будет дана формулой

$$T=\frac{J}{2}\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2+c^2}+\frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}+\frac{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}{J}\dot{w}^2\right). \quad (2.2.3)$$

Определяя импульсы $\xi'$, $\eta'$, $w'$ формулами

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=\frac{\partial T}{\partial\dot{\xi}}=\frac{J\dot{\xi}}{\xi^2+c^2},\\ \eta'&=\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}}=\frac{J\dot{\eta}}{1-\eta^2},\\ w'&=\frac{\partial T}{\partial\dot{w}}=(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)\dot{w},\end{aligned}\right\} \quad (2.2.4)$$

из (2.2.3) найдем

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2+c^2}{J}\xi'^2+\frac{1-\eta^2}{J}\eta'^2+\frac{w'^2}{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\right). \quad (2.2.5)$$

Дифференциальные уравнения промежуточного движения теперь запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial K}{\partial\xi'},\quad \frac{d\eta}{dt}=\frac{\partial K}{\partial\eta'},\quad \frac{dw}{dt}=\frac{\partial K}{\partial w'},\\ &\frac{d\xi'}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial\xi},\quad \frac{d\eta'}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial\eta},\quad \frac{dw'}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial w},\end{aligned}\right\} \quad (2.2.6)$$

где

$$K=T-W. \quad (2.2.7)$$

Система (2.2.6) имеет интеграл энергии

$$T-W=\alpha_1, \quad (2.2.8)$$

где $\alpha_1$ — постоянная интегрирования. Составляя при помощи (2.2.8), (2.2.5) и (2.2.2) уравнение Гамильтона — Якоби, получим

$$\frac{\xi^2+c^2}{2J}\left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)^2+\frac{1-\eta^2}{2J}\left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)^2+ \\ +\frac{1}{2(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\left(\frac{\partial S}{\partial w}\right)^2=\frac{fm}{J}(\xi-c\sigma\eta)+\alpha_1. \quad (2.2.9)$$

Полный интеграл этого уравнения будем искать в виде

$$S = S_1(\xi) + S_2(\eta) + \alpha_3 w,$$

где $\alpha_3$ — произвольная постоянная. Тогда для определения функций $S_1$ и $S_2$ приходим к следующим уравнениям:

$$(\xi^2+c^2)\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{c^2\alpha_3^2}{\xi^2+c^2} + 2\alpha_1\xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2,$$

$$(1-\eta^2)\left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta}\right)^2 = -\frac{\alpha_3^2}{1-\eta^2} + 2\alpha_1 c^2\eta^2 - 2fmc\sigma\eta + \alpha_2^2,$$

где $\alpha_2$ — произвольная постоянная. Поэтому

$$S = \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{\xi^2+c^2}\,d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\sqrt{F(\eta)}}{1-\eta^2}\,d\eta + \alpha_3 w. \qquad (2.2.10)$$

Здесь $\xi_1$ и $\eta_1$ — постоянные, которые будут определены позже, а $F(\eta)$ и $\Phi(\xi)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\xi) &= (\xi^2+c^2)(2\alpha_1\xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2) + c^2\alpha_3^2, \\ F(\eta) &= (1-\eta^2)(2\alpha_1 c^2\eta^2 - 2fmc\sigma\eta + \alpha_2^2) - \alpha_3^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.11)$$

Общий интеграл системы (2.2.6) будет даваться уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \beta_3,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \xi', \quad \frac{\partial S}{\partial \eta} = \eta', \quad \frac{\partial S}{\partial w} = w'.$$

Записывая первые из них в развернутой форме, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{c^2\eta^2\,d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} = t + \beta_1, \\ &-\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\alpha_2\,d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\alpha_2\,d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} = \beta_2, \\ &-\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{c^2\alpha_3\,d\xi}{(\xi^2+c^2)\sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\alpha_3\,d\eta}{(1-\eta^2)\sqrt{F(\eta)}} = w - \beta_3, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.12)$$

где $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ — произвольные постоянные.

Из (2.2.12) легко находим следующие уравнения:

$$\left.\begin{gathered}\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}=\frac{dt}{J}, \quad \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}=\frac{dt}{J}, \\ (1-\eta^2)(\xi^2+c^2)\,dw=\alpha_3\,dt.\end{gathered}\right\} \tag{2.2.13}$$

Если теперь вместо $t$ ввести новую независимую переменную $\tau$ по формуле

$$dt = Jd\tau = (\xi^2 + c^2\eta^2)\,d\tau,$$

то из уравнений (2.2.13) найдем

$$\int_{\eta_1}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}=\tau+c_3, \quad \int_{\xi_1}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}=\tau+c_4, \tag{2.2.14}$$

где $c_3$ и $c_4$ — постоянные интегрирования, а $\eta_1$ и $\xi_1$ мы определим позже.

Итак, задача свелась к обращению квадратур (2.2.14). После того как мы найдем $\xi$ и $\eta$ в виде явных функций $\tau$, третья координата определится следующей квадратурой:

$$w=\alpha_3\int_0^{\tau}\frac{\xi^2+c^2\eta^2}{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\,d\tau+c_5, \tag{2.2.15}$$

которая легко выводится из третьего уравнения (2.2.13).

Связь же переменной $\tau$ с временем $t$ дается уравнением

$$t-t_0=\int_0^{\tau}(\xi^2+c^2\eta^2)\,d\tau+c_6. \tag{2.2.16}$$

В уравнениях (2.2.15) и (2.2.16) $c_5$ и $c_6$ — произвольные постоянные, а $t_0$ — начальный момент времени.

Формулы (2.2.14) — (2.2.16) содержат семь постоянных $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $c_3$, $c_4$, $c_5$, $c_6$. Но, как будет показано далее, постоянные $c_3$ и $c_4$ входят в окончательные формулы только посредством комбинации $c_3 - c_4$. Поэтому независимыми являются шесть постоянных.

## § 2.3. Первые интегралы

Рассмотрим подробнее первые интегралы промежуточного движения. Обозначим через $V$ орбитальную скорость спутника. Тогда на основании (2.2.8) и (2.2.2) интеграл

энергии запишется в виде

$$V^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1. \qquad (2.3.1)$$

В сфероидальных координатах $\xi$, $\eta$, $w$ интеграл площадей, как это следует из (2.2.13), имеет вид

$$(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)\frac{dw}{dt} = \alpha_3. \qquad (2.3.2)$$

Если перейти к прямоугольным координатам, то он примет форму

$$\dot{x}y - \dot{y}x = \alpha_3. \qquad (2.3.3)$$

Существование этих двух интегралов обусловливается общими свойствами силового поля, определяемого потенциалом $W$. Оно не зависит от времени (интеграл энергии) и симметрично относительно оси $Oz$ (постоянство проекции вектора кинетического момента на ось $Oz$).

Рассмотрим теперь третий интеграл. Пусть

$$\bar{r}^2 = x^2 + y^2 + (z - c\sigma)^2,$$

$$r' = x\dot{x} + y\dot{y} + (z - c\sigma)\dot{z}.$$

Тогда при помощи уравнений (2.2.1) имеем

$$\bar{r}^2 = \xi^2 + c^2(1 - \eta^2), \quad r' = \xi\dot{\xi} - c^2\eta\dot{\eta}.$$

Кроме того, дифференцируя третье уравнение (2.2.1), находим

$$\dot{z} = \xi\dot{\eta} + \eta\dot{\xi}. \qquad (2.3.4)$$

Поэтому

$$r'^2 + c^2\dot{z}^2 = J(\dot{\xi}^2 + c^2\dot{\eta}^2). \qquad (2.3.5)$$

Но согласно (2.2.13)

$$J^2\dot{\xi}^2 = \Phi(\xi), \quad J^2\dot{\eta}^2 = F(\eta).$$

Следовательно, если воспользоваться формулами (2.2.11), мы вместо (2.3.5) получим следующее равенство:

$$J(r'^2 + c^2\dot{z}^2) = 2\alpha_1[\xi^2(\xi^2 + c^2) + c^4\eta^2(1 - \eta^2)] + 2fm[\xi(\xi^2 + c^2) - c^3\sigma\eta(1 - \eta^2)] - \alpha_2^2(\xi^2 + c^2\eta^2). \qquad (2.3.6)$$

Вычитая из него интеграл энергии (2.3.1), умноженный на $J\bar{r}^2$, найдем

$$\bar{r}^2V^2 - r'^2 - c^2\dot{z}^2 = -\frac{2fm\xi\eta(c^2\eta + c\sigma\xi)}{J} + \alpha_2^2,$$

или

$$\alpha_2^2 = \bar{r}^2V^2 - r'^2 - c^2\dot{z}^2 + Q, \tag{2.3.7}$$

где

$$Q = \frac{2fm\xi\eta(c^2\eta + c\sigma\xi)}{\xi^2 + c^2\eta^2}. \tag{2.3.8}$$

Интеграл (2.3.7) есть тот третий интеграл, наличие которого дает возможность проинтегрировать уравнения движения до конца.

Если интегралы (2.3.1) и (2.3.2) имеют наглядный механический смысл, то этого нельзя сказать об интеграле (2.3.7). Однако, поскольку

$$\bar{r}^2V^2 - r'^2 = (y\dot{\bar{z}} - \bar{z}\dot{y})^2 + (\bar{z}\dot{x} - x\dot{\bar{z}})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2, \tag{2.3.9}$$

где

$$\bar{z} = z - c\sigma,$$

то в предельном случае, когда $c = 0$ и $\sigma = 0$, величина $\alpha_2$ равна модулю момента количества движения спутника (на единицу массы).

## § 2.4. Исследование первых интегралов

Рассмотрим уравнения, связывающие прямоугольные координаты $x$, $y$, $z$ со сфероидальными координатами $\xi$, $\eta$, $w$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\,\cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\,\sin w, \\ z &= c\sigma + \xi\eta. \end{aligned}\right\} \tag{2.4.1}$$

Очевидно, мы можем считать, что переменные $\xi$, $\eta$, $w$ могут принимать значения в следующей области:

$$0 \leqslant \xi < \infty, \quad -1 \leqslant \eta \leqslant +1, \quad -\infty < w < +\infty. \tag{2.4.2}$$

Из (2.4.1) следует, что если согласно уравнениям движения координата $\xi$ будет изменяться в ограниченных пределах, то и прямоугольные координаты будут также величинами ограниченными, а следовательно, и движение спутника будет происходить в ограниченной части пространства. Но если $\xi$ будет величиной неограниченной, то и движение будет происходить в неограниченном пространстве.

Выясним теперь возможный характер движений, допускамых уравнениями промежуточного движения. С этой целью рассмотрим сначала интеграл энергии:

$$V^2 = \frac{2fm\,(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1. \tag{2.4.3}$$

Так как левая часть этого равенства есть величина неотрицательная, то

$$\frac{fm\,(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + \alpha_1 \geqslant 0. \tag{2.4.4}$$

Разберем отдельно случаи $\alpha_1 < 0$, $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_1 > 0$. Если $\alpha_1 < 0$, то, обозначая через $\alpha'$ положительную величину $-fm/2\alpha_1$, мы из условия (2.4.4) найдем

$$(\xi - \alpha')^2 + (c\eta + \sigma\alpha')^2 \leqslant \alpha'^2\,(1 + \sigma^2). \tag{2.4.5}$$

Если $\alpha_1 = 0$, то из (2.4.4) следует, что

$$\xi - c\sigma\eta \geqslant 0. \tag{2.4.6}$$

Наконец при $\alpha_1 > 0$ будем иметь

$$(\xi + \alpha'')^2 + (c\eta - \sigma\alpha'')^2 \geqslant \alpha''^2\,(1 + \sigma^2), \tag{2.4.7}$$

где через $\alpha''$ обозначена положительная величина $fm/2\alpha_1$.

Условия (2.4.6) и (2.4.7) показывают, что при $\alpha_1 \geqslant 0$ переменная $\xi$ может принимать любые значения из области (2.4.2). А тогда, как уже было отмечено, движение спутника будет неограниченным в пространстве. При $\alpha_1 < 0$ из условия (2.4.5) вытекает, что $\xi$ изменяется в следующих пределах:

$$\alpha'\,(1 - \sqrt{1 + \sigma^2}) \leqslant \xi \leqslant \alpha'\,(1 + \sqrt{1 + \sigma^2}),$$

и следовательно, в этом случае движение спутника будет происходить в ограниченной части пространства.

Итак, с точки зрения применения этих результатов к искусственным спутникам нас может интересовать только случай, когда постоянная энергии $\alpha_1$ отрицательна.

Рассмотрим теперь интегралы (2.2.13), которые можно записать в виде

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 = \Phi(\xi), \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = F(\eta).$$

Поскольку левые части этих интегралов суть величины неотрицательные, то области, в которых должны изменяться координаты $\xi$ и $\eta$, определяются условиями

$$\Phi(\xi) \geqslant 0, \quad F(\eta) \geqslant 0. \tag{2.4.8}$$

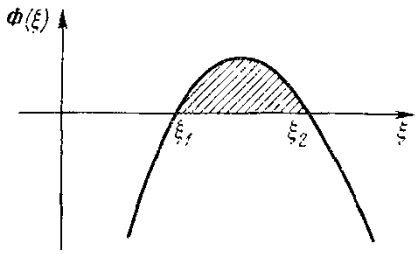


Рис. 9. График многочлена $\Phi(\xi)$ в случае «*а*».

Исследуем сначала многочлен $\Phi(\xi)$:

$$\Phi(\xi) = 2\alpha_1\xi^4 + (2\alpha_1 c^2 - \alpha_2^2)\,\xi^2 + 2fm\,(\xi^3 + c^2\xi) + c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2).$$

Обозначим его корни через $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ и покажем, что все они не могут быть комплексными. Действительно, когда $\alpha_1 < 0$, коэффициент при $\xi^4$ отрицателен, и поэтому в случае всех комплексных корней многочлен $\Phi(\xi)$ принимал бы только отрицательные значения и, как следует из (2.4.8), мы тогда бы не имели никаких реальных движений. Поэтому многочлен $\Phi(\xi)$ должен иметь два действительных корня (пусть это будут $\xi_1$ и $\xi_2$). Таким образом, для многочлена $\Phi(\xi)$ имеются только следующие возможности:

а) $\xi_1$ и $\xi_2$ действительные, а $\xi_3$ и $\xi_4$ — комплексные,

б) $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ — все действительные.

Поведение многочлена $\Phi(\xi)$ в этих случаях показано на рис. 9 и 10.

Перейдем к изучению многочлена $F(\eta)$:

$$F(\eta) = -2\alpha_1 c^2\eta^4 + (2\alpha_1 c^2 - \alpha_2^2)\,\eta^2 + 2fmc\sigma\,(\eta^3 - \eta) - (\alpha_3^2 - \alpha_2^2).$$

Прежде всего имеем

$$\left.\begin{aligned} &F(-1) = -\alpha_3^2 \leqslant 0, \quad F(1) = -\alpha_3^2 \leqslant 0, \\ &F(-\infty) > 0, \qquad\quad F(\infty) > 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.4.9}$$

Отсюда видно, что многочлен $F(\eta)$ имеет два корня, один из которых меньше или равен $-1$, а второй больше или равен $+1$. Обозначим эти корни соответственно через $\eta_3$

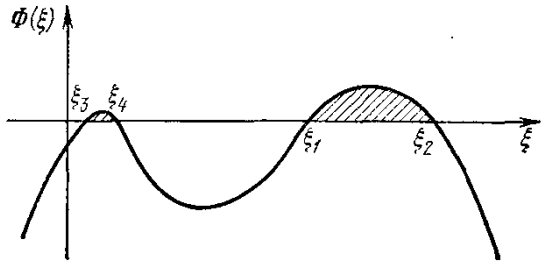


Рис. 10. График многочлена $\Phi(\xi)$ в случае «*б*».

и $\eta_4$. Покажем, что два других корня (пусть $\eta_1$ и $\eta_2$) являются также вещественными и лежат на отрезке $[-1, +1]$. Действительно, если бы многочлен $F(\eta)$ не имел таких корней, то никакими вещественными значениями

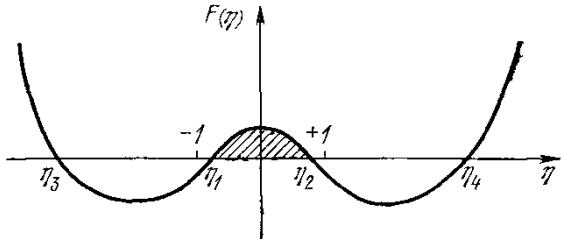


Рис. 11. График многочлена $F(\eta)$.

$\eta$ мы не смогли бы удовлетворить одновременно второму условию (2.4.8) и второму условию (2.4.2). Поведение многочлена $F(\eta)$ показано на рис. 11.

Из проведенного анализа следует, что переменная $\eta$ будет изменяться в области

$$-1 \leqslant \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2 \leqslant +1. \qquad (2.4.10)$$

Для переменной $\xi$ в случае «*а*» мы имеем

$$\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \qquad (2.4.11)$$

а в случае «б» возможны две области изменения $\xi$:

$$\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2 \quad \text{и} \quad \xi_3 \leqslant \xi \leqslant \xi_4. \qquad (2.4.12)$$

Однако, как мы покажем в дальнейшем (см. § 2.6), меньшие корни (пусть $\xi_3$ и $\xi_4$) при всех допустимых значениях

$\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$ не будут превосходить постоянной $c$. Но на основании формул (2.4.1)

$$r = \sqrt{\xi^2 + c^2(1-\eta^2) + c^2\sigma^2 + 2c\sigma\xi\eta}.$$

Поэтому во второй области (2.4.12) будет иметь место следующее ограничение:

$$r < c\sqrt{2 + 2\sigma + \sigma^2} \approx 330 \text{ км}, \qquad (2.4.13)$$

а следовательно, эта область полностью лежит внутри Земли и ее можно не рассматривать.

## § 2.5. Постоянные $a$, $e$, $\delta$

При выводе формул промежуточного движения важным моментом является выбор элементов орбиты. Ясно, что эта задача не имеет однозначного решения. Однако при ее решении следует стремиться к тому, чтобы, во-первых, эти элементы имели наглядный геометрический смысл, во-вторых, чтобы они были близкими к соответствующим кеплеровым элементам и, в-третьих, чтобы выражения для координат спутника через элементы и время имели по возможности наиболее простой вид. Очевидно, постоянные $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ не удовлетворяют указанным требованиям. Поэтому вместо них мы будем пользоваться элементами $a$, $e$ и $\delta$, которые введем следующими формулами:

$$\xi_1 = a(1-e), \quad \xi_2 = a(1+e), \quad \eta_2 = \delta, \qquad (2.5.1)$$

где $\xi_1 \leqslant \xi_2$ — два наибольших корня многочлена $\Phi(\xi)$, а $\eta_2$ — наибольший корень многочлена $F(\eta)$, лежащий на отрезке $[-1,1]$.

Связь между старыми постоянными $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ и новыми $a$, $e$, $\delta$ будет даваться равенствами

$$\Phi[a(1-e)] = 0, \quad \Phi[a(1+e)] = 0, \quad F(\delta) = 0, \qquad (2.5.2)$$

которые можно рассматривать как три линейных уравнения относительно неизвестных $\alpha_1$, $\alpha_2^2$ и $\alpha_3^2$. Решая эти уравнения, мы можем выразить $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$ через элементы $a$, $e$, $\delta$. Заметим, однако, что выражения для $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ будут довольно-таки громоздкими. Поэтому мы

представим их в виде рядов по степеням некоторых малых параметров. Первый параметр $\varepsilon$ введем по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1-e^2)}, \qquad (2.5.3)$$

а в качестве второго примем величину $\sigma$. Далее (см. § 2.6) будет показано, что $\varepsilon$ не превосходит $^1/_{30}$. Поэтому можно считать, что $\varepsilon^2$ и $\varepsilon\sigma$ имеют порядок $10^{-3}$.

Так как постоянные $c$ и $\sigma$ входят в многочлены $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ посредством $c^2$ и $c\sigma$, то указанные выше ряды будут расположены по степеням $\varepsilon^2$ и $\varepsilon\sigma$. Во всех разложениях, которыми нам придется пользоваться в будущем, мы будем сохранять члены нулевого порядка и члены, пропорциональные $\varepsilon^2$, $\varepsilon\sigma$, $\varepsilon^4$, $\varepsilon^3\sigma$ и $\varepsilon^2\sigma^2$. Отбрасывая члены более высоких порядков, мы тем самым будем допускать ошибку порядка $10^{-9}$.

Разрешив теперь с указанной точностью уравнения (2.5.2) относительно $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, получим

$$\alpha_1 = -\frac{fm}{2a}\{1-\varepsilon^2(1-e^2)(1-\delta^2)+$$
$$+2\varepsilon^3\sigma\delta(1-\delta^2)(1-e^2)+\varepsilon^4\delta^2(1-\delta^2)(1-e^2)(3+e^2)\}, \qquad (2.5.4)$$

$$\alpha_2^2 = fma(1-e^2)\{1+2\varepsilon^2(1+e^2)(1-\delta^2)-$$
$$-4\varepsilon^3\sigma\delta(1+e^2)(1-\delta^2)+\varepsilon^4(1-\delta^2)[(1-6\delta^2)-$$
$$-2e^2(1+4\delta^2)+e^4(1-2\delta^2)]\}, \qquad (2.5.5)$$

$$\alpha_3 = \pm\sqrt{fma(1-e^2)(1-\delta^2)}\left\{1+\frac{\varepsilon^2}{2}[(2-3\delta^2)+\right.$$
$$+e^2(2-\delta^2)]-\varepsilon\sigma\delta-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma^2\delta^2-$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma\delta[(2-\delta^2)+e^2(2-3\delta^2)]-\frac{\varepsilon^4}{8}[(12\delta^2-11\delta^4)+$$
$$\left.+e^2(16+16\delta^2-34\delta^4)+e^4(4\delta^2-3\delta^4)]\right\}, \qquad (2.5.6)$$

где знак «+» нужно брать в случае прямых движений, а знак «—» — в случае движений обратных. Это обстоятельство является следствием того, что $\alpha_3$ есть проекция удельного момента количества движения спутника на ось $Oz$.

Из формул (2.5.4) и (2.5.6) вследствие $\alpha_1 < 0$ и вещественности $\alpha_3$ при $\delta \leqslant 1$ видно, что $a > 0$ и $e < 1$. Таким

образом, элементы $a$, $e$ и $\delta$ могут принимать любые значения из области

$$a > 0, \quad 0 \leqslant e < 1, \quad \delta \leqslant 1. \tag{2.5.7}$$

При этом области (2.5.7) будут соответствовать *все возможные* ограниченные движения, допускаемые уравнениями промежуточного движения.

## § 2.6. Корни многочленов $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$

Выразим теперь корни $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ через новые постоянные $a$, $e$ и $\delta$. Начнем с многочлена $\Phi(\xi)$. Его два корня $\xi_1$ и $\xi_2$ даются формулами (2.5.1). Найдем остальные корни. С этой целью положим

$$\xi_3 = p + iq, \quad \xi_4 = p - iq$$

и воспользуемся теоремой Виета, которая дает

$$2(a+p) = -\frac{fm}{\alpha_1},$$

$$a^2(1-e^2)(p^2+q^2) = \frac{c^2(\alpha_3^2-\alpha_2^2)}{2\alpha_1}.$$

Подставляя сюда вместо $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ их значения из формул (2.5.4)—(2.5.6), получим

$$p = a(1-e^2)\varepsilon^2(1-\delta^2)\{1-2\varepsilon\sigma\delta+\varepsilon^2(1-4\delta^2-e^2)\}, \tag{2.6.1}$$

$$q^2 = a^2(1-e^2)^2\varepsilon^2\{\delta^2+2\varepsilon\sigma\delta(1-\delta^2)- \\ -\varepsilon^2(1-6\delta^2+5\delta^4)\}. \tag{2.6.2}$$

Равенства (2.6.1) и (2.6.2) показывают, что в зависимости от $\delta$, $\sigma$ и $\varepsilon$ величина $q$ может быть как действительной, так и мнимой. Она будет равной нулю при условии

$$\delta^2 + 2\varepsilon\sigma\delta(1-\delta^2) - \varepsilon^2(1-6\delta^2+5\delta^4) + \ldots = 0,$$

из которого находим

$$\delta = \varepsilon(1-\sigma-3\varepsilon^2+\ldots). \tag{2.6.3}$$

Следовательно, если

$$|\delta| \geqslant \varepsilon(1-\sigma-3\varepsilon^2+\ldots),$$

то $q$ будет действительной величиной, а корни $\xi_3$ и $\xi_4$ — комплексными, а если

$$|\delta| < \varepsilon(1-\sigma-3\varepsilon^2+\ldots),$$

то $q$ будет мнимой, а корни $\xi_3$ и $\xi_4$ — действительными. Условие (2.6.3) соответствует случаю $\xi_3 = \xi_4$. Таким образом, на практике могут реализоваться оба случая, указанные в § 2.4.

Из формул (2.6.1) и (2.6.2) также следует, что при малых $\varepsilon$ и $\sigma$ абсолютные значения корней $\xi_3$ и $\xi_4$, действительно, не превосходят постоянной $c$.

На основании предыдущего многочлен Ф (ξ) можно представить в виде

$$\Phi(\xi) = -2\alpha_1 (\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1)[(\xi - p)^2 + q^2], \quad (2.6.4)$$

где $q^2$ в случае комплексных $\xi_3$ и $\xi_4$ будет величиной положительной, а в случае всех действительных корней — отрицательной.

Перед тем как приступить к отысканию корней многочлена $F(\eta)$, заметим, что если при $\sigma = 0$ этот многочлен допускает корень $\delta$, то он будет иметь также корень, равный $-\delta$. Отсюда следует, что сумма корней, лежащих на отрезке $[-1,1]$, будет обращаться в нуль вместе с $\sigma$. Поэтому корень $\eta_1 = \delta^*$ можно искать в виде следующего ряда:

$$\delta^* = -(\delta + c\sigma\gamma_1 + c^2\sigma^2\gamma_2 + c^3\sigma\gamma_3 + \ldots), \quad (2.6.5)$$

где $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ — функции $a$, $e$, $\delta$.

Подставляя (2.6.5) в $F(\eta)$ и приравнивая нулю члены с одинаковыми степенями $c$ и $\sigma$, мы для определения $\gamma_1$, $\gamma_2$ и $\gamma_3$ получим такие уравнения:

$$\begin{aligned} &\alpha_2^2\gamma_1 - 2fm(1-\delta^2) = 0, \\ &2\alpha_2^2\gamma_2 + \alpha_2^2\gamma_1^2 - 2fm(1-3\delta^2)\gamma_1 = 0, \\ &\alpha_2^2\gamma_3 - 2\alpha_1(1-2\delta^2)\gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

Если теперь сюда вместо $\alpha_1$ и $\alpha_2$ подставить их значения из (2.5.4) и (2.5.5), то окончательно будем иметь

$$\delta^* = -\delta - 2\varepsilon\sigma(1-\delta^2)[1 - 2\varepsilon\sigma\delta - \varepsilon^2(3 - 4\delta^2 + e^2)]. \quad (2.6.6)$$

Итак, два корня, $\eta_1$ и $\eta_2$, нам известны. Для того чтобы найти остальные корни, воспользуемся теоремой

Виета, согласно которой

$$\left.\begin{aligned} \eta_3+\eta_4+\delta+\delta^* &= \frac{fm}{\alpha_1}\frac{\sigma}{c}, \\ \delta\delta^*\eta_3\eta_4 &= \frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{2\alpha_1 c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.6.7}$$

Пусть

$$p'=\frac{1}{2}(\eta_3+\eta_4), \quad \delta'=\eta_3\eta_4, \quad q'^2=p'^2-\delta'. \tag{2.6.8}$$

Тогда из уравнений (2.6.7) при помощи (2.5.4)—(2.5.6) найдем

$$p'=-\frac{\sigma}{\varepsilon(1-e^2)}\{1+4\varepsilon^4(1-e^2)(1-\delta^2)(1-2\delta^2)\}, \tag{2.6.9}$$

$$\begin{aligned} \delta'=-\frac{1}{\varepsilon^2(1-e^2)}\{1+4\varepsilon^2(1-\delta^2)+4\varepsilon^2\sigma^2(1-\delta^2)- \\ -8\varepsilon^3\sigma\delta(1-\delta^2)+\varepsilon^4[(4-16\delta^2+12\delta^4)- \\ -4e^2(1-\delta^4)]\}. \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Поскольку $\delta'<0$, то из (2.6.8) следует $q'^2>0$ и многочлен $F(\eta)$, как легко видеть, теперь можно представить в форме

$$F(\eta)=-2\alpha_1 c^2(\delta-\eta)(\eta-\delta^*)[q'^2-(\eta-p')^2]. \tag{2.6.11}$$

Таким образом, мы выразили все корни многочленов $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ через элементы $a$, $e$, $\delta$ и представили эти многочлены в формах, которые удобны для обращения квадратур.

## § 2.7. Качественная картина

Из формул (2.4.1) легко находим

$$\frac{x^2+y^2}{\xi^2+c^2}+\frac{(z-c\sigma)^2}{\xi^2}=1, \tag{2.7.1}$$

$$\frac{x^2+y^2}{c^2(1-\eta^2)}-\frac{(z-c\sigma)^2}{c^2\eta^2}=1, \tag{2.7.2}$$

$$\frac{x}{\cos w}-\frac{y}{\sin w}=0. \tag{2.7.3}$$

Равенства (2.7.1) и (2.7.2) показывают, что уравнению $\xi = \text{const}$ соответствует семейство сжатых эллипсоидов вращения, а уравнение $\eta = \text{const}$ определяет семейство однополостных гиперболоидов вращения. Ось вращения эллипсоидов и гиперболоидов совпадает с осью вращения

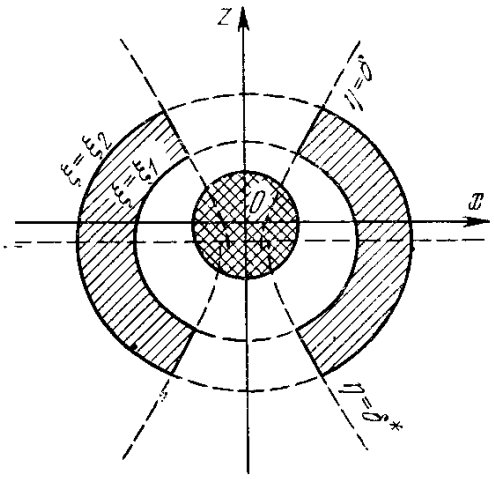


Рис. 12. Сечение области движения спутника меридианной плоскостью.

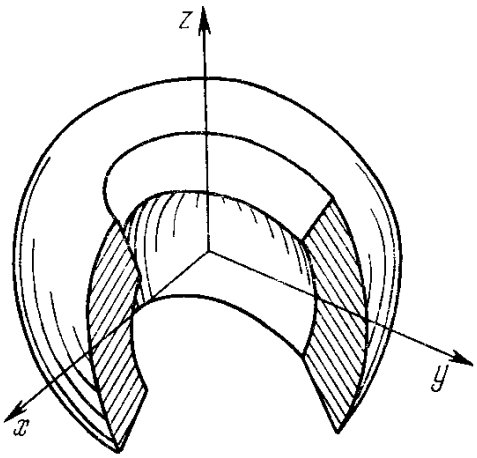


Рис. 13. Область движения спутника.

Земли, а их центры лежат в точке пересечения этой оси с плоскостью $z = c\sigma$. Далее, формула (2.7.3) при $w = \text{const}$ представляет собой уравнение плоскости, проходящей через ось вращения Земли.

Согласно (2.4.10), (2.4.11) и (2.5.1) переменные $\xi$ и $\eta$ изменяются в следующих пределах:

$$a(1-e) \leqslant \xi \leqslant a(1+e), \tag{2.7.4}$$

$$\delta^* \leqslant \eta \leqslant \delta, \tag{2.7.5}$$

где $\delta^*$ — наименьший корень $F(\eta)$ из отрезка $[-1, +1]$.

Отсюда заключаем, что область пространства, где происходит движение спутника, представляет собой тороидальное тело, ограниченное двумя эллипсоидами $\xi = a(1-e)$ и $\xi = a(1+e)$, гиперболоидом $\eta = \delta$ (в верхнем полупространстве) и гиперболоидом $\eta = \delta^*$ (в нижнем полупространстве). Сечение этой области меридианной плоскостью показано на рис. 12. Пространственная картина получается путем вращения плоской картины вокруг оси $Oz$ (рис. 13).

Большая и малая полуоси внутреннего ограничивающего эллипсоида соответственно равны

$$\sqrt{a^2(1-e)^2+c^2} \quad \text{и} \quad a(1-e),$$

а полуоси внешнего ограничивающего эллипсоида суть

$$\sqrt{a^2(1+e)^2+c^2} \quad \text{и} \quad a(1+e).$$

Эксцентриситеты внутреннего и внешнего эллипсоидов определяются соответственно формулами

$$e_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2(1-e)^2+c^2}}, \qquad e_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2(1+e)^2+c^2}}.$$

Наибольшая разность между большой и малой полуосями (когда эллипсоид касается поверхности Земли) равна $\sim 3{,}5$ *км*. При неограниченном возрастании величины $a(1-e)$ эти эллипсоиды стремятся к сферам, центр которых лежит южнее центра Земли примерно на 7,5 *км*.

Действительная и мнимая полуоси гиперболоида, ограничивающего движение в верхнем полупространстве, соответственно равны

$$c\sqrt{1-\delta^2} \quad \text{и} \quad c\delta.$$

Для второго гиперболоида подобные величины будут равны

$$c\sqrt{1-\delta^{*2}} \quad \text{и} \quad c\delta^*.$$

Поскольку $\delta^*$ есть функция $a$, $e$ и $\delta$, то область пространства, где происходит движение спутника, полностью определяется тремя элементами $a$, $e$ и $\delta$.

Орбита спутника касается одного эллипсоида, затем гиперболоида, второго эллипсоида и второго гиперболоида и т. д. Как будет показано в § 4.7, промежуточное движение спутника является условно периодическим с тремя периодами.

В заключение этого параграфа найдем оценку для параметра $\varepsilon$. Поскольку малая полуось внутреннего ограничивающего эллипсоида не может быть меньше экваториального радиуса Земли, то

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1-e^2)} \leqslant \frac{c}{a(1-e)} < \frac{c}{r_0},$$

а поэтому, если принять численные значения § 1.9, то $\varepsilon < 0{,}033$.

## § 2.8. Частные случаи

Эллипсоидальные орбиты. Пусть $e = 0$. Тогда $\xi_1 = \xi_2$ и, следовательно, $\xi = a$. Поэтому движение спутника будет происходить по поверхности эллипсоида, вернее, по поверхности эллипсоидального пояса:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+c^2}+\frac{(z-c\sigma)^2}{a^2}=1,$$

$$-c\sigma - a\delta^* \leqslant z \leqslant c\sigma + a\delta.$$

Эти орбиты показаны на рис. 14.

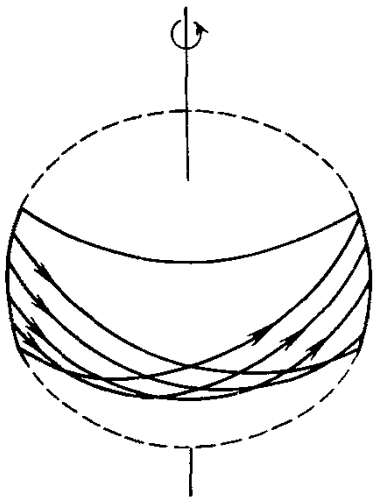

Рис. 14. Движение на эллипсоиде.

Эллиптические орбиты. Пусть $e = 0$ и $\delta = 1$. Тогда, как это видно из (2.5.6), $\alpha_3 = 0$, и поэтому

$$w = \text{const}.$$

Следовательно, в этом случае мы будем иметь плоское движение, происходящее в меридианной плоскости. Предполагая временно, что ось $Ox$ лежит в этой плоскости, мы сможем записать уравнение орбиты в виде

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{(z-c\sigma)^2}{a^2}=1.$$

Поэтому спутник будет двигаться по эллиптической орбите, эксцентриситет которой определяется формулой

$$e' = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Круговые орбиты. Пусть $e = 0$ и $\delta = \delta^*$. Тогда $\eta = \delta$ и

$$z - c\sigma = a\delta.$$

Приравнивая правую часть формулы (2.6.6) величине $\delta$ и полагая $e = 0$, получим

$$\delta = -\varepsilon\sigma + 3\varepsilon^3\sigma. \qquad (2.8.1)$$

Поэтому

$$z = 3c\sigma\varepsilon^2,$$

а из формул (2.4.1) при условии $\eta = \delta$ и (2.8.1) находим

$$x^2 + y^2 = a^2 + c^2 (1 - \sigma^2).$$

Следовательно, в этом случае спутник будет двигаться по круговой орбите, плоскость которой перпендикулярна оси вращения Земли и отстоит от плоскости экватора на 22,5 $\varepsilon^2$ *км*.

П о л я р н ы е о р б и т ы. Предположим, что $\delta = 1$, а $e \neq 0$. Тогда, как и в случае эллиптических орбит, $w = \text{const}$. Считая, как и раньше, $y = 0$, мы найдем, что в этом случае орбита заключена внутри эллиптического кольца

$$\frac{x^2}{a^2(1-e)^2+c^2} + \frac{(z-c\sigma)^2}{a^2(1-e)^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2(1+e)^2+c^2} + \frac{(z-c\sigma)^2}{a^2(1+e)^2} = 1$$

и будет касаться попеременно то внутреннего, то внешнего ограничивающего эллипса (рис. 15).

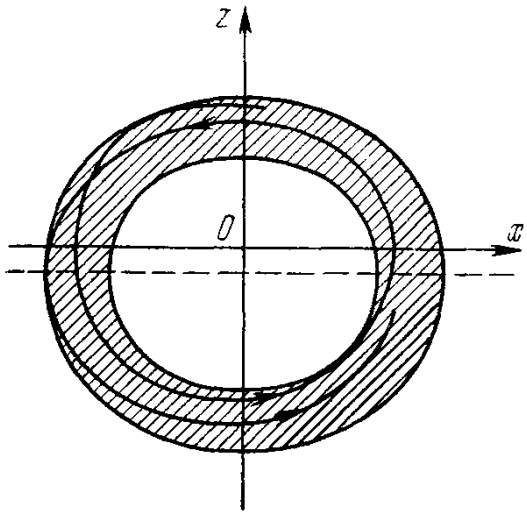

Рис. 15. Полярные орбиты.

Частным случаем полярных орбит являются эллиптические орбиты ($e = 0$), которые были рассмотрены ранее. Круговые и эллиптические орбиты можно также рассматривать как частные случаи эллипсоидальных орбит.

## § 2.9. Замечания

В этой главе мы свели дифференциальные уравнения промежуточного движения к квадратурам и рассмотрели в общих чертах качественную сторону задачи. Для решения уравнений движения был использован метод Гамильтона — Якоби [1]. Другой способ интегрирования, основанный на использовании регуляризирующего времени, был предложен в работах Е. А. Гребеникова, В. Г. Демина и автора [2], [3].

Предварительные качественные исследования, изложенные здесь, были проведены в работе автора [4]. Под-

робный качественный анализ в симметричном случае ($\sigma = 0$) для $\alpha_1 < 0$ был дан в работе Е. А. Гребеникова, В. Г. Демина и автора [5] и в общем случае в работе В. М. Алексеева [6].

Качественные исследования неограниченных движений были выполнены в симметричном случае для $\alpha_1 = 0$ Е. А. Гребениковым, В. Г. Деминым и автором [7] и для $\alpha_1 > 0$ В. М. Чепуровой [8]. В несимметричном случае подобные исследования были проведены В. П. Гиричевым [9] и Б. Н. Носковым [10].

Полярные орбиты были подробно рассмотрены для $\sigma = 0$ в работе Е. А. Гребеникова, В. Г. Демина и автора [11] и для $\sigma \neq 0$ в работе В. С. Уральской [12].

Устойчивость движений по круговым, эллиптическим и эллипсоидальным орбитам была исследована Е. А. Гребениковым, В. Г. Деминым и автором [13] в симметричном случае и В. Г. Дегтяревым [14] в несимметричном случае. Было показано, что все эти частные движения являются устойчивыми при постоянно действующих возмущениях гравитационной природы по отношению к величинам, характеризующим размеры и форму орбит.

Многие из указанных здесь исследований изложены в книге В. Г. Демина [15] *).

*) См. также книгу В. В. Белецкого [16].

ГЛАВА III

# ФОРМУЛЫ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ДВИЖЕНИЯ

## § 3.1. Эллиптические функции Якоби

В предыдущей главе были найдены первые интегралы уравнений промежуточного движения, позволяющие записать общий интеграл задачи в квадратурах. Поскольку функции $F(\eta)$ и $\Phi(\xi)$, входящие в формулы (2.2.14), суть многочлены четвертой степени, то полученные квадратуры являются эллиптическими, вследствие чего общее решение задачи должно выражаться через *эллиптические интегралы* и *эллиптические функции*. Поэтому перед тем, как приступить к обращению квадратур, мы изложим основные сведения об эллиптических интегралах и функциях *).

Пусть имеется интеграл вида

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где $R(z)$ есть многочлен четвертой степени. Всегда существует такая дробно-линейная подстановка, которая приводит его к виду

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{3.1.1}$$

Интеграл (3.1.1) называется *эллиптическим интегралом первого рода в нормальной форме Лежандра*. Число $k$ $(0 < k < 1)$ называется *модулем* этого интеграла, а $k' = \sqrt{1-k^2}$ его *дополнительным модулем*.

Подстановкой $t = \sin\varphi$ эллиптический интеграл приводится к *нормальной тригонометрической форме*

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{3.1.2}$$

*) Подробнее об эллиптических интегралах и функциях см. книги Ю. С. Сикорского [1] и Н. И. Ахиезера [2].

Эллиптический интеграл, взятый в пределах от 0 до $\pi/2$, называется *полным эллиптическим интегралом первого рода* и обозначается $\boldsymbol{K}(k)$:

$$\boldsymbol{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Рассмотрим теперь равенство

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{3.1.3}$$

С одной стороны, оно определяет $u$ как однозначную функцию верхнего предела $\varphi$

$$u = F(\varphi, k).$$

С другой стороны, мы можем рассматривать верхний предел $\varphi$ как функцию самого интеграла $u$. Такая функция обозначается

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k)$$

и называется *амплитудой*. Таким образом, $\operatorname{am}(u, k)$ есть результат *обращения* эллиптического интеграла первого рода в нормальной тригонометрической форме Лежандра.

*Эллиптические функции Якоби* вводятся следующими формулами:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin[\operatorname{am}(u, k)],$$
$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos[\operatorname{am}(u, k)],$$
$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(u, k)},$$

и называются соответственно *эллиптическим синусом*, *эллиптическим косинусом* и *дельтой амплитуды*.

Часто модуль $k$ опускают и пишут просто

$$\operatorname{am} u, \quad \operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

но всегда нужно помнить, что эти функции зависят от параметра $k$.

Отметим основные свойства эллиптических функций, считая $u$ вещественным.

1. Функции $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{cn} u$ периодические с периодом $4\boldsymbol{K}$, а $\operatorname{dn} u$ периодическая с периодом $2\boldsymbol{K}$.

2. Функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ принимают значения в областях

$$-1 \leqslant \operatorname{sn} u \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \operatorname{cn} u \leqslant 1, \quad \sqrt{1-k^2} \leqslant \operatorname{dn} u \leqslant 1.$$

Значения функций при $u = 0, \boldsymbol{K}, 2\boldsymbol{K}, 3\boldsymbol{K}, 4\boldsymbol{K}$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

**Значения эллиптических функций**

| $u$ | 0 | $\boldsymbol{K}$ | $2\boldsymbol{K}$ | $3\boldsymbol{K}$ | $4\boldsymbol{K}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sn} u$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $\operatorname{cn} u$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| $\operatorname{dn} u$ | 1 | $\sqrt{1-k^2}$ | 1 | $\sqrt{1-k^2}$ | 1 |

Величина $\boldsymbol{K}$, таким образом, для функций $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{cn} u$ играет роль, аналогичную роли $\pi/2$ для $\sin u$ и $\cos u$.

3. Функция $\operatorname{sn} u$ — нечетная, а $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ — четные функции $u$, т. е.

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u.$$

4. Функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ связаны между собой формулами

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1,$$
$$\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u + k^2 = 1.$$

5. Функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ вырождаются при $k = 0$ в тригонометрические функции, т. е.

$$\operatorname{sn} u = \sin u, \quad \operatorname{cn} u = \cos u \quad \operatorname{dn} u = 1 \quad (k = 0),$$

а при $k = 1$ в гиперболические функции, т. е.

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{th} u, \quad \operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u} \quad \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u} \quad (k = 1).$$

6. Функции sn $u$ и cn $u$ разлагаются в тригонометрические ряды:

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{k\boldsymbol{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \sin(2n-1)\bar{u}, \qquad (3.1.4)$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{k\boldsymbol{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \cos(2n-1)\bar{u}, \qquad (3.1.5)$$

где

$$q = \exp\left(-\frac{\pi \boldsymbol{K}(k')}{\boldsymbol{K}(k)}\right), \quad \bar{u} = \frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}}. \qquad (3.1.6)$$

Для am $u$ имеет место такое разложение:

$$\operatorname{am} u = \bar{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin 2n\bar{u}. \qquad (3.1.7)$$

Приведем еще разложение для $\boldsymbol{K}(k)$:

$$\boldsymbol{K} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n} + \ldots\right\}. \qquad (3.1.8)$$

Все эти ряды сходятся при любых $u$ и $k < 1$.

## § 3.2. Определение координаты η

На основании (2.2.14) и (2.6.11) мы можем записать квадратуру для определения η в виде

$$\int_{\delta^*}^{\delta} \frac{d\eta}{\sqrt{(\delta-\eta)(\eta-\delta^*)[q'^2-(\eta-p')^2]}} = \sqrt{-2\alpha_1 c^2}\,(\tau + c_3), \qquad (3.2.1)$$

где $\delta^*$, $p'$ и $q'$ даются формулами (2.6.6), (2.6.8) и (2.6.9), $\alpha_1$ определяется равенством (2.5.4), а $c_3$ — постоянная интегрирования.

Чтобы найти отсюда η, воспользуемся подстановкой

$$\eta = \frac{\delta+\delta^*}{2} - \frac{\delta-\delta^*}{2} \cdot \frac{(m'-m'')-(m'+m'')\zeta'}{(m'+m'')-(m'-m'')\zeta'}, \qquad (3.2.2)$$

где

$$m' = \sqrt{q'^2 - (\delta - p')^2}, \qquad m'' = \sqrt{q'^2 - (\delta^* - p')^2}. \tag{3.2.3}$$

Тогда уравнение (3.2.1) примет вид

$$\int_{-1}^{\zeta'} \frac{d\zeta'}{\sqrt{(1-\zeta'^2)(1+\hat{k}^2-\hat{k}^2\zeta'^2)}} = \sqrt{-2\alpha_1 c^2 m' m''}\,(\tau + c_3), \tag{3.2.4}$$

где

$$\hat{k}^2 = \frac{(\delta-\delta^*)^2 + (m'-m'')^2}{4m'm''}. \tag{3.2.5}$$

Если положить

$$\zeta' = \sin\theta, \tag{3.2.6}$$

то вместо (3.2.4) будем иметь

$$\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\theta}} = \sigma_1(\tau + c_3) - \boldsymbol{K}_1, \tag{3.2.7}$$

где

$$k_1^2 = \hat{k}^2(1+\hat{k}^2)^{-1}, \quad \sigma_1 = \sqrt{-2\alpha_1 c^2 m' m''(1+\hat{k}^2)}, \tag{3.2.8}$$

а $\boldsymbol{K}_1$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k_1$.

Обращая эллиптическую квадратуру (3.2.7), получим

$$\theta = \operatorname{am}(l_1, k_1), \tag{3.2.9}$$

где

$$l_1 = \sigma_1(\tau + \bar{c}_3), \quad \bar{c}_3 = c_3 - \frac{1}{\sigma_1}\boldsymbol{K}_1. \tag{3.2.10}$$

Поэтому

$$\zeta' = \operatorname{sn}(l_1, k_1). \tag{3.2.11}$$

Полагая

$$s = -\frac{m'\delta^* - m''\delta}{m'+m''}, \quad d = -\frac{m'-m''}{m'+m''}, \quad \gamma = \frac{m'\delta^* + m''\delta}{m'+m''}, \tag{3.2.12}$$

из формул (3.2.2) и (3.2.11) окончательно найдем

$$\eta = \frac{s\operatorname{sn}(l_1, k_1) + \gamma}{1 + d\operatorname{sn}(l_1, k_1)}. \tag{3.2.13}$$

Выразим теперь постоянные $s$, $\gamma$, $d$, $k_1$ и $\sigma_1$ через элементы $a$, $e$ и $\delta$. Для этого подставим в формулы (3.2.12),

(3.2.8), (3.2.5) и (3.2.3) вместо $\delta^*$, $p'$, $q'$ и $\alpha_1$ их значения из (2.6.6), (2.6.8), (2.6.9) и (2.5.4). Тогда получим

$$s = \delta + \varepsilon\sigma(1-\delta^2) - 3\varepsilon^2\sigma^2\delta(1-\delta^2) - \\ - \varepsilon^3\sigma(1-\delta^2)(3-4\delta^2+e^2), \quad (3.2.14)$$

$$\gamma = -\varepsilon\sigma(1-2\delta^2) + 4\varepsilon^2\sigma^2\delta(1-\delta^2) + \\ + \varepsilon^3\sigma[(3-12\delta^2+10\delta^4)+e^2(1-2\delta^4)], \quad (3.2.15)$$

$$d = \varepsilon\sigma\delta + \varepsilon^2\sigma^2(1-\delta^2) - \varepsilon^3\sigma\delta[(5-6\delta^2)-e^2(1-2\delta^2)], \quad (3.2.16)$$

$$k_1^2 = \varepsilon^2\delta^2(1-e^2) + 4\varepsilon^4\delta^2(1-\delta^2)(1-e^2) + \\ + \varepsilon^2\sigma^2\delta^2 + 2\varepsilon^3\sigma\delta(1-\delta^2)(1-e^2), \quad (3.2.17)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{fma(1-e^2)}\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(1-\delta^2)(3+e^2) + \right. \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma^2(6-7\delta^2) - \varepsilon^3\sigma\delta(1-\delta^2)(3+e^2) - \\ - \frac{\varepsilon^4}{8}\left[(9+2\delta^2-11\delta^4)+e^2(6+28\delta^2-34\delta^4) + \right. \\ \left.\left. + e^4(1+2\delta^2-3\delta^4)\right]\right\}. \quad (3.2.18)$$

Таким образом, координата $\eta$ полностью определена как функция переменной $\tau$ и четырех произвольных постоянных $a$, $e$, $\delta$ и $\bar{c}_3$.

Заметим, что модуль $k_1$ эллиптической функции является малой величиной порядка $\varepsilon$.

Формуле (3.2.13) можно придать другой вид, а именно

$$\eta = \frac{s\sin\theta + \gamma}{1 + d\sin\theta}, \quad (3.2.19)$$

где $\theta$ определяется уравнением (3.2.9).

## § 3.3. Определение координаты ξ

На основании (2.2.14) и (2.6.4) имеем

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_2-\xi)(\xi-\xi_1)[(\xi-p)^2+q^2]}} = \sqrt{-2\alpha_1}(\tau + c_4), \quad (3.3.1)$$

где $\xi_1$, $\xi_2$, $\alpha_1$, $p$, $q$ даются формулами (2.5.1), (2.5.4), (2.6.1) и (2.6.2), а $c_4$ — постоянная интегрирования.

Делая подстановку

$$\xi = \frac{\xi_1+\xi_2}{2} + \frac{\xi_1-\xi_2}{2}\,\frac{(n'+n'')\,\zeta+(n'-n'')}{(n'-n'')\,\zeta+(n'+n'')}, \tag{3.3.2}$$

где

$$n' = \sqrt{(\xi_2-p)^2+q^2}, \quad n'' = \sqrt{(\xi_1-p)^2+q^2}, \tag{3.3.3}$$

мы вместо уравнения (3.3.1) будем иметь

$$\int_{\zeta}^{1} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\,(1-k_2^2+k_2^2\zeta^2)}} = l_2, \tag{3.3.4}$$

где

$$l_2 = \sigma_2\,(\tau + c_4), \quad \sigma_2 = \sqrt{-2\alpha_1 n' n''}, \tag{3.3.5}$$

$$k_2^2 = \frac{(\xi_2-\xi_1)^2-(n'-n'')^2}{4n'n''}. \tag{3.3.6}$$

Полагая

$$\zeta = \cos\psi, \tag{3.3.7}$$

приведем уравнение (3.3.4) к виду

$$\int_{0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\psi}} = l_2. \tag{3.3.8}$$

Отсюда находим

$$\psi = \operatorname{am}(l_2,\ k_2). \tag{3.3.9}$$

Поэтому

$$\zeta = \operatorname{cn}(l_2,\ k_2), \tag{3.3.10}$$

а формулу (3.3.2), как легко проверить, можно теперь записать в виде

$$\xi = \frac{a\,[1-e\bar{e}+(\bar{e}-e)\operatorname{cn}(l_2,\ k_2)]}{1+\bar{e}\operatorname{cn}(l_2,\ k_2)}, \tag{3.3.11}$$

где

$$\bar{e} = \frac{n'-n''}{n'+n''}. \tag{3.3.12}$$

Если подставить в (3.3.12), (3.3.6) и (3.3.5) вместо $\xi_1$, $\xi_2$, $p$, $q$ и $\alpha_1$ их значения из (2.5.1), (2.5.4), (2.6.1)

и (2.6.2), то получим

$$\bar{e} = e\{1 + \varepsilon^2(1-e^2)(1-2\delta^2) - 4\varepsilon^3\sigma\delta(1-e^2)(1-\delta^2) + \varepsilon^4(1-e^2)\times \times [(3-16\delta^2+14\delta^4) - 2e^2(1-\delta^2)^2]\}, \quad (3.3.13)$$

$$k_2^2 = \varepsilon^2 e^2\{\delta^2 + 2\varepsilon\sigma\delta(1-\delta^2) - \varepsilon^2(1-10\delta^2+11\delta^4+e^2\delta^4)\}, \quad (3.3.14)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{fma(1-e^2)}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(3-4\delta^2-e^2) + 4\varepsilon^3\sigma\delta(1-\delta^2) - \frac{\varepsilon^4}{8}[(9-72\delta^2+64\delta^4) + e^2(2-40\delta^2+48\delta^4)+e^4]\right\}. \quad (3.3.15)$$

Отсюда видно, что модуль $k_2$, так же как и $k_1$, является малой величиной порядка $\varepsilon$.

Следует подчеркнуть, что полученные здесь формулы справедливы как в случае, когда $\Phi(\xi)$ имеет пару комплексных корней и два действительных корня, так и в случае, когда все корни этого многочлена действительны. Это обстоятельство является следствием того, что подстановкой (3.3.2) можно пользоваться как при положительных, так и при отрицательных $q^2$.

Легко видеть, что формула (3.3.11) может быть записана и в таком виде:

$$\frac{\xi}{a} = \frac{1 - e\bar{e} + (\bar{e}-e)\cos\psi}{1+\bar{e}\cos\psi}, \quad (3.3.16)$$

где $\psi$ дается уравнением (3.3.9).

## § 3.4. Связь между переменными θ и ψ

Согласно (3.2.7), (3.2.10), (3.3.5) и (3.3.8) переменные $\theta$ и $\psi$ связаны с $\tau$ уравнениями

$$\sigma_1(\tau + c_3) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\theta}}, \quad (3.4.1)$$

$$\sigma_2(\tau + c_4) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\psi}}. \quad (3.4.2)$$

Разлагая подынтегральные выражения (3.4.1) и (3.4.2) в ряды по степеням $k_1^2$ и $k_2^2$, а затем интегрируя, мы с принятой точностью найдем

$$\sigma_1(\tau+\bar{c}_3)=\left(1+\frac{k_1^2}{4}+\frac{9}{64}k_1^4\right)\theta-$$
$$-\frac{k_1^2}{8}\left(1+\frac{3}{4}k_1^2\right)\sin 2\theta+\frac{3}{256}k_1^4\sin 4\theta,$$
$$\sigma_2(\tau+c_4)=\left(1+\frac{k_2^2}{4}+\frac{9}{64}k_2^4\right)\psi-$$
$$-\frac{k_2^2}{8}\left(1+\frac{3}{4}k_2^2\right)\sin 2\psi+\frac{3}{256}k_2^4\sin 4\psi.$$

Если исключить отсюда $\tau$, то получим

$$\theta=(1+\nu)\psi+\omega_0+\frac{k_1^2}{8}\left(1+\frac{k_1^2}{2}\right)\sin 2\theta-\frac{3}{256}k_1^4\sin 4\theta-$$
$$-\frac{k_2^2}{8}\left(1+\frac{k_2^2}{2}+\nu\right)\sin 2\psi-\frac{3}{256}k_2^4\sin 4\psi, \quad (3.4.3)$$

где $\nu$ и $\omega_0$ определяются формулами

$$1+\nu=\frac{\sigma_1\left(1+\frac{k_2^2}{4}+\frac{9}{64}k_2^4\right)}{\sigma_2\left(1+\frac{k_1^2}{4}+\frac{9}{64}k_1^4\right)}, \quad (3.4.4)$$

$$\omega_0=\frac{\sigma_1(\bar{c}_3-c_4)}{1+\frac{k_1^2}{4}+\frac{9}{64}k_1^4}. \quad (3.4.5)$$

Здесь, как и раньше, отброшены члены шестого и более высокого порядка относительно $\varepsilon$.

Подставляя в формулу (3.4.4) выражения для $\sigma_1$, $\sigma_2$, $k_1$ и $k_2$ из § 3.2 и 3.3, найдем

$$\nu=\frac{\varepsilon^2}{4}(12-15\delta^2)+\frac{\varepsilon^2\sigma^2}{4}(12-15\delta^2)-$$
$$-\frac{15}{2}\varepsilon^3\sigma\delta(1-\delta^2)+\frac{\varepsilon^4}{64}[(288-1296\delta^2+1035\delta^4)-$$
$$-e^2(144+288\delta^2-510\delta^4)]. \quad (3.4.6)$$

Очевидно, мы можем рассматривать $\omega_0$ как произвольную постоянную, вместо постоянных $c_3$ и $c_4$.

Разрешим теперь уравнение (3.4.3) относительно $\theta$. В нулевом приближении при $k_1 = k_2 = 0$ имеем

$$\theta = (1 + \nu)\psi + \omega_0.$$

Подставляя это значение $\theta$ в правую часть уравнения (3.4.3), мы с точностью до членов второго порядка найдем

$$\theta = (1+\nu)\psi + \omega_0 - \frac{k_2^2}{8}\sin 2\psi + \frac{k_1^2}{8}\sin 2[(1+\nu)\psi + \omega_0].$$

Продолжая этот процесс далее, окончательно получим

$$\theta = \psi + \omega - \frac{k_2^2}{8}\left(1 + \nu + \frac{k_2^2}{2}\right)\sin 2\psi + \\ + \frac{k_1^2}{8}\left(1 + \frac{k_1^2}{2}\right)\sin 2(\psi + \omega) + \frac{3}{256}k_2^4 \sin 4\psi + \\ + \frac{k_1^4}{256}\sin 4(\psi + \omega) - \frac{k_1^2 k_2^2}{32}\sin 2\psi \cos 2(\psi + \omega), \quad (3.4.7)$$

где

$$\omega = \nu\psi + \omega_0. \quad (3.4.8)$$

Формула (3.4.7) позволяет, таким образом, найти $\theta$, если известно $\psi$.

## § 3.5. Определение координаты $w$

Перейдем теперь к выводу формулы для долготы $w$. На основании (2.2.15) имеем

$$w = \alpha_3 \int_0^\tau \frac{d\tau}{1-\eta^2} - \alpha_3 c^2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2} + c_5, \quad (3.5.1)$$

где $c_5$ — произвольная постоянная.

Займемся сначала вычислением первого интеграла. Согласно (3.4.1)

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1}(1 - k_1^2 \sin^2\theta)^{-1/2}\, d\theta,$$

или

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1}\left(1 + \frac{k_1^2}{2}\sin^2\theta + \frac{3}{8}k_1^4 \sin^4\theta + \ldots\right) d\theta.$$

Поэтому при помощи (3.2.19) будем иметь

$$\int_0^{\tau} \frac{d\tau}{1-\eta^2} = \frac{1}{\sigma_1} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1 + A' \sin\theta + B' \sin^2\theta + C' \sin^3\theta + D' \sin^4\theta}{A + B \sin\theta + C \sin^2\theta} d\theta, \tag{3.5.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &A = 1 - \gamma^2, \quad B = 2(d - s\gamma), \quad C = d^2 - s^2, \\ &A' = 2d, \quad B' = \frac{k_1^2}{2} + d^2, \quad C' = k_1^2 d, \quad D' = \frac{3}{8} k_1^4, \end{aligned}\right\} \tag{3.5.3}$$

а $\theta_0$ есть значение $\theta$ при $\tau = 0$.

Выделяя в подынтегральном выражении (3.5.2) целую часть и отбрасывая при этом члены порядка $\varepsilon^6$ и выше, получим

$$\int_0^{\tau} \frac{d\tau}{1-\eta^2} = \frac{1}{\sigma_1} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(S + R \sin\theta)\, d\theta}{A + B \sin\theta + C \sin^2\theta} + \\ + \frac{1}{\sigma_1} \int_{\theta_0}^{\theta} \left[ \left( \frac{B'}{C} - \frac{A}{C} \frac{D'}{C} \right) + \frac{C'}{C} \sin\theta + \frac{D'}{C} \sin^2\theta \right] d\theta, \tag{3.5.4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} S &= 1 - A \frac{B'}{C} + A \frac{A}{C} \frac{D'}{C}, \\ R &= A' - A \frac{C'}{C} - B \frac{B'}{C}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5.5}$$

Представим знаменатель дроби, стоящей в правой части (3.5.4), в виде

$$A + B \sin\theta + C \sin^2\theta = \\ = \frac{1}{\bar{\gamma}} [1 + \beta^2 + 2\alpha\beta \sin\theta - (1 - \alpha^2) \sin^2\theta],$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\bar{\gamma}$ определяются из уравнений

$$1 + \beta^2 = A\bar{\gamma}, \quad 2\alpha\beta = B\bar{\gamma}, \quad 1 - \alpha^2 = -C\bar{\gamma}. \tag{3.5.6}$$

Тогда, как легко проверить,

$$\frac{R}{S}=\frac{\beta}{\alpha}, \tag{3.5.7}$$

и

$$\frac{R\sin\theta+S}{A+B\sin\theta+C\sin^2\theta}=\frac{S\bar{\gamma}}{\alpha}\frac{\alpha+\beta\sin\theta}{1+\beta^2+2\alpha\beta\sin\theta-(1-\alpha^2)\sin^2\theta}.$$

Но

$$\int\frac{(\alpha+\beta\sin\theta)\,d\theta}{1+\beta^2+2\alpha\beta\sin\theta-(1-\alpha^2)\sin^2\theta}=\operatorname{Arctg}\left(\frac{\alpha\sin\theta+\beta}{\cos\theta}\right).$$

Поэтому из (3.5.4) следует

$$\alpha_3\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{1-\eta^2}=\frac{\alpha_3}{\sigma_1}\cdot\frac{\bar{\gamma}}{\alpha}S\operatorname{Arctg}\left(\frac{\alpha\sin\theta+\beta}{\cos\theta}\right)+$$

$$+\beta_0\theta+\beta_1\cos\theta+\beta_2\sin2\theta+c_5', \tag{3.5.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\beta_0&=\frac{\alpha_3}{\sigma_1}\left(\frac{B'}{C}-\frac{A}{C}\frac{D'}{C}+\frac{1}{2}\frac{D'}{C}\right),\\ \beta_1&=-\frac{\alpha_3}{\sigma_1}\frac{C'}{C},\quad \beta_2=-\frac{1}{4}\frac{\alpha_3}{\sigma_1}\frac{D'}{C},\end{aligned}\right\} \tag{3.5.9}$$

причем $c_5'$ — постоянная, представляющая собой значение интеграла при $\theta=\theta_0$ или $\tau=0$.

Найдем выражения для постоянных, входящих в формулу (3.5.8). Для этого подставим сначала в формулы (3.5.3) вместо $s$, $\gamma$, $d$ и $k_1$ их значения из (3.2.14)—(3.2.17). Выразив таким образом коэффициенты $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$ и $D'$ через $a$, $e$ и $\delta$ и используя формулы (3.5.5), мы получим выражения для $R$ и $S$. После этого при помощи (3.5.6) и (3.5.9) находим коэффициенты $\alpha$, $\beta$, $\bar{\gamma}$ и $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$. Затем мы можем проверить справедливость равенства (3.5.7) и, кроме того, показать, что

$$\frac{\alpha_3}{\sigma_1}\frac{\bar{\gamma}}{\alpha}S=\pm1, \tag{3.5.10}$$

где знак правой части совпадает со знаком постоянной $\alpha_3$. Если приписать знак коэффициента первого члена правой

части (3.5.8) величинам $\alpha$ и $\beta$, то окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \pm\sqrt{1-\delta^2}\left\{1-\varepsilon\sigma\delta-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma^2(1-6\delta^2)+\right.\\
&\qquad\left.+\varepsilon^3\sigma\delta(3-4\delta^2+e^2)\right\},\\
\beta &= \pm 2\varepsilon\sigma\sqrt{1-\delta^2}\{\delta+\varepsilon\sigma(1-2\delta^2)-\\
&\qquad-\varepsilon^2\delta(4-5\delta^2+e^2\delta^2)\},\\
\bar{\gamma} &= 1+\varepsilon^2\sigma^2,\\
\beta_0 &= \mp\sqrt{1-\delta^2}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon^2(1-e^2)+\frac{3}{2}\varepsilon^2\sigma^2-\right.\\
&\qquad-\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma\delta(1-e^2)-\\
&\qquad\left.-\frac{\varepsilon^4}{16}(1-e^2)[(30-35\delta^2)+e^2(2+3\delta^2)]\right\},\\
\beta_1 &= \pm\varepsilon^3\sigma\delta(1-e^2)\sqrt{1-\delta^2},\\
\beta_2 &= \pm\frac{3}{32}\varepsilon^4\delta^2(1-e^2)^2\sqrt{1-\delta^2},
\end{aligned}\right\} \quad (3.5.11)$$

где верхний знак соответствует прямым движениям, а нижний — обратным.

Перейдем теперь к вычислению второго интеграла (3.5.1). Если разложить подынтегральную функцию в ряд по степеням $c/\xi$ и воспользоваться уравнением

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_2}\left(1+\frac{k_2^2}{2}\sin^2\psi+\ldots\right)d\psi,$$

которое является следствием (3.4.2), то с принятой точностью получим

$$\begin{aligned}
-c^2\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{\xi^2+c^2} &=\\
&= -\frac{1}{\sigma_2}\int_{\psi_0}^{\psi}\left(\frac{c}{\xi}\right)^2\left(1+\frac{k_2^2}{2}\sin^2\psi\right)d\psi+\frac{1}{\sigma_2}\int_{\psi_0}^{\psi}\left(\frac{c}{\xi}\right)^4 d\psi,
\end{aligned} \quad (3.5.12)$$

где $\psi_0$ есть значение $\psi$ при $\tau = 0$.

При помощи (3.3.16) имеем

$$\left(\frac{c}{\xi}\right)^2\left(1+\frac{k_2^2}{2}\sin^2\psi\right)=$$
$$=\left(\frac{c}{\bar{p}}\right)^2[a_0+a_1\cos\psi+a_2\cos 2\psi+a_3\cos 3\psi+a_4\cos 4\psi], \tag{3.5.13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0&=1+\frac{\bar{e}^2}{2}-2\bar{e}\bar{q}+\frac{k_2^2}{4}+\frac{k_2^2\bar{e}^2}{16},\\ a_1&=2\bar{e}-\frac{3}{2}\bar{e}^2\bar{q}-2\bar{q}+\frac{k_2^2\bar{e}}{4},\\ a_2&=\frac{\bar{e}^2}{2}-2\bar{e}\bar{q}-\frac{k_2^2}{2},\\ a_3&=-\frac{1}{2}\bar{e}^2\bar{q}-\frac{k_2^2\bar{e}}{4},\quad a_4=-\frac{k_2^2\bar{e}^2}{16}, \end{aligned}\right\} \tag{3.5.14}$$

причем

$$\bar{p}=a(1-e\bar{e}),\quad \bar{q}=\frac{\bar{e}-e}{1-e\bar{e}}.$$

Аналогичным образом находим

$$\left(\frac{c}{\xi}\right)^4=\varepsilon^4(b_0+b_1\cos\psi+b_2\cos 2\psi+$$
$$+b_3\cos 3\psi+b_4\cos 4\psi), \tag{3.5.15}$$

где

$$\left.\begin{aligned} b_0&=1+3e^2+\frac{3}{8}e^4,\\ b_1&=e(4+3e^2),\quad b_3=e^3,\\ b_2&=\frac{e^2}{2}(6+e^2),\quad b_4=\frac{e^4}{8}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5.16}$$

Далее легко получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha_3}{\sigma_2}&=\pm\sqrt{1-\delta^2}\left\{1+\frac{\varepsilon^2}{2}[(5-7\delta^2)+\right.\\ &\qquad\left.+e^2(1-\delta^2)]-\varepsilon\sigma\delta+\ldots\right\},\\ \left(\frac{c}{\bar{p}}\right)^2&=\varepsilon^2[1+2\varepsilon^2e^2(1-2\delta^2)+\ldots],\\ \bar{q}&=\varepsilon^2e(1-2\delta^2)+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{3.5.17}$$

Подставляя формулы (3.5.13) и (3.5.15) в правую часть (3.5.12) и интегрируя, найдем

$$-\alpha_3 c^2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\xi^2+c^2} = \alpha_0' \psi + \alpha_1' \sin\psi + \\ + \alpha_2' \sin 2\psi + \alpha_3' \sin 3\psi + \alpha_4' \sin 4\psi + c_5'', \quad (3.5.18)$$

где $c_5''$ — значение интеграла при $\psi = \psi_0$.

Коэффициенты $\alpha_k'$ связаны простыми зависимостями с коэффициентами $a_k$, $b_k$ и величиной $\alpha_3/\sigma_2$. Используя формулы (3.5.17), (3.5.16) и (3.5.14), мы можем получить для $\alpha_k'$ следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0' &= \mp \varepsilon^2 \sqrt{1-\delta^2} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon\sigma\delta\,(2+e^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon^2}{16}\left[(24-56\delta^2) - e^2(4+64\delta^2) - \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - e^4(2+3\delta^2)\right] \right\}, \\
\alpha_1' &= \mp 2\varepsilon^2 e \sqrt{1-\delta^2} \left\{ 1 - \varepsilon\sigma\delta + \frac{\varepsilon^2}{8}\left[(4-28\delta^2) - \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - e^2(6+7\delta^2)\right] \right\}, \\
\alpha_2' &= \mp \frac{\varepsilon^2 e^2}{4} \sqrt{1-\delta^2} \left\{ 1 - \varepsilon\sigma\delta - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[11 + e^2(1+\delta^2)\right] \right\}, \\
\alpha_3' &= \pm \frac{\varepsilon^4 e^3}{4}(2-\delta^2)\sqrt{1-\delta^2}, \\
\alpha_4' &= \pm \frac{\varepsilon^4 e^4}{64}(2+\delta^2)\sqrt{1-\delta^2},
\end{aligned}\right\} \quad (3.5.19)$$

где верхний знак соответствует прямым движениям, а нижний — обратным.

Подставим, наконец, формулы (3.5.8) и (3.5.18) в (3.5.1). Тогда окончательно получим

$$w = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\alpha\sin\theta+\beta}{\cos\theta}\right) + \Omega, \quad (3.5.20)$$

где

$$\hat{\Omega} = \alpha_0'\psi + \beta_0\theta + \tilde{c}_5 + \alpha_1'\sin\psi + \alpha_2'\sin 2\psi + \\ + \alpha_3'\sin 3\psi + \alpha_4'\sin 4\psi + \beta_1\cos\theta + \beta_2\sin 2\theta, \quad (3.5.21)$$

причем

$$\tilde{c}_5 = c_5 + c_5' + c_5'',$$

а коэффициенты $\alpha_h'$ и $\beta_h$ даются формулами (3.5.19) и (3.5.11). Очевидно, постоянную $\tilde{c}_5$ мы можем рассматривать как произвольную постоянную, вместо постоянной $c_5$.

## § 3.6. Связь между временем $t$ и переменными $\theta$ и $\psi$

На основании (2.2.16) уравнение, связывающее время $t$ с промежуточной переменной $\tau$, можно записать в виде

$$t - t_0 = a^2 \int_0^\tau \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 d\tau + c^2 \int_0^\tau \eta^2 \, d\tau + c_6, \qquad (3.6.1)$$

где $t_0$ — начальный момент времени, а $c_6$ — постоянная интегрирования.

Переходя в первом и втором слагаемых (3.6.1) от переменной интегрирования $\tau$ соответственно к $\psi$ и $\theta$ согласно уравнениям (3.4.1) и (3.4.2), получим

$$t - t_0 = a^2 I_1 + c^2 I_2 + c_6, \qquad (3.6.2)$$

где

$$I_1 = \int_{\psi_0}^{\psi} \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{k_2^2}{2} \sin^2\psi + \frac{3}{8} k_2^2 \sin^4\psi + \ldots\right) d\psi, \qquad (3.6.3)$$

$$I_2 = \int_{\theta_0}^{\theta} \eta^2 \left(1 + \frac{k_1^2}{2} \sin^2\theta + \ldots\right) d\theta. \qquad (3.6.4)$$

Здесь, как и раньше, $\psi_0$ и $\theta_0$ — значения $\psi$ и $\theta$ при $\tau = 0$.

Займемся сначала вычислением $I_1$. Пусть

$$X = 1 + \bar{e}\cos\psi.$$

Тогда

$$\sin^2\psi = -\frac{1}{\bar{e}^2}\left[(1 - \bar{e}^2) - 2X + X^2\right]$$

и согласно (3.3.16)

$$\frac{\xi}{a} = X^{-1}\left[\frac{e(1-\bar{e}^2)}{\bar{e}} + \frac{\bar{e} - e}{\bar{e}} X\right].$$

Поэтому

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2\left(1+\frac{k_2^2}{2}\sin^2\psi+\frac{3}{8}k_2^4\sin^4\psi\right)=$$
$$=A_{-2}X^{-2}+A_{-1}X^{-1}+A_0+A_1X+A_2X^2, \qquad (3.6.5)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
A_{-2}&=(1-\bar e^2)^2\left\{(1-\bar n^2)^2-\frac{\bar k^2}{2}(1-\bar e^2)(1-2\bar n)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{8}\bar k^4(1-\bar e^2)^2\right\},\\
A_{-1}&=(1-\bar e^2)\left\{2\bar n(1-\bar n)+\bar k^2(1-\bar e^2)(1-3\bar n)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3}{2}\bar k^4(1-\bar e^2)\right\},\\
A_0&=\bar n^2-\frac{\bar k^2}{2}(1-\bar e^2)^2(1-2\bar n)+\\
&\quad+2\bar k^2\bar n(1-\bar e^2)+\frac{3}{4}(3-\bar e^2)(1-\bar e^2)^2\bar k^4,\\
A_1&=-\bar k^2\bar n(1-\bar e^2)-\frac{3}{2}\bar k^4(1-\bar e^2)^2,\\
A_2&=\frac{3}{8}\bar k^4(1-\bar e^2).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.6.6)$$

Здесь для краткости положено

$$\bar k^2=\frac{k_2^2}{\bar e^2}, \qquad \bar n=\frac{\bar e-e}{\bar e}. \qquad (3.6.7)$$

Далее легко находим

$$\left.\begin{aligned}
\int X^{-2}\,d\psi&=\frac{2}{(1-\bar e^2)^{3/2}}\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1-\bar e}{1+\bar e}}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}-\\
&\qquad-\frac{\bar e}{1-\bar e^2}\frac{\sin\psi}{1+\bar e\cos\psi},\\
\int X^{-1}\,d\psi&=\frac{2}{(1-\bar e^2)^{1/2}}\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1-\bar e}{1+\bar e}}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2},\\
\int X\,d\psi&=\psi+\bar e\sin\psi,\\
\int X^2\,d\psi&=\left(1+\frac{\bar e^2}{2}\right)\psi+2\bar e\sin\psi+\frac{\bar e^2}{4}\sin 2\psi.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.6.8)$$

Подставим формулу (3.6.5) в (3.6.3). Тогда, учитывая (3.6.8), получим

$$I_1 = \left[\frac{2A_{-2}}{(1-\bar{e}^2)^{3/2}} + \frac{2A_{-1}}{(1-\bar{e}^2)^{1/2}}\right] \operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1-\bar{e}}{1+\bar{e}}}\,\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} -$$

$$-\frac{A_{-2}\bar{e}}{1-\bar{e}^2}\,\frac{\sin\psi}{1+\bar{e}\cos\psi} + \left[A_0 + A_1 + \left(1-\frac{\bar{e}^2}{2}\right)A_2\right]\psi +$$

$$+\bar{e}\,(A_1+2A_2)\sin\psi + \frac{1}{4}\,\bar{e}^2 A_2 \sin 2\psi + c_6', \quad (3.6.9)$$

где через $c_6'$ обозначено значение интеграла при $\psi = \psi_0$ или $\tau = 0$.

Перейдем к вычислению $I_2$. При помощи (3.2.19) имеем

$$\eta^2\left(1+\frac{k_1^2}{2}\sin^2\theta\right) =$$

$$= B_0 + B_1\sin\theta + B_2\cos 2\theta + B_3\sin 3\theta + B_4\cos 4\theta,$$

где

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{2}\,s^2 + \frac{3}{16}\,s^2k_1^2, \\ B_1 &= 2s\gamma - \frac{3}{2}\,s^2 d, \\ B_2 &= -\frac{1}{2}\,s^2 - \frac{1}{4}\,s^2 d, \\ B_3 &= \frac{1}{2}\,s^2 d, \quad B_4 = \frac{s^2k_1^2}{16}. \end{aligned}\right\} \quad (3.6.10)$$

Поэтому

$$I_2 = B_0\theta + \frac{1}{2}\,B_2\sin 2\theta + \frac{1}{4}\,B_4\sin 4\theta -$$

$$-B_1\cos\theta - \frac{1}{3}\,B_3\cos 3\theta + c_6'', \quad (3.6.11)$$

где $c_6''$ — значение интеграла при $\theta = \theta_0$.

Постоянные $A_k$ и $B_k$, входящие в формулы (3.6.9) и (3.6.11), можно легко выразить через элементы $a$, $e$ и $\delta$. Если это сделать, а затем подставить (3.6.9) и (3.6.11)

в уравнение (3.6.2), то окончательно будем иметь

$$n_0(t-t_0)+M_0' = 2\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1-\bar{e}}{1+\bar{e}}}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - e^*\sqrt{1-\bar{e}^2}\frac{\sin\psi}{1+\bar{e}\cos\psi} + \gamma_0\psi+\gamma_0'\theta+\gamma_1\sin\psi+\gamma_2\sin 2\psi+\gamma_2'\sin 2\theta + \gamma_4'\sin 4\theta+\gamma_1'\cos\theta+\gamma_3'\cos 3\theta, \quad (3.6.12)$$

где

$$n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a^3}}\left\{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2)(1-\delta^2)+ +3\varepsilon^3\sigma\delta(1-\delta^2)(1-e^2)+\frac{3}{8}\varepsilon^4(1-e^2)\times \times(1-\delta^2)(1+11\delta^2-e^2+5e^2\delta^2)\right\}, \quad (3.6.13)$$

$$e^* = e\{1-\varepsilon^2(1-e^2)(1-\delta^2)+2\varepsilon^3\sigma\delta(1-\delta^2)\times \times(1-e^2)+\varepsilon^4\delta^2(1-\delta^2)(1-e^2)(3+e^2)\}, \quad (3.6.14)$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_0 &= -\varepsilon^2(1-e^2)^{3/2}\left\{\frac{1}{2}\delta^2+\varepsilon\sigma\delta(1-\delta^2)- -\frac{\varepsilon^2}{16}[(24-96\delta^2+78\delta^4)-e^2(8\delta^2-11\delta^4)]\right\},\\
\gamma_0' &= \varepsilon^2(1-e^2)^{3/2}\left\{\frac{1}{2}\delta^2+\varepsilon\sigma\delta(1-\delta^2)- -\frac{\varepsilon^2\delta^2}{16}[(24-27\delta^2)-e^2(8-11\delta^2)]\right\},\\
\gamma_1 &= -\frac{1}{4}\varepsilon^4\delta^2 e(4-5\delta^2)(1-e^2)^{3/2},\\
\gamma_2 &= \frac{3}{32}\varepsilon^4\delta^4 e^2(1-e^2)^{3/2},\\
\gamma_2' &= -\varepsilon^2(1-e^2)^{3/2}\left\{\frac{1}{4}\delta^2+\frac{1}{2}\varepsilon\sigma\delta(1-\delta^2)- -\frac{\varepsilon^2\delta^2}{8}[(6-7\delta^2)-e^2(2-3\delta^2)]\right\},\\
\gamma_4' &= \frac{\varepsilon^4\delta^4}{64}(1-e^2)^{5/2},\\
\gamma_1' &= \frac{\varepsilon^3\sigma}{2}\delta(4-5\delta^2)(1-e^2)^{3/2},\\
\gamma_3' &= -\frac{\varepsilon^3\sigma}{6}\delta^3(1-e^2)^{3/2},
\end{aligned}\right\} \quad (3.6.15)$$

причем

$$M_0' = n_0 (c_6' + c_6'' - c_6).$$

Очевидно, $M_0'$ можно рассматривать как произвольную постоянную, вместо $c_6$.

## § 3.7. Постоянная $i$

В этом параграфе мы введем новый элемент $i$, вместо элемента $\delta$. Как мы сейчас увидим, этот новый элемент во многих отношениях более удобен по сравнению с $\delta$.

Пусть

$$s = \sin i, \tag{3.7.1}$$

где $s$ дается формулой (3.2.14).

Разрешая методом последовательных приближений уравнение (3.2.14) относительно $\delta$, получим

$$\delta = s - \varepsilon\sigma (1 - s^2) \{1 - \varepsilon\sigma s - \varepsilon^2 (3 - 4s^2 + e^2)\}. \tag{3.7.2}$$

Далее легко выводим следующее равенство:

$$\sqrt{1-\delta^2}\left\{1 - \varepsilon\sigma\delta - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma^2(1 - 6\delta^2) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^3\sigma\delta(3 - 4\delta^2 + e^2)\right\} = \sqrt{1-s^2},$$

сравнивая которое с первой формулой (3.5.11), видим, что

$$\alpha = \pm\sqrt{1-s^2}, \tag{3.7.3}$$

Установим область значений элемента $i$, которые он может принимать в реальном движении. Из условия (2.5.7) следует, что

$$\max \delta = 1.$$

Поскольку, далее, $\delta$ — наибольший из двух корней $F(\eta)$, заключенных в промежутке $[-1, +1]$, то наименьшее возможное значение $\delta$ можно найти из условия равенства этих корней, т. е. из уравнения

$$\delta^* = \delta,$$

где $\delta^*$ определяется формулой (2.6.6).

Разрешая это уравнение, находим

$$\min \delta = -\varepsilon\sigma + \varepsilon^3\sigma\,(3 + e^2).$$

Таким образом,

$$-\varepsilon\sigma + \varepsilon^3\sigma\,(3 + e^2) \leqslant \delta \leqslant 1.$$

При помощи этого условия из формулы (3.2.14) заключаем, что

$$0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Если теперь принять, что

$$0 \leqslant i \leqslant \pi, \tag{3.7.4}$$

то будем иметь

$$s \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \alpha = \cos i. \tag{3.7.5}$$

Далее, из второй формулы (3.5.11), если в ней выразить $\delta$ через $s$ согласно (3.7.2), имеем

$$\beta = 2\varepsilon\sigma\alpha s\,\{1 - \varepsilon^2\,(4 - 5s^2 + e^2s^2)\}, \tag{3.7.6}$$

а если выразить $\delta$ через $s$ в формуле (2.5.6), то получим

$$\alpha_3 = \alpha\sqrt{fma\,(1-e^2)}\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}[(2-3s^2) + e^2\,(2-s^2)] + \right.$$

$$+ \frac{\varepsilon^2\sigma^2}{2}(1-7s^2) - \frac{\varepsilon^4}{8}[(12s^2-11s^4) +$$

$$\left. + e^2(16+16s^2-34s^4) + e^4\,(4s^2-3s^4)]\right\}. \tag{3.7.7}$$

Отсюда следует, что знак постоянной $\alpha_3$ совпадает со знаком $\alpha$, т. е. при $0° \leqslant i < 90°$ мы будем иметь $\alpha_3 > 0$, а при $90° < i \leqslant 180°$ — $\alpha_3 < 0$. Таким образом, область $0° \leqslant i < 90°$ будет соответствовать прямым движениям, а область $90° < i < 180°$ движениям обратным.

Поскольку знак выражения для $w$ совпадает со знаком $\alpha_3$, то введение $i$ позволяет получить для $w$ однозначную формулу. Однако этим не исчерпывается удобство использования $i$ вместо $\delta$. Оказывается, что если выразить $\delta$ через $s = \sin i$, то выражения для коэффициентов, входящих в формулы для координат $\xi$, $\eta$, $w$ и $t$ существенным образом упрощаются. Так, например, в резуль-

тате указанной замены мы будем иметь

$$\gamma = -\varepsilon\sigma\{1-2s^2-\varepsilon^2[(3-12s^2+10s^4)+e^2(1-2s^4)]\}, \quad (3.7.8)$$

$$d = \varepsilon\sigma s\{1-\varepsilon^2[(5-6s^2)-e^2(1-2s^2)]\}, \quad (3.7.9)$$

$$k_1^2 = \varepsilon^2 s^2\{1+\sigma^2-e^2-4\varepsilon^2(1-s^2)(1-e^2)\}, \quad (3.7.10)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{fma(1-e^2)}\left\{1+\frac{\varepsilon^2}{2}(1-s^2)(3+e^2)+\right.$$
$$+\frac{\varepsilon^2\sigma^2}{2}(6-7s^2)-\frac{\varepsilon^4}{8}(1-s^2)[(9+11s^2)+$$
$$\left.+e^2(6+34s^4)+e^4(1+3s^2)]\right\}, \quad (3.7.11)$$

$$\bar{e} = e\{1+\varepsilon^2(1-e^2)(1-2s^2)+$$
$$+\varepsilon^4(1-e^2)[(3-16s^2+14s^4)-2e^2(1-s^2)^2]\}, \quad (3.7.12)$$

$$k_2^2 = \varepsilon^2 e^2\{s^2-\varepsilon^2(1-10s^2+11s^4+e^2s^4)\}, \quad (3.7.13)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{fma(1-e^2)}\left\{1-\frac{\varepsilon^2}{2}(3-4s^2-e^2)-\right.$$
$$\left.-\frac{\varepsilon^4}{8}[(8-72s^2+64s^4)+e^2(2-40s^2+48s^4)+e^4]\right\}, \quad (3.7.14)$$

$$\nu = \frac{\varepsilon^2}{4}(1+\sigma^2)(12-15s^2)+\frac{\varepsilon^4}{64}[288-$$
$$-1296s^2+1035s^4-e^2(144+288s^2-510s^4)], \quad (3.7.15)$$

$$\alpha_1 = -\frac{fm}{2a}\{1-\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2)+$$
$$+\varepsilon^4 s^2(1-s^2)(1-e^2)(3+e^2)\}, \quad (3.7.16)$$

$$\alpha_2^2 = fma(1-e^2)\{1+2\varepsilon^2(1+e^2)(1-s^2)+$$
$$+\varepsilon^4(1-s^2)[(1-6s^2)-e^2(2+8s^2)+e^4(1-2s^2)]\}, \quad (3.7.17)$$

$$\delta^* = -s-\varepsilon\sigma(1-s^2)[1+\varepsilon\sigma s-\varepsilon^2(3-4s^2+e^2)]. \quad (3.7.18)$$

Сравнение этих формул с формулами §§ 3.2, 3.3, 3.4 показывает, что в выражениях для приведенных коэффициентов исчезли члены с $\varepsilon^3\sigma$, либо члены с $\varepsilon^2\sigma^2$, либо вовсе члены, пропорциональные $\sigma$. В дальнейшем мы увидим, что аналогичные упрощения произойдут и в выражениях для остальных постоянных.

## § 3.8. Определение $\psi$ для заданного момента времени $t$

Введем переменную $E$ согласно уравнению

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=\sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{3.8.1}$$

Тогда

$$2\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1-\bar{e}}{1+\bar{e}}}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}-e^*\frac{\sqrt{1-\bar{e}^2}\sin\psi}{1+\bar{e}\cos\psi}=E-e^*\sin E. \tag{3.8.2}$$

Если теперь в уравнении (3.6.12) при помощи (3.4.7) исключить $\theta$, а затем, используя (3.7.2), выразить коэффициенты через $a$, $e$ и $s$, то, принимая во внимание (3.8.2), получим

$$\begin{aligned}E-e^*\sin E-\lambda\psi=&\\ =M-\lambda_1\sin\psi-\lambda_2\sin 2\psi-\lambda_1'\cos(\psi+\omega)-&\\ -\lambda_2'\sin 2(\psi+\omega)-\lambda_3'\cos 3(\psi+\omega)-&\\ -\lambda_4'\sin 4(\psi+\omega)-\lambda_{22}'\sin 2\psi\cos 2(\psi+\omega),&\end{aligned} \tag{3.8.3}$$

где

$$M=n_0(t-t_0)+M_0, \tag{3.8.4}$$

$$\omega=\nu\psi+\omega_0, \tag{3.8.5}$$

$$M_0=M_0'-\gamma_0'\omega_0. \tag{3.8.6}$$

Здесь $\nu$ дается формулой (3.7.15), а

$$\begin{aligned}n_0=\sqrt{\frac{fm}{a^3}}\Big\{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2)+&\\ +\frac{3}{8}\varepsilon^4(1-e^2)(1-s^2)(1+11s^2-e^2+5e^2s^2)\Big\},&\end{aligned} \tag{3.8.7}$$

$$e^*=e\{1-\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2)+\varepsilon^4s^2(1-e^2)(3+e^2)\}, \tag{3.8.8}$$

$$\lambda=-\frac{3}{16}\varepsilon^4(1-e^2)^{3/2}(8-32s^2+25s^4), \tag{3.8.9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{\varepsilon^4}{4} s^2 e (4-5s^2)(1-e^2)^{3/2},\\
\lambda_2 &= \frac{3}{32}\varepsilon^4 s^4 e^2 (1-e^2)^{3/2},\\
\lambda_1' &= \frac{\varepsilon^3\sigma}{2} s (4-5s^2)(1-e^2)^{3/2},\\
\lambda_2' &= -\frac{\varepsilon^2}{4} s^2 (1-e^2)^{3/2} \times\\
&\quad \times \left\{1-\frac{\varepsilon^2}{4}[(12-13s^2)-e^2(4-5s^2)]\right\},\\
\lambda_3' &= -\frac{\varepsilon^3\sigma}{6} s^3 (1-e^2)^{3/2},\\
\lambda_4' &= -\frac{\varepsilon^4 s^4}{64}(1-e^2)^{5/2},\\
\lambda_{22}' &= \frac{\varepsilon^4 e^2 s^4}{16}(1-e^2)^{3/2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.8.10)$$

Полученные в этом параграфе уравнения позволяют найти $\psi$ для любого заданного момента времени $t$. Порядок решения этих уравнений может быть следующим. Сначала для заданного момента $t$ по формуле (3.8.4) находим $M$. Для вычисления $\psi$ по известному $M$ можно воспользоваться методом последовательных приближений. Принимая в первом приближении $E = M$, мы по формуле (3.8.1) вычисляем $\psi$, а затем из (3.8.5) находим $\omega$, после чего уравнение (3.8.3) дает нам $E$. Затем в указанном порядке снова определяем $\psi$, $\omega$, $E$ и т. д.

Можно показать, что процесс последовательных приближений сходится при любых $e$, меньших единицы.

## § 3.9. Формула для определения долготы $w$

В этом параграфе мы выведем окончательную формулу для вычисления долготы $w$. С этой целью подставим во второе слагаемое правой части (3.5.20) вместо $\theta$ его значение из формулы (3.4.7) и в полученном выражении исключим $\delta$ при помощи (3.7.2). Тогда

$$w = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\alpha\sin\theta+\beta}{\cos\theta}\right) + \hat{\Omega}, \qquad (3.9.1)$$

где $\hat{\Omega}$ дается формулой

$$\hat{\Omega} = \mu\psi + \Omega_0 + \mu_1 \sin\psi + \mu_2 \sin 2\psi + \mu_3 \sin 3\psi + \\ + \mu_4 \sin 4\psi + \mu_1' \cos(\psi + \omega) + \mu_2' \sin 2(\psi + \omega). \quad (3.9.2)$$

Здесь

$$\mu = -\frac{3}{2}\alpha\left\{\varepsilon^2(1+\sigma^2) + \frac{\varepsilon^4}{8}(6 - 17s^2 - 24e^2s^2)\right\}, \quad (3.9.3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1 = -2\varepsilon^2\alpha e\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{8}[(4 - 28s^2) - e^2(6 + 7s^2)]\right\},\\
&\mu_2 = -\frac{\varepsilon^2\alpha e^2}{4}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}[(22 + s^2) + e^2(2 + s^2)]\right\},\\
&\mu_3 = \frac{\varepsilon^4\alpha e^3}{4}(2 - s^2), \quad \mu_4 = \frac{\varepsilon^4\alpha e^4}{64}(2 + s^2),\\
&\mu_1' = \varepsilon^3\sigma\alpha s(1 - e^2), \quad \mu_2' = \frac{\varepsilon^4\alpha s^2}{32}(1 - e^2)^2,
\end{aligned}\right\} \quad (3.9.4)$$

причем

$$\Omega_0 = \tilde{c}_5 + \beta_0\omega_0,$$

а постоянные $\alpha$ и $\beta$ определяются формулами (3.7.5) и (3.7.6).

## § 3.10. Формулы для прямоугольных координат

Прямоугольные координаты $x$, $y$, $z$ согласно § 2.2 определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}
x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\cos w,\\
y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\sin w,\\
z &= c\sigma + \xi\eta.
\end{aligned}\right\} \quad (3.10.1)$$

Зная $\xi$, $\eta$, $w$, мы можем по этим формулам вычислить прямоугольные координаты спутника. Однако можно вывести другие формулы для $x$, $y$, $z$, которые во многих случаях могут оказаться более удобными, чем формулы (3.10.1).

Представим (3.9.1) в виде

$$w = w' + \hat{\Omega},$$

где

$$w' = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\alpha \sin\theta + \beta}{\cos\theta}\right),$$

Тогда

$$\cos w' = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\beta^2+2\alpha\beta\sin\theta-(1-\alpha^2)\sin^2\theta}},$$

$$\sin w' = \frac{\alpha\sin\theta+\beta}{\sqrt{1+\beta^2+2\alpha\beta\sin\theta-(1-\alpha^2)\sin^2\theta}}.$$

Далее из (3.2.19) получаем

$$1-\eta^2 = \frac{1+\beta^2+2\alpha\beta\sin\theta-(1-\alpha^2)\sin^2\theta}{\bar{\gamma}\,(1+d\sin\theta)^2}.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1-\eta^2}\cos w' &= \frac{\sqrt{\bar{\gamma}^{-1}}\cos\theta}{1+d\sin\theta},\\ \sqrt{1-\eta^2}\sin w' &= \frac{\sqrt{\bar{\gamma}^{-1}}\,(\alpha\sin\theta+\beta)}{1+d\sin\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{3.10.2}$$

Поскольку

$$\left.\begin{aligned}\cos w &= \cos w'\cos\hat{\Omega} - \sin w'\sin\hat{\Omega},\\ \sin w &= \cos w'\sin\hat{\Omega} + \sin w'\cos\hat{\Omega},\end{aligned}\right\} \tag{3.10.3}$$

то при помощи (3.10.2), (3.10.3) и третьей формулы (3.5.11) мы вместо уравнений (3.10.1) будем иметь

$$\left.\begin{aligned}x &= \rho\,(\cos\theta\cos\hat{\Omega} - \alpha\sin\theta\sin\hat{\Omega} - \beta\sin\hat{\Omega}),\\ y &= \rho\,(\cos\theta\sin\hat{\Omega} + \alpha\sin\theta\cos\hat{\Omega} + \beta\cos\hat{\Omega}),\\ z &= c\sigma + \rho'\,(s\sin\theta+\gamma),\end{aligned}\right\} \tag{3.10.4}$$

где

$$\rho = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sigma^2)\,(\xi^2+c^2)}}{1+d\sin\theta}, \quad \rho' = \frac{\xi}{1+d\sin\theta}. \tag{3.10.5}$$

Здесь $\alpha$ и $\beta$ даются формулами (3.7.5) и (3.7.6), а $\gamma$ и $d$ — равенствами (3.7.8) и (3.7.9).

В формулы (3.10.4) и (3.10.5) входят три переменные: $\xi$, $\theta$ и $\hat{\Omega}$. Первая из них может быть определена по формуле (3.3.16) либо по формуле

$$\xi = a\,(1 - e\cos E), \tag{3.10.6}$$

которая легко получается из (3.3.16), если в ней согласно (3.8.1) выразить $\psi$ через $E$. Переменные $\theta$ и $\hat{\Omega}$ могут быть найдены из уравнений (3.4.7) и (3.9.2).

В заключение приведем формулу для вычисления радиуса-вектора:

$$r = \sqrt{(\xi + c\sigma\eta)^2 + c^2(1+\sigma^2)(1-\eta^2)}, \qquad (3.10.7)$$

которую можно легко вывести из уравнений (3.10.1).

## § 3.11. Формулы для скорости

Выведем теперь формулы для вычисления составляющих скорости спутника в промежуточном движении. С этой целью продифференцируем по времени уравнения (3.10.1). Тогда получим

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2+c^2}}\,\dot{\xi}\xi\cos w - \sqrt{\frac{\xi^2+c^2}{1-\eta^2}}\,\dot{\eta}\eta\cos w - \sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\,\dot{w}\sin w,$$

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2+c^2}}\,\dot{\xi}\xi\sin w - \sqrt{\frac{\xi^2+c^2}{1-\eta^2}}\,\dot{\eta}\eta\sin w + \sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\,\dot{w}\cos w,$$

$$\dot{z} = \eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}.$$

Подставляя сюда вместо $\cos w$ и $\sin w$ их выражения из (3.10.1), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x\xi\dot{\xi}}{\xi^2+c^2} - \frac{x\eta\dot{\eta}}{1-\eta^2} - y\dot{w}, \\ \dot{y} &= \frac{y\xi\dot{\xi}}{\xi^2+c^2} - \frac{y\eta\dot{\eta}}{1-\eta^2} + x\dot{w}, \\ \dot{z} &= \eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.11.1)$$

Если теперь продифференцировать по времени формулы (3.3.16) и (3.2.19), то найдем

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{ae\sigma_2(1-\bar{e}^2)\sin\psi\sqrt{1-k_2^2\sin^2\psi}}{J(1+\bar{e}\cos\psi)^2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{(s-\gamma d)\,\sigma_1\cos\theta\sqrt{1-k_1^2\sin^2\theta}}{J(1+d\sin\theta)^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.11.2)$$

где

$$J = \xi^2 + c^2\eta^2. \tag{3.11.3}$$

Далее из интеграла площадей имеем

$$\dot{w} = \frac{\alpha_3}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}. \tag{3.11.4}$$

Формулы (3.11.2) — (3.11.4), таким образом, позволяют найти проекции скорости на координатные оси. Для вычисления орбитальной скорости $V$ может служить формула

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{3.11.5}$$

Кроме того, для контроля можно воспользоваться интегралом энергии

$$V^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1, \tag{3.11.6}$$

где $\alpha_1$ дается формулой (3.7.16).

## § 3.12. Оценки периодических членов второго порядка

При выводе формул этой главы нам приходилось разлагать многие величины в ряды по степеням малых параметров $\varepsilon$ и $\sigma$. Во всех разложениях мы сохраняли члены до четвертого порядка включительно относительно этих величин и отбрасывали члены шестого порядка и выше. Совершенно ясно, что некоторые из сохраненных членов можно отбросить, поскольку их нельзя обнаружить из наблюдений. Это прежде всего касается тех периодических членов формул для $\hat{\Omega}$, $E$ и $\theta$, которые пропорциональны $\varepsilon^4$ и $\varepsilon^3\sigma$. Преследуя эту цель, мы оценим амплитуды указанных неравенств в следующей области значений элементов $e$ и $i$:

$$0 \leqslant e < 1, \quad 0^\circ \leqslant i \leqslant 180^\circ. \tag{3.12.1}$$

При этом в согласии с § 1.9 примем

$$\varepsilon^4 = 1{,}17 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon^3\sigma = -1{,}27 \cdot 10^{-6}.$$

Результаты этих оценок собраны в таблицах 3, 4 и 5. Во вторых столбцах этих таблиц содержатся значения указанных величин, выраженные в единицах шестого знака

после запятой. В третьих столбцах они выражены в секундах дуги, а в четвертых приведены отклонения в линейных координатах спутника, соответствующие этим величинам. Отклонения эти выражены в метрах и соответствуют положению спутника на расстоянии 7000 *км* от центра Земли.

Таблица 3

**Максимальные значения $|\mu_k|$**

| | $\lvert\mu_k\rvert\cdot 10^6$ | $\lvert\mu_k\rvert''$ | $\lvert\mu_k\rvert$ *м* |
|---|---|---|---|
| $\mu_3$ | 0,58 | 0,12 | 4,1 |
| $\mu_4$ | 0,04 | 0,01 | 0,3 |
| $\mu_2'$ | 0,02 | 0 003 | 0,1 |
| $\mu_1'$ | 1,27 | 0,26 | 8,9 |

Таблица 4

**Максимальные значения $|\lambda_k|$**

| | $\lvert\lambda_k\rvert\cdot 10^6$ | $\lvert\lambda_k\rvert''$ | $\lvert\lambda_k\rvert$ *м* |
|---|---|---|---|
| $\lambda_1$ | 0,09 | 0,02 | 0,66 |
| $\lambda_2$ | 0,02 | 0,005 | 0,15 |
| $\lambda_1'$ | 0,64 | 0,13 | 4,44 |
| $\lambda_3'$ | 0,21 | 0,04 | 1,48 |
| $\lambda_4'$ | 0,02 | 0,004 | 0,13 |
| $\lambda_{22}'$ | 0,02 | 0,003 | 0,10 |

Таблица 5

**Максимальные значения абсолютных величин амплитуд периодических членов формулы (3.4.7)**

| | $(\,)\cdot 10^6$ | $(\,)''$ | $(\,)$ *м* | | $(\,)\cdot 10^6$ | $(\,)''$ | $(\,)$ *м* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{256}k_2^4$ | 0,01 | 0,003 | 0,10 | $\frac{1}{16}k_1^4$ | 0,07 | 0,015 | 0,51 |
| $\frac{1}{256}k_1^4$ | 0,005 | 0,001 | 0,04 | $\frac{1}{16}k_2^4$ | 0,07 | 0,015 | 0,51 |
| $\frac{1}{32}k_1^2k_2^2$ | 0,01 | 0,002 | 0,06 | $\frac{1}{8}k_2^2\nu$ | 0,44 | 0,09 | 3,07 |

Нужно заметить, что приведенные здесь оценки являются, безусловно, завышенными, поскольку максимальные значения различных амплитуд достигаются при различных значениях элементов $e$ и $i$, в то время как мы оценивали каждый член независимо в области (3.12.1).

## § 3.13. Вековые члены третьего порядка

Очевидно, нет необходимости искать периодические члены порядка $\varepsilon^6$, ибо они чрезвычайно малы и не могут быть обнаружены современными средствами наблюдений. Однако вековые неравенства, имеющие порядок $\varepsilon^6$ (третий порядок относительно $J_2$), могут привести к заметным отклонениям, когда мы рассматриваем движение на больших промежутках времени.

Обозначим через $\Delta n_0$, $\Delta\lambda$, $\Delta\nu$ и $\Delta\mu$ члены порядка $\varepsilon^6$ в $n_0$, $\lambda$, $\nu$ и $\mu$ соответственно. Тогда будем иметь

$$\Delta n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a^3}}\left\{\frac{\varepsilon^6}{16}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\alpha^2[(1-38s^2-83s^4)+\right.$$

$$+e^2(-2+28s^2-266s^4)+e^4(1+10s^2-35s^4)]-$$

$$\left.-\frac{3}{2}\varepsilon^4\sigma^2(1-e^2)(1-s^2)(1-7s^2)\right\},$$

$$\Delta\lambda = \frac{\varepsilon^6}{256}(1-e^2)^{3/2}[(-5736+11384s^2-12840s^4+$$

$$+7188s^6)+e^2(384-3216s^4+2940s^6)]+$$

$$+\frac{3}{16}\varepsilon^4\sigma^2(1-e^2)(4-12s^2+9s^4),$$

$$\Delta\nu = -\frac{\varepsilon^6}{256}[(7544-11752s^2-42276s^4+23085s^6)+$$

$$+e^2(-10424+14984s^2-26760s^4+22830s^6)+$$

$$+e^4(-384-1224s^2-912s^4+2940s^6)]-$$

$$-\frac{9}{64}\varepsilon^6(1-e^2)^{3/2}(32-168s^2+260s^4-125s^6)-$$

$$-\frac{3}{32}\varepsilon^4\sigma^2[(96-64s^2-25s^4)+e^2(24+48s^2-85s^4)],$$

$$\Delta\mu = -\frac{\varepsilon^6}{128}\cos i\,[(-352-2844s^2+2544s^4)+$$
$$+e^2(1336-2688s^2+4386s^4)+e^4(-168+384s^2-867s^4)]-$$
$$-\frac{3}{8}\varepsilon^4\sigma^2[(-18+15s^2)-12e^2s^2]\cos i.$$

Вычисления показывают, что вклад этих членов может достигать нескольких стотысячных долей градуса в сутки.

## § 3.14. Сводка формул

В этом параграфе мы приведем формулы, позволяющие находить прямоугольные координаты спутника для произвольного момента времени $t$.

1. Определение $\psi$ и $E$:

$$M = n_0(t-t_0)+M_0, \tag{3.14.1}$$
$$E = M + e^*\sin E + \lambda\psi - \lambda_2'\sin 2(\psi+\omega) - \lambda_1'\cos(\psi+\omega), \tag{3.14.2}$$
$$\omega = \nu\psi + \omega_0,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{3.14.3}$$

где $n_0$, $e^*$, $\bar{e}$, $\lambda$, $\lambda_2'$, $\lambda_1'$, $\nu$ даются формулами § 3.8 и 3.13.

Вычисление $\psi$ и $E$ производится методом последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения можно взять

$$\psi = E = M.$$

2. Определение $\xi$ и $\theta$:

$$\xi = a(1-e\cos E),$$
$$\theta = \psi+\omega+\frac{k_1^2}{8}\sin 2(\psi+\omega)-\frac{k_2^2}{8}(1+\nu)\sin 2\psi, \tag{3.14.4}$$

где $k_1^2$ и $k_2^2$ находятся по формулам § 3.7.

3. Определение $\hat{\Omega}$, $\rho$ и $\rho'$:

$$\hat{\Omega} = \mu\psi+\Omega_0+\mu_1\sin\psi+\mu_2\sin 2\psi+$$
$$+\mu_3\sin 3\psi+\mu_1'\cos(\psi+\omega), \tag{3.14.5}$$
$$\rho = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sigma^2)(\xi^2+c^2)}}{1+d\sin\theta}, \quad \rho' = \frac{\xi}{1+d\sin\theta}, \tag{3.14.6}$$

где $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ $\mu_1'$ и $d$ даются формулами § 3.9 и 3.7.

4. Определение прямоугольных координат:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho(\cos\theta\cos\hat{\Omega} - \alpha\sin\theta\sin\hat{\Omega} - \beta\sin\hat{\Omega}),\\ y &= \rho(\cos\theta\sin\hat{\Omega} + \alpha\sin\theta\cos\hat{\Omega} + \beta\cos\hat{\Omega}),\\ z &= c\sigma + \rho'(s\sin\theta + \gamma), \end{aligned}\right\} \qquad (3.14.7)$$

где $\beta$ и $\gamma$ должны вычисляться по формулам § 3.7.

Отброшенные здесь периодические члены могут дать ошибку около 1 *м*.

## § 3.15. Эйлерово и кеплерово движения. Элементы орбиты

Рассматриваемое здесь промежуточное движение, которое определяется силовой функцией обобщенной задачи двух неподвижных центров, будем называть в дальнейшем *эйлеровым движением*. Промежуточную орбиту спутника, соответствующую этому движению, назовем *эйлеровой орбитой* *).

Выведенные в этой главе формулы эйлерова движения содержат следующие произвольные постоянные или *элементы орбиты*:

$$a,\ e,\ i,\ \omega_0,\ \Omega_0,\ M_0.$$

Согласно § 2.5 и 3.7 элементы $a$, $e$, $i$ могут принимать все возможные значения из области

$$a > 0,\quad 0 \leqslant e < 1,\quad 0^\circ \leqslant i \leqslant 180^\circ.$$

Очевидно, для угловых элементов $\omega_0$, $\Omega_0$, $M_0$ мы имеем

$$0^\circ \leqslant \omega_0 < 360^\circ,\quad 0^\circ \leqslant \Omega_0 < 360^\circ,\quad 0^\circ \leqslant M_0 < 360^\circ.$$

Элементы $a$, $e$, $i$ полностью определяют ту ограниченную область пространства, в которой происходит движение спутника (см. § 2.7 и 3.7). Они характеризуют размеры и форму орбиты и максимальное удаление спутника от плоскости экватора. Элементы $\omega_0$, $\Omega_0$ и $M_0$ определяют главным образом положение спутника на орбите.

*) Леонард Эйлер (1707—1783) был первым, кто дал постановку задачи двух неподвижных центров и нашел ее решение в плоском случае.

Рассмотрим теперь один предельный случай. Пусть в формуле (1.9.1) $c = 0$ и $\sigma = 0$. Тогда

$$W = \frac{fm}{r}$$

и дифференциальные уравнения движения спутника будут иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{fmx}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{fmy}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{fmz}{r^3}.$$

Движение, определяемое этими уравнениями, называется *невозмущенным кеплеровым движением*. Формулы, описывающие невозмущенное движение, можно легко получить из формул эйлерова движения, если положить в последних $\varepsilon = 0$ и $\sigma = 0$. В результате будем иметь

$$x = r(\cos\theta\cos\Omega_0 - \cos i\sin\theta\sin\Omega_0),$$
$$y = r(\cos\theta\sin\Omega_0 + \cos i\sin\theta\cos\Omega_0),$$
$$z = r\sin i\sin\theta,$$
$$r = a(1 - e\cos E),$$
$$\theta = \psi + \omega_0,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$
$$E - e\sin E = M,$$
$$M = n_0(t - t_0) + M_0,$$
$$n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a^3}}.$$

Невозмущенная кеплерова орбита спутника является более простой кривой, чем промежуточная эйлерова орбита. Она представляет собой *эллипс с большой полуосью a* и *эксцентриситетом e* (рис. 16). Положение плоскости невозмущенной орбиты определяют углы $\Omega_0$ и $i$, которые называются соответственно *долготой восходящего узла* и *наклоном орбиты*. Ориентацию эллипса в плоскости орбиты определяет элемент $\omega_0$, который называется *угловым расстоянием перигея от узла* или *аргументом перигея*. *Перигей* — это точка орбиты, наименее удаленная от центра масс Земли $O$ (рис. 17). Величины $M$, $E$ и $\psi$ называются соответственно *средней аномалией*, *эксцентриче-*

*ской анамалией* и *истинной аномалией*. Шестым элементом невозмущенного движения является *средняя аномалия в эпоху* $M_0$. Этот элемент определяет положение спутника на орбите в начальный момент времени или эпоху $t = t_0$. Угол $\theta = \psi + \omega_0$ называется *аргументом широты*.

Таким образом, при $c = 0$ и $\sigma = 0$ эйлеровы элементы $a$, $e$, $i$, $\Omega_0$, $\omega_0$ и $M_0$ переходят соответственно в большую полуось, эксцентриситет, наклон, долготу узла, аргумент

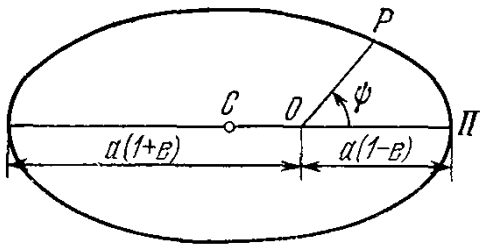


Рис. 16. Кеплеров эллипс.

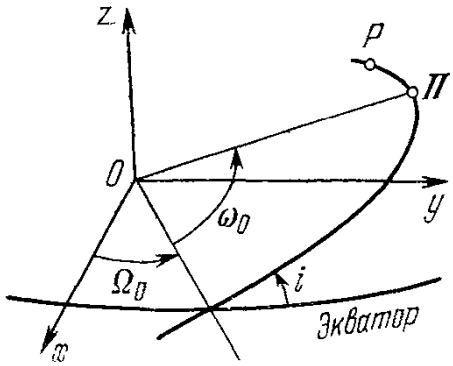


Рис. 17. Кеплеровы элементы.

перигея и среднюю аномалию в эпоху кеплеровой орбиты. При этом $\psi$, $\theta$, $E$ и $M$ превращаются соответственно в истинную аномалию, аргумент широты, эксцентрическую и среднюю аномалии.

Кеплерова орбита играет чрезвычайно важную роль в небесной механике. Она часто используется как орбита первого приближения при исследовании движения многих небесных тел. Применение кеплеровых элементов для построения теории движения небесного тела особенно эффективно в том случае, когда возмущения в его движении малы, т. е. когда его движение мало отличается от эллиптического. К таким случаям прежде всего относятся большие планеты Солнечной системы. Однако если возмущения кеплеровых элементов велики, то в качестве орбиты первого приближения приходится искать другие орбиты — промежуточные орбиты, которые более близки к истинной орбите небесного тела, нежели кеплеров эллипс. К такому случаю относится Луна, при построении теории движения которой использовались специальные промежуточные орбиты.

Что касается задачи о движении близких искусственных спутников, то с точки зрения возмущений она занимает как бы промежуточное положение между задачей о движении планет и задачей о движении Луны. Поэтому здесь можно использовать как методы, разработанные в теории планет, так и методы, основанные на применении промежуточных орбит. В этом отношении эйлерова орбита, по-видимому, имеет ряд преимуществ по сравнению с другими промежуточными орбитами *). Она наиболее полно учитывает основные возмущающие факторы и построена в результате математически строгого решения задачи. Она и будет положена нами в основу теории движения искусственных спутников.

## § 3.16. Вековые неравенства

Из § 3.14 и 3.15 следует, что величины

$$n = n_0(1 + \lambda), \quad \dot{\Omega} = \mu n, \quad \dot{\omega} = \nu n \qquad (3.16.1)$$

являются соответственно *средним аномалистическим движением*, *средним движением узла* и *средним движением перигея*. Эти величины являются важными характеристиками орбиты, поскольку они определяют движение спутника на больших промежутках времени. Интересно поэтому сравнить теоретические значения этих характеристик с результатами, полученными из наблюдений.

В качестве примера возьмем пять спутников, средние элементы $n$, $e$, $i$ которых приводятся в табл. 6 [4].

Таблица 6

**Элементы орбиты**

| №№ | Спутник | $n\left(\frac{\text{град}}{\text{сут}}\right)$ | $a$ (км) | $e$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1958 $\beta_2$ | 3862,640 | 8679,648 | 0,190000 | 34°,2500 |
| 2 | 1962 $\alpha\varepsilon$ | 3285,400 | 9670,222 | 0,242241 | 44,7995 |
| 3 | 1962 $\beta\varepsilon$ | 2801,146 | 10755,537 | 0,284224 | 47,5101 |
| 4 | 1961 o | 4993,199 | 7316,376 | 0,008022 | 66,8157 |
| 5 | 1961 $\alpha\delta_1$ | 3123,598 | 10003,817 | 0,012092 | 95,8564 |

*) О промежуточных орбитах в теории движения искусственных спутников Земли см. книгу [3].

Величины $\mu$ и $\nu$, которые входят в (3.16.1), вычислялись по формулам (3.9.3) и (3.7.15). Для $c$ и $\sigma$ были приняты численные значения, которые приводятся в § 1.9.

Таблица 7

**Значения $\dot{\Omega}$**

| №№ | Набл. | Вычисл. | О — С |
|---|---|---|---|
| 1 | —3°,01507 | —3°,01356 | —0°,00151 |
| 2 | —1,85885 | —1,85829 | —0,00056 |
| 3 | —1,27912 | —1,27848 | —0,00064 |
| 4 | —2,42478 | —2,42429 | —0,00049 |
| 5 | +0,21039 | +0,21033 | +0,00006 |

Таблица 8

**Значения $\dot{\omega}$**

| №№ | Набл. | Вычисл. | О — С |
|---|---|---|---|
| 1 | 4°,40462 | 4°,40383 | 0°,00079 |
| 2 | 1,98617 | 1,98590 | 0,00027 |
| 3 | 1,21210 | 1,21173 | 0,00037 |
| 4 | —0,69576 | —0,69707 | 0,00131 |
| 5 | —0,97693 | 0,97743 | 0,00050 |

Результаты вычислений приведены в табл. 7 и 8. Там же даны $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$, полученные из наблюдений, и соответствующие невязки. Максимальные невязки составляют несколько тысячных долей градуса, что указывает на то, что промежуточная орбита действительно учитывает существенную часть возмущений в движении спутника.

## § 3.17. Разложение эллиптических функций в тригонометрические ряды

В § 3.2 и 3.3 мы видели, что координаты $\eta$ и $\xi$ выражаются через переменную $\tau$ посредством эллиптических функций. Действительно, согласно (3.2.9) и (3.3.9)

$$\theta = \operatorname{am}(l_1, k_1), \quad \psi = \operatorname{am}(l_2, k_2), \qquad (3.17.1)$$

где

$$l_1 = \sigma_1 (\tau + \bar{c}_3), \quad l_2 = \sigma_2 (\tau + c_4), \tag{3.17.2}$$

а координаты $\eta$ и $\xi$ зависят от $\sin\theta$ и $\cos\psi$ или от $\operatorname{sn} l_1$ и $\operatorname{cn} l_2$.

Воспользуемся теперь формулами (3.1.4)—(3.1.7) и разложим $\theta$, $\psi$, $\sin\theta$ и $\cos\psi$ в тригонометрические ряды, сохраняя при этом члены до $\varepsilon^4$ включительно.

Прежде всего мы имеем

$$\boldsymbol{K}_1 = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{9}{64}k_1^4 + \ldots\right\}, \tag{3.17.3}$$

$$q_1 = \frac{k_1^2}{16}\left\{1 + \frac{1}{2}k_1^2 + \frac{21}{64}k_1^4 + \ldots\right\}. \tag{3.17.4}$$

Поэтому формула (3.1.7) дает

$$\theta = u + \frac{k_1^2}{8}\left(1 + \frac{k_1^2}{2}\right)\sin 2u + \frac{k_1^4}{256}\sin 4u + \ldots, \tag{3.17.5}$$

где

$$u = \frac{\pi l_1}{2\boldsymbol{K}_1} = \frac{\pi\sigma_1}{2\boldsymbol{K}_1}(\tau + \bar{c}_3). \tag{3.17.6}$$

Последний член в формуле (3.17.5) меньше $0'',001$ и его нужно отбросить. Следовательно,

$$\theta = u + \frac{k_1^2}{8}\left(1 + \frac{k_1^2}{2}\right)\sin 2u. \tag{3.17.7}$$

Аналогичным образом находим

$$\psi = v + \frac{k_2^2}{8}\left(1 + \frac{k_2^2}{2}\right)\sin 2v, \tag{3.17.8}$$

где

$$v = \frac{\pi l_2}{2\boldsymbol{K}_2} = \frac{\pi\sigma_2}{2\boldsymbol{K}_2}(\tau + c_4). \tag{3.17.9}$$

Подставляя формулы (3.17.3) и (3.17.4) в (3.1.4) и (3.1.5) и пренебрегая членами меньше $0'',01$, получим

$$\sin\theta = \left(1 + \frac{k_1^2}{16}\right)\sin u + \frac{k_1^2}{16}\sin 3u, \tag{3.17.10}$$

$$\cos\psi = \left(1 - \frac{k_2^2}{16}\right)\cos v + \frac{k_2^2}{16}\cos 3v. \tag{3.17.11}$$

Установим связь между переменными $u$ и $v$. Для этого исключим из (3.17.6) и (3.17.9) переменную $\tau$. Тогда

найдем

$$u = \frac{\sigma_1 K_2}{\sigma_2 K_1} v + \frac{\pi\sigma_1}{2K_1}(\bar{c}_3 - c_4).$$

Но при помощи (3.4.4) и (3.4.5) и равенства (3.17.3) имеем

$$\frac{\sigma_1 K_2}{\sigma_2 K_1} = 1 + \nu, \quad \frac{\pi\sigma_1}{2K_1}(\bar{c}_3 - c_4) = \omega_0.$$

Поэтому

$$u = (1 + \nu)\, v + \omega_0. \tag{3.17.12}$$

Зная разложения для $\sin\theta$ и $\cos\psi$, легко найти тригонометрические ряды для $\eta$ и $c/\xi$. При этом координата $\eta$ будет периодической функцией $u$, а $\xi$ — периодической функцией $v$ с периодом $2\pi$.

Используя далее разложения (3.17.8) и (3.17.10), нетрудно представить переменную $\hat{\Omega}$ в виде

$$\hat{\Omega} = \Omega + \Psi\,(u,\ v), \tag{3.17.13}$$

где

$$\Omega = \mu v + \Omega_0, \tag{3.17.14}$$

а $\Psi\,(u,\ v)$ есть периодическая функция с периодом $2\pi$ относительно каждой из переменных $u$ и $v$.

Таким образом, можно получить другую совокупность формул, описывающих промежуточную орбиту. Существенным здесь будет следующее: прямоугольные координаты спутника будут периодическими функциями с периодом $2\pi$ относительно переменных $u$, $v$ и $\Omega$. А эти переменные суть линейные функции $\tau$:

$$u = m_1\tau + u_0',\ v = m_2\tau + v_0',\ \Omega = m_3\tau + \Omega_0', \tag{3.17.15}$$

где

$$m_1 = \frac{\pi\sigma_1}{2K_1},\quad m_2 = \frac{\pi\sigma_2}{2K_2},\quad m_3 = \mu\frac{\pi\sigma_2}{2K_2}, \tag{3.17.16}$$

а $u_0'$, $v_0'$, $\Omega_0'$ — постоянные. Следовательно, промежуточное движение является условно-периодическим по $\tau$.

## § 3.18. Определение элементов орбиты по начальным условиям

В предыдущих параграфах были выведены формулы, позволяющие вычислять положение спутника в пространстве для любого момента времени, если известны численные значения элементов $a$, $e$, $i$, $\Omega_0$, $\omega_0$ и $M_0$. Элементы

орбиты могут быть определены двумя способами. Во-первых, их можно вычислить, если для какого-нибудь момента времени $t = t_0$ нам даны положение спутника и его скорость. Во-вторых, они могут быть найдены по наблюдениям спутника *). В этом параграфе мы рассмотрим первый способ.

Итак, пусть для момента времени $t = t_0$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Требуется определить постоянные $a$, $e$, $i$, $\Omega_0$, $\omega_0$ и $M_0$. Задачу эту можно разбить на три части. Сначала по известным координатам и их производным находим постоянные интегрирования $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$. Затем, зная эти постоянные, определяем первую группу элементов $a$, $e$, $i$. После этого легко находится вторая группа элементов $\Omega_0$, $\omega_0$ и $M_0$.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{r_0^2} = x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - c\sigma)^2, \tag{3.18.1}$$

$$V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2, \tag{3.18.2}$$

$$r_0' = x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + (z_0 - c\sigma)\dot{z}_0. \tag{3.18.3}$$

Тогда из уравнений (2.2.1) для момента $t = t_0$ имеем

$$\xi_0^2 = \frac{\overline{r_0^2} - c^2}{2}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{4c^2(z_0 - c\sigma)^2}{(\overline{r_0^2} - c^2)^2}}\right\}, \tag{3.18.4}$$

$$\eta_0 = \frac{z_0 - c\sigma}{\xi_0}, \quad \operatorname{tg} w_0 = \frac{y_0}{x_0}, \tag{3.18.5}$$

где через $\xi_0$, $\eta_0$, $w_0$ обозначены сфероидальные координаты для начального момента времени.

Для того чтобы однозначно определить $\xi_0$, $\eta_0$, $w_0$ из формул (3.18.4) и (3.18.5), мы должны воспользоваться следующими условиями:

$$\xi_0 > 0, \quad \operatorname{sgn}\cos w_0 = \operatorname{sgn} x_0. \tag{3.18.6}$$

Продифференцируем по времени уравнения (2.2.1) и положим $t = t_0$. Тогда получим

$$\dot{w}_0 = \frac{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0}{(\xi_0^2 + c^2)(1 - \eta_0^2)}. \tag{3.18.7}$$

*) Эта задача рассмотрена в работе [5].

Интегралы (2.3.1), (2.3.7) и (2.3.3) теперь дают

$$2\alpha_1 = V_0^2 - \frac{2fm\,(\xi_0 - c\sigma\eta_0)}{J_0}, \tag{3.18.8}$$

$$\alpha_2^2 = \overline{r}_0^2 V_0^2 - r_0'^2 - c^2\dot{z}_0^2 + Q_0, \tag{3.18.9}$$

$$\alpha_3 = x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0, \tag{3.18.10}$$

где

$$Q_0 = \frac{2fm\xi_0\eta_0\,(c^2\eta_0 + c\sigma\xi_0)}{J_0}, \tag{3.18.11}$$

$$J_0 = \xi_0^2 + c^2\eta_0^2.$$

Перейдем теперь к определению постоянных $a$, $e$, $i$. Полагая

$$\hat{a} = -\frac{fm}{2\alpha_1}, \quad \hat{e}^2 = 1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{(fm)^2}, \quad \hat{s}^2 = 1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}, \tag{3.18.12}$$

и имея в виду (3.7.7), (3.7.16) и (3.7.17), мы можем написать

$$a = \hat{a}\{1 - \varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2) + \varepsilon^4 s^2(1-s^2)(1-e^2)(3+e^2)\},$$

$$1 - e^2 = (1-\hat{e}^2)\{1 - \varepsilon^2(1+3e^2)(1-s^2) + 2\varepsilon^4(1-s^2)[1 + e^2(4+2s^2) + e^4(3-2s^2)]\},$$

$$1 - s^2 = (1-\hat{s}^2)\{1 + \varepsilon^2 s^2(1-e^2) - \varepsilon^4 s^2(1-e^2)[(3-2s^2) + e^2(1+4s^2)] + \varepsilon^2\sigma^2(1-7s^2)\}.$$

Решая эти уравнения методом последовательных приближений, получим

$$a = \hat{a}\{1 - \hat{\varepsilon}^2(1-\hat{e}^2)(1-\hat{s}^2) - \hat{\varepsilon}^4(1-\hat{e}^2)(1-\hat{s}^2)[(3-5\hat{s}^2) + \hat{e}^2(1-3\hat{s}^2)]\}, \tag{3.18.13}$$

$$1 - e^2 = (1-\hat{e}^2)\{1 - \hat{\varepsilon}^2(1+3\hat{e}^2)(1-\hat{s}^2) - \hat{\varepsilon}^4(1-\hat{s}^2)[(5-6\hat{s}^2) + \hat{e}^2(14-24\hat{s}^2) - \hat{e}^4(3+2\hat{s}^2)]\}, \tag{3.18.14}$$

$$\cos^2 i = (1-\hat{s}^2)\{1 + \hat{\varepsilon}^2\hat{s}^2(1-\hat{e}^2) - \hat{\varepsilon}^4\hat{s}^2(1-2\hat{s}^2)(1-\hat{e}^2)^2 - \hat{\varepsilon}^2\sigma^2(1-7\hat{s}^2)\}, \tag{3.18.15}$$

где

$$\hat{\varepsilon} = \frac{c}{\hat{a}\,(1-\hat{e}^2)}. \tag{3.18.16}$$

Квадрант угла $i$ определяется однозначно, поскольку знак $\cos i$ совпадает со знаком постоянной $\alpha_3$, а $\sin i \geqslant 0$.

Формулы (3.18.13)—(3.18.16) дают нам значения элементов $a$, $e$, $i$ с точностью до $\varepsilon^4$ включительно. Зная эти элементы, мы по формуле (3.8.7) можем найти $n_0$. Однако для этой очень важной постоянной можно вывести другую и более точную формулу. Для этого из уравнений (3.8.7) и (2.5.4) сначала устанавливаем следующее равенство:

$$n_0 = (-2\alpha_1)^{3/2} (fm)^{-1}. \tag{3.18.17}$$

Поэтому

$$n_0 = \sqrt{\frac{fm}{\hat{a}^3}}. \tag{3.18.18}$$

Перейдем к определению угловых элементов $\Omega_0$, $\omega_0$, $M_0$. Найдем сначала значения переменных $\psi$ и $\theta$ для $t = t_0$. С этой целью положим

$$\varkappa = \frac{a(1-e\bar{e}) - \xi_0}{\xi_0 e - a(\bar{e}-e)}, \tag{3.18.19}$$

$$\chi = \frac{\eta_0 - \gamma}{s - \eta_0 d}. \tag{3.18.20}$$

Тогда из уравнений (3.3.16) и (3.11.2) имеем

$$\cos\psi_0 = \varkappa, \tag{3.18.21}$$

$$\sin\psi_0 = \frac{ae(1-\bar{e}^2) J_0 \dot{\xi}_0}{\sigma_2 [\xi_0 \bar{e} - a(\bar{e}-e)]^2 \sqrt{1-k_2^2(1-\varkappa^2)}}, \tag{3.18.22}$$

а уравнения (3.2.19) и (3.11.2) дают

$$\sin\theta_0 = \chi, \tag{3.18.23}$$

$$\cos\theta_0 = \frac{(s-\gamma d) J_0 \dot{\eta}_0}{\sigma_1 (s-\eta_0 d)^2 \sqrt{1-k_1^2\chi^2}}. \tag{3.18.24}$$

Зная $\theta_0$ и $\psi_0$, из формул (3.4.3) получаем

$$\omega_0 = \theta_0 - (1+\nu)\psi_0 - \frac{k_1^2}{8}\left(1+\frac{k_1^2}{2}\right)\sin 2\theta_0 + \\ + \frac{k_2^2}{8}\left(1+\nu+\frac{k_2^2}{2}\right)\sin 2\psi_0. \tag{3.18.25}$$

Определив теперь $\omega^{(0)}$ из равенства

$$\omega^{(0)} = \nu\psi_0 + \omega_0, \tag{3.18.26}$$

мы можем найти $\Omega_0$ по формуле

$$\Omega_0 = w_0 - \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos i \sin\theta_0 + \beta}{\cos\theta_0}\right) - \mu\psi_0 - \mu_1 \sin\psi_0 - \\ - \mu_2 \sin 2\psi_0 - \mu_3 \sin 3\psi_0 - \mu_1' \cos(\psi + \omega^{(0)}), \quad (3.18.27)$$

которая легко получается из (3.9.1) и (3.9.2).

Остается найти элемент $M_0$. Полагая в уравнениях (3.8.1) и (3.8.3) $t = t_0$, будем иметь

$$\operatorname{tg}\frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-\bar{e}}{1+\bar{e}}}\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}, \quad (3.18.28)$$

$$M_0 = E_0 - e_0^* \sin E_0 - \lambda\psi_0 + \lambda_1' \cos(\psi + \omega^{(0)}) + \\ + \lambda_2' \sin 2(\psi + \omega^{(0)}). \quad (3.18.29)$$

Заметим, что в формулах (3.18.25), (3.18.27) и (3.18.29) были отброшены периодические члены, меньшие 0″,01.

## § 3.19. Замечания

Изложение этой главы в основном соответствует работам автора [6], [7]. Вековые члены третьего порядка были получены в работе Л. П. Насоновой [8]. Симметричный случай был подробно рассмотрен в более ранних статьях автора [9]—[12] и в работе И. Ижака [13].

Алгоритм вычисления симметричной промежуточной орбиты, основанный на других принципах, был разработан М. Д. Кисликом [14]. Приближенные формулы для несимметричного случая были найдены также К. Маршалом [15] и Е. И. Тимошковой [16]. Случаи орбит с малыми эксцентриситетами и наклонами были рассмотрены в статьях М. А. Вашковьяка [17] и С. Н. Вашковьяк [18], а полярные орбиты были подробно исследованы В. С. Уральской [19]. Сравнение вычислений по формулам промежуточного движения с результатами численного интегрирования было проведено в работах Л. М. Доможиловой и автора [20], [21].

ГЛАВА IV

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЙЛЕРОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТЫ

## § 4.1. Введение

В предыдущих главах было подробно изучено промежуточное движение искусственного спутника. Была рассмотрена качественная картина движения, введены элементы промежуточной орбиты и получены все необходимые формулы, позволяющие определять положение спутника и его скорость для произвольного момента времени. В настоящей главе будут выведены дифференциальные уравнения, которые дадут возможность находить возмущения, не принятые во внимание при построении промежуточной орбиты.

Подобно тому как это имеет место в классической теории возмущений, мы при решении уравнений возмущенного движения за искомые функции примем элементы промежуточного движения. Другими словами, мы будем считать, что в возмущенном движении координаты и составляющие скорости спутника определяются формулами промежуточного движения, в которых элементы орбиты не являются постоянными, а суть некоторые функции времени.

Сначала мы рассмотрим только такие возмущающие силы, которые имеют силовую функцию, т. е. будем предполагать, что дифференциальные уравнения движения спутника могут быть записаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.1)$$

где $W$ дается формулой (1.9.1) или (1.9.8), а возмущающая функция $R$ зависит от координат $x$, $y$, $z$ и времени $t$.

Принимая за обобщенные координаты величины $\xi, \eta, w$ и вводя формулами (2.2.4) обобщенные импульсы $\xi', \eta', w'$, мы вместо системы (4.1.1) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial K'}{\partial \xi'}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial K'}{\partial \eta'}, & \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial K'}{\partial w'}, \\ \frac{d\xi'}{dt} &= -\frac{\partial K'}{\partial \xi}, & \frac{d\eta'}{dt} &= -\frac{\partial K'}{\partial \eta}, & \frac{dw'}{dt} &= -\frac{\partial K'}{\partial w}, \end{aligned}\right\} \quad (4.1.2)$$

где

$$K' = K - R, \quad (4.1.3)$$

$$K = T - W, \quad (4.1.4)$$

причем $T$ есть кинетическая энергия, отнесенная к единице массы.

При $R = 0$ система (4.1.2) описывает промежуточное движение спутника, определяемое каноническими элементами $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ и $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, которые мы ввели в § 2.2. В случае промежуточного движения эти элементы являются постоянными. В возмущенном движении они будут функциями времени, удовлетворяющими следующим уравнениям *):

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}, \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (4.1.5)$$

Канонические элементы $\alpha_k$ и $\beta_k$ аналогичны каноническим элементам Якоби в кеплеровом движении. Известно, что элементы Якоби не являются удобными переменными при решении уравнений возмущенного движения. Их недостаток заключается в том, что в правых частях дифференциальных уравнений появляются смешанные члены, т. е. члены вида $t \sin \gamma t$, где $\gamma$ — постоянная **). По аналогичным причинам элементы $\alpha_k$ и $\beta_k$ необходимо заменить другими, более удобными каноническими элементами. В теории кеплерова движения такими элементами служат элементы Делоне и элементы Пуанкаре. Здесь мы введем аналогичные системы элементов. Заметим, однако, что в данном случае задача существенно осложняется тем обстоятельством, что рассматриваемая промежуточная орбита характеризуется тремя частотами,

*) О методе вариации произвольных постоянных в случае канонических уравнений см., например, книгу М. Ф. Субботина [1].

**) Подробнее об этом см., также [1].

в то время как кеплеровская орбита зависит только от одной частоты. Задача, тем не менее, и здесь успешно разрешается, если воспользоваться общей теорией условно-периодических движений *).

## § 4.2. Канонические элементы $A_k$ и $B_k$

Введем элементы $A_1$, $A_2$, $A_3$ формулами

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sqrt{\Phi}\,d\xi}{\xi^2+c^2}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi}\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sqrt{F}\,d\eta}{1-\eta^2}, \quad A_3 = \alpha_3, \tag{4.2.1}$$

где $\Phi$ и $F$ даются равенствами (2.2.11), $\xi_1$ и $\xi_2$ корни многочлена $\Phi$, между которыми изменяется координата $\xi$, а $\eta_1$ и $\eta_2$ — корни многочлена $F$, лежащие в промежутке $[-1, +1]$.

Вторую группу элементов $B_1$, $B_2$, $B_3$ введем уравнениями

$$\left.\begin{aligned} t+\beta_1 &= \omega_{11}B_1+\omega_{21}B_2+\omega_{31}B_3,\\ \beta_2 &= \omega_{12}B_1+\omega_{22}B_2+\omega_{32}B_3,\\ \beta_3 &= \omega_{13}B_1+\omega_{23}B_2+\omega_{33}B_3, \end{aligned}\right\} \tag{4.2.2}$$

где

$$\omega_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3). \tag{4.2.3}$$

Докажем, что такое преобразование $\alpha_k$ и $\beta_k$ в $A_k$ и $B_k$ — каноническое. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31}\\ \omega_{12} & \omega_{22} & \omega_{32}\\ \omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33} \end{vmatrix}. \tag{4.2.4}$$

Тогда из (4.2.2) находим

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_{11}}(t+\beta_1)+\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_{12}}\beta_2+\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_{13}}\beta_3\right],\\ B_2 &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_{21}}(t+\beta_1)+\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_{22}}\beta_2+\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_{23}}\beta_3\right],\\ B_3 &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_{31}}(t+\beta_1)+\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_{32}}\beta_2+\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_{33}}\beta_3\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.5}$$

Далее имеем

$$dA_k = \frac{\partial A_k}{\partial\alpha_1}d\alpha_1+\frac{\partial A_k}{\partial\alpha_2}d\alpha_2+\frac{\partial A_k}{\partial\alpha_3}d\alpha_3,$$

*) Об условно-периодических решениях см. книгу К. Шарлье [2].

или, если принять во внимание (4.2.3),

$$dA_i = \omega_{i1}\, d\alpha_1 + \omega_{i2}\, d\alpha_2 + \omega_{i3}\, d\alpha_3.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{3} B_i\, dA_i = \frac{t}{\Delta} \sum_{j=1}^{3} \left( \omega_{1j} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{11}} + \omega_{2j} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{21}} + \omega_{3j} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{31}} \right) d\alpha_j +$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{3} \beta_i \sum_{j=1}^{3} \left( \omega_{1j} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{1i}} + \omega_{2j} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{2i}} + \omega_{3j} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{3i}} \right) d\alpha_j.$$

Но

$$\omega_{1j} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{1i}} + \omega_{2j} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{2i}} + \omega_{3j} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{3i}} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \Delta, & i = j. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{3} (\beta_i\, d\alpha_i - B_i\, dA_i) = -t\, d\alpha_1. \qquad (4.2.6)$$

Поэтому согласно теории канонических преобразований дифференциальные уравнения для элементов $A_k$ и $B_k$ будут иметь вид

$$\frac{dA_k}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial B_k}, \quad \frac{dB_k}{dt} = -\frac{\partial R'}{\partial A_k} \qquad (k = 1, 2, 3), \qquad (4.2.7)$$

где

$$R' = -\alpha_1 + R.$$

Канонические элементы $A_k$ и $B_k$ свободны от того недостатка, который имеют первоначальные элементы $\alpha_k$ и $\beta_k$. Действительно, согласно [2] промежуточное движение является условно-периодическим. Относительно каждой из величин $B_1$, $B_2$, $B_3$ координаты спутника будут периодическими с периодом, равным $2\pi$. Этим свойством будет обладать и функция $R'$, а следовательно, и правые части уравнений (4.2.7).

## § 4.3. Вычисление величины $A_1$

Пусть

$$\Phi_0(\xi) = (\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1). \qquad (4.3.1)$$

Тогда на основании (2.6.4) многочлен $\Phi(\xi)$ можно представить в виде

$$\Phi(\xi) = -2\alpha_1 [(\xi - p)^2 + q^2]\, \Phi_0(\xi), \qquad (4.3.2)$$

где $p$ и $q$ даются формулами (2.6.1) и (2.6.2).

Разлагая подынтегральную функцию первого интеграла (4.2.1) в ряд по степеням $c/\xi$, $p$ и $q$ и сохраняя в этом разложении члены до четвертого порядка относительно $\varepsilon$ включительно, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\sqrt{\Phi(\xi)}\,d\xi}{\xi^2+c^2}=\sqrt{-2\alpha_1}\sum_{k=1}^{5}a_kY_k, \tag{4.3.3}$$

где

$$Y_k=\frac{1}{\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\sqrt{\Phi_0(\xi)}}{\xi^k}\,d\xi, \tag{4.3.4}$$

а величины $a_k$ определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} &a_1=1, \quad a_2=-p,\\ &a_3=\frac{1}{2}q^2-c^2,\\ &a_4=\frac{1}{2}pq^2+c^2p,\\ &a_5=c^4-\frac{1}{2}q^2c^2-\frac{1}{8}q^2. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.5}$$

Перейдем в интегралах (4.3.4) от переменной $\xi$ к переменной $E$ согласно (3.10.6), т. е.

$$\xi = a\,(1 - e\cos E).$$

Это даст

$$Y_k=\frac{a^{2-k}e^k}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 E\,dE}{(1-e\cos E)^k}. \tag{4.3.6}$$

Вычисление интегралов (4.3.6) не представляет трудностей и мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &Y_1=a\left(1-\sqrt{1-e^2}\right),\\ &Y_2=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}}, \quad Y_3=\frac{e^2}{2a\,(1-e^2)^{3/2}},\\ &Y_4=\frac{e^2}{2a^2\,(1-e^2)^{5/2}}, \quad Y_5=\frac{4e^2+e^4}{8a^3\,(1-e^2)^{7/2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.7}$$

Далее, если в формулы (2.6.1) и (2.6.2) подставить вместо $\delta$ его выражение из (3.7.2) и заменить $\varepsilon$ на $c/a(1-e^2)$,

то получим

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{c^2(1-s^2)}{a(1-e^2)}\left\{1+\frac{c^2(1-4s^2-e^2)}{a^2(1-e^2)^2}\right\}, \\ q^2 &= c^2\left\{s^2-\frac{c^2(1-6s^2+5s^4)}{a^2(1-e^2)^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.8}$$

Используя теперь (4.3.8) и (4.3.5), мы можем выразить постоянные $a_k$ через $a$, $e$ и $s$. Для того чтобы найти выражения для $a_k$ и $Y_k$ через элементы $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$, нужно воспользоваться формулами (3.18.12)—(3.18.15). Подставляя затем эти выражения в (4.3.3), окончательно получим

$$\begin{aligned} A_1 = A-\alpha_2+\frac{c^2(fm)^2}{4\alpha_2^3}\left[\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{\alpha_2^2}{A^2}-\left(1-3\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\right]+ \\ +\frac{c^4(fm)^4}{64\alpha_2^7}\left[15\left(1-14\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}+21\frac{\alpha_3^4}{\alpha_2^4}\right)-\right. \\ -6\frac{\alpha_2^2}{A^2}\left(3-30\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}+35\frac{\alpha_3^4}{\alpha_2^4}\right)+ \\ \left.+3\frac{\alpha_2^4}{A^4}\left(1-6\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}+5\frac{\alpha_3^4}{\alpha_2^4}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

где положено

$$A=\frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}}. \tag{4.3.10}$$

## § 4.4. Вычисление величины $A_2$

Согласно второй формуле (4.2.1)

$$A_2=\frac{1}{2\pi}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{\sqrt{F(\eta)}\,d\eta}{1+\eta}+\frac{1}{2\pi}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{\sqrt{F(\eta)}\,d\eta}{1-\eta}, \tag{4.4.1}$$

а на основании (2.6.11)

$$F(\eta) = -2\alpha_1(\eta_2-\eta)(\eta-\eta_1)[c^2q'^2-c^2(\eta-p')^2], \tag{4.4.2}$$

где $p'$ и $q'$ даются формулами (2.6.8)—(2.6.10).

Используя подстановку

$$\eta=\frac{\eta_1+\eta_2}{2}-\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\zeta$$

и полагая

$$b=\frac{2-\eta_1-\eta_2}{\eta_2-\eta_1}, \quad b'=\frac{2+\eta_1+\eta_2}{\eta_2-\eta_1}, \tag{4.4.3}$$

мы вместо (4.4.1) будем иметь

$$A_2 = \frac{(\eta_2-\eta_1)\sqrt{-2\alpha_1 q'^2 c^2}}{4\pi} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{Q\sqrt{1-\zeta^2}\,d\zeta}{\zeta+b} - \int_{-1}^{1} \frac{Q\sqrt{1-\zeta^2}\,d\zeta}{\zeta-b'} \right\}, \qquad (4.4.4)$$

где

$$Q = \sqrt{1-c^2(r-k\zeta)^2}, \qquad (4.4.5)$$

причем

$$r = \frac{\eta_1+\eta_2-2p'}{2q'c}, \quad k = \frac{\eta_2-\eta_1}{2q'c}. \qquad (4.4.6)$$

При помощи формул (2.6.8)—(2.6.10) мы убеждаемся в том, что величины $r$ и $k$ имеют нулевой порядок. Поэтому, разлагая (4.4.5) в ряд по степеням $c^2$ и ограничиваясь принятой точностью, получим

$$Q = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + b_4\zeta^4, \qquad (4.4.7)$$

где

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= 1 - \frac{1}{2}c^2r^2 - \frac{1}{8}c^4r^4, \\ b_1 &= c^2kr + \frac{1}{2}c^4kr^3, \\ b_2 &= -\frac{1}{2}c^2k^2 - \frac{3}{4}c^4k^2r^2, \\ b_3 &= \frac{1}{2}c^4k^3r, \\ b_4 &= -\frac{1}{8}c^4k^4. \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.8)$$

Далее имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{\zeta+b} &= \frac{Q_0}{\zeta+b} + B_0 + B_1\zeta + B_2\zeta^2 + B_3\zeta^3, \\ \frac{Q}{\zeta-b'} &= \frac{Q_0'}{\zeta-b'} + B_0' + B_1'\zeta + B_2'\zeta^2 + B_3'\zeta^3, \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.9)$$

где

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= b_0 - b_1b + b_2b^2 - b_3b^3 + b_4b^4, \\ B_0 &= b_1 - b_2b + b_3b^2 - b_4b^3, \\ B_2 &= b_3 - b_4b. \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.10)$$

Что касается выражений для $B_1$ и $B_3$, то они нам не потребуются. Очевидно, коэффициенты $Q_0'$ и $B_k'$ получаются из $Q_0$ и $B_k$ заменой $b$ на $-b'$.

Учитывая (4.4.9), мы из (4.4.4) получаем

$$A_2 = \frac{cq'(\eta_2-\eta_1)\sqrt{-2\alpha_1}}{4\pi}\left\{(B_0-B_0')\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\zeta^2}\,d\zeta + \right.$$

$$+ Q_0\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{b+\zeta}\,d\zeta + Q_0'\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{b'-\zeta}\,d\zeta +$$

$$+ (B_1-B_1')\int_{-1}^{1}\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\,d\zeta + (B_2-B_2')\int_{-1}^{1}\zeta^2\sqrt{1-\zeta^2}\,d\zeta +$$

$$\left. + (B_3-B_3')\int_{-1}^{1}\zeta^3\sqrt{1-\zeta^2}\,d\zeta\right\}. \qquad (4.4.11)$$

Вычислив интегралы, стоящие в правой части (4.4.11), будем иметь

$$A_2 = \frac{cq'(\eta_2-\eta_1)\sqrt{-2\alpha_1}}{4}\left\{Q_0b + Q_0'b' - \right.$$

$$-\left(Q_0\sqrt{b^2-1} + Q_0'\sqrt{b'^2-1}\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{2}(B_0-B_0') + \frac{1}{8}(B_2-B_2')\right\}, \qquad (4.4.12)$$

где

$$\eta_1 = \delta^*, \quad \eta_2 = \delta, \qquad (4.4.13)$$

причем $\delta^*$ и $\delta$ определяются равенствами (3.7.18) и (3.7.2).

Если в формулы (2.6.8)—(2.6.10) подставить вместо $\delta$ его значение из (3.7.2), то получим

$$p' = -\frac{\sigma}{\varepsilon(1-e^2)}\{1 + 4\varepsilon^4(1-e^2)(1-s^2)(1-2s^2)\}, \qquad (4.4.14)$$

$$cq' = a\sqrt{1-e^2}\left\{1 + 2\varepsilon^2(1-s^2) + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{1-e^2} - \right.$$

$$-\varepsilon^4[4(s^2-s^4) + 2e^2(1-s^4)] -$$

$$\left. - \frac{1}{8}\frac{\sigma^4}{(1-e^2)^2} + \varepsilon^2\sigma^2\frac{(1-2e^2)(1-s^2)}{1-e^2}\right\}. \qquad (4.4.15)$$

Используя формулы (4.4.13)—(4.4.15), мы можем выразить сначала $b$, $b'$, $r$ и $k$, а затем $b_k$, $Q_0$, $Q_0'$, $B_k$ и $B_k'$ через элементы $a$, $e$ и $s$. Если подставить значения этих постоянных в (4.4.12), то можно найти $A_2$ как функцию $a$, $e$ и $s$. Для того чтобы выразить $A_2$ через $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, нужно воспользоваться формулами (3.18.12)—(3.18.15). Опуская выкладки, приведем окончательный результат:

$$A_2 = \alpha_2 - \alpha_3 - \frac{c^2 (fm)^2}{4A^2\alpha_2}\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right) - \\ - \frac{3}{64}\frac{c^4 (fm)^4}{A^4\alpha_2^3}\left(1 - 6\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} + 5\frac{\alpha_3^4}{\alpha_2^4}\right) - \\ - \frac{1}{4}\frac{c^2\sigma^2 (fm)^2}{\alpha_2^3}\left(1 - 3\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right), \qquad (4.4.16)$$

где $A$ дается формулой (4.3.10).

Согласно последнему равенству (4.2.1)

$$A_3 = \alpha_3. \qquad (4.4.17)$$

Таким образом, мы получили все формулы, которые связывают элементы $A_1$, $A_2$ и $A_3$ с элементами $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$.

## § 4.5. Элементы $L$, $G$, $H$, $l$, $g$, $h$

Введем новые элементы $L$, $G$, $H$, $l$, $g$, $h$ по формулам

$$\left.\begin{array}{llll} L = A_1 + A_2 + A_3, & & l = B_1, \\ G = & A_2 + A_3, & g = B_2 - B_1, \\ H = & & A_3, & h = B_3 - B_2. \end{array}\right\} \qquad (4.5.1)$$

Поскольку, как легко проверить,

$$\sum_{i=1}^{3} A_i\, dB_i - (L\, dl + G\, dg + H\, dh) = 0,$$

то новые элементы являются каноническими, и дифференциальные уравнения, их определяющие, имеют вид

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial R'}{\partial l}, & \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial R'}{\partial g}, & \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial R'}{\partial h}, \\ \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial R'}{\partial L}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial R'}{\partial G}, & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial R'}{\partial H}, \end{array}\right\} \qquad (4.5.2)$$

где

$$R' = -\alpha_1 + R, \qquad (4.5.3)$$

при этом предполагается, что $\alpha_1$ выражена через $L$, $G$, $H$, а $R$ — через $L$, $G$, $H$, $l$, $g$, $h$.

Подставим в первые три формулы (4.5.1) вместо $A_1$, $A_2$, $A_3$ их значения из (4.3.9), (4.4.16), (4.4.17) и разрешим полученные уравнения относительно $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$. Тогда

$$\alpha_1 = -\frac{(fm)^2}{2L^2}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{c^2(1+\sigma^2)(fm)^2}{LG^3}\left(1-3\frac{H^2}{G^2}\right)-\right.$$
$$-\frac{15}{32}\frac{c^4(fm)^4}{LG^7}\left(1-14\frac{H^2}{G^2}+21\frac{H^4}{G^4}\right)-$$
$$-\frac{6}{32}\frac{c^4(fm)^4}{L^3G^5}\left(1-18\frac{H^2}{G^2}+25\frac{H^4}{G^4}\right)+$$
$$\left.+\frac{6}{32}\frac{c^4(fm)^4}{L^2G^6}\left(1-6\frac{H^2}{G^2}+9\frac{H^4}{G^4}\right)\right\}, \qquad (4.5.4)$$

$$\alpha_2 = G+\frac{1}{4}\frac{c^2(fm)^2}{L^2G}\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)+\frac{1}{4}\frac{c^2\sigma^2(fm)^2}{G^3}\left(1-3\frac{H^2}{G^2}\right)-$$
$$-\frac{8}{64}\frac{c^4(fm)^4}{L^3G^4}\left(1-4\frac{H^2}{G^2}+3\frac{H^4}{G^4}\right)-$$
$$-\frac{1}{64}\frac{c^4(fm)^4}{L^4G^3}\left(1+2\frac{H^2}{G^2}-3\frac{H^4}{G^4}\right), \qquad (4.5.5)$$

$$\alpha_3 = H. \qquad (4.5.6)$$

Как следует из гл. III, промежуточная орбита наиболее просто описывается элементами $a$, $e$, $i$, $\Omega_0$, $\omega_0$ и $M_0$, которые при $c = 0$ и $\sigma = 0$ обращаются в соответствующие кеплеровы элементы. С другой стороны, уравнения возмущенного движения наиболее просто записываются в элементах $L$, $G$, $H$, $l$, $g$, $h$, которые, как мы вскоре увидим, при $c = 0$ и $\sigma = 0$ обращаются в элементы Делоне. Поэтому необходимо установить связь между этими двумя системами элементов. С этой целью подставим формулы (3.18.12) в (3.18.13)—(3.18.15). Это позволит нам выразить элементы $a$, $e$, $i$ через $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$. Используя затем равенства (4.5.4)—(4.5.6), окончательно получим

$$a = \frac{L^2}{fm}\left\{1-\frac{c^2(fm)^2}{L^2G^2}\frac{H^2}{G^2}+\frac{1}{2}\frac{c^2(fm)^2}{LG^3}\left(1-3\frac{H^2}{G^2}\right)\right\}, \qquad (4.5.7)$$

$$1-e^2 = \frac{G^2}{L^2}\left\{1-4\frac{c^2(fm)^2}{G^4}\frac{H^2}{G^2}+\frac{1}{2}\frac{c^2(fm)^2}{L^2G^2}\left(1+5\frac{H^2}{G^2}\right)\right\}, \qquad (4.5.8)$$

$$\cos i = \frac{H}{G}\left\{1+\frac{1}{4}\frac{c^2(fm)^2}{L^2G^2}\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\right\}. \qquad (4.5.9)$$

Здесь для краткости опущены члены, имеющие порядок $c^4$ и выше.

Разрешая уравнения (4.5.7)—(4.5.9) относительно $L$, $G$, $H$, найдем

$$L = \sqrt{fma}\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(1-e^2)(1-s^2) + \frac{1}{4}\varepsilon^2\sqrt{1-e^2}(2-3s^2)\right\}, \tag{4.5.10}$$

$$G = \sqrt{fma(1-e^2)}\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}[(4-5s^2) + e^2(4-3s^2)]\right\}, \tag{4.5.11}$$

$$H = \sqrt{fma(1-e^2)}\cos i\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}[(2-3s^2) + e^2(2-s^2)]\right\}. \tag{4.5.12}$$

Формулы (4.5.7)—(4.5.12), таким образом, дают возможность переходить от элементов $L$, $G$, $H$ к элементам $a$, $e$, $i$ и наоборот.

Установим теперь зависимость между угловыми элементами. При $R = 0$, т. е. в случае промежуточного движения, из уравнений (4.5.2) находим

$$\left.\begin{aligned} l &= n(t-t_0) + l_0, \\ g &= n'(t-t_0) + g_0, \\ h &= n''(t-t_0) + h_0, \end{aligned}\right\} \tag{4.5.13}$$

где

$$n = \frac{\partial \alpha_1}{\partial L}, \quad n' = \frac{\partial \alpha_1}{\partial G}, \quad n'' = \frac{\partial \alpha_1}{\partial H}, \tag{4.5.14}$$

а $l_0$, $g_0$, $h_0$ — постоянные интегрирования.

Вычислив при помощи (4.5.4) соответствующие частные производные, мы получим $n$, $n'$ и $n''$ как функции $L$, $G$, $H$. Используя далее зависимости вида (4.5.10)—(4.5.12), мы можем выразить эти величины через $a$, $e$, $i$. В результате оказывается, что

$$n = n_0(1+\lambda), \quad n' = \nu n_0, \quad n'' = \mu n_0, \tag{4.5.15}$$

где $n_0$, $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ даются формулами (3.8.7), (3.8.9), (3.9.3) и (3.7.15).

С другой стороны, в промежуточном движении время $t$ входит в выражения для координат посредством следующих комбинаций:

$$\left.\begin{aligned} M' &= n(t-t_0)+(1+\lambda)M_0, \\ \omega' &= \nu n_0(t-t_0)+\omega_0+\nu M_0, \\ \Omega' &= \mu n_0(t-t_0)+\Omega_0+\mu M_0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.16)$$

Сравнивая уравнения (4.5.13) с (4.5.16) при условии (4.5.15), мы устанавливаем, что

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= M_0(1+\lambda), \\ g_0 &= \omega_0+\nu M_0, \\ h_0 &= \Omega_0+\mu M_0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.17)$$

Равенства (4.5.17) вместе с (4.5.13) и (4.5.15) позволяют перейти от элементов $M_0$, $\omega_0$, $\Omega_0$ к элементам $l$, $g$, $h$.

## § 4.6. Некоторые другие системы канонических элементов

В предыдущем параграфе была подробно рассмотрена каноническая система $L$, $G$, $H$, $l$, $g$, $h$, которую в дальнейшем мы будем считать основной канонической системой. Можно указать несколько других систем канонических элементов, которые могут оказаться удобными в некоторых частных случаях (например, малые эксцентриситеты, малые наклоны и т. д.). Прежде всего из (4.5.1) имеем

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= L-G, & B_1 &= l, \\ A_2 &= G-H, & B_2 &= l+g, \\ A_3 &= H, & B_3 &= l+g+h. \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.1)$$

Формулы (4.5.10)—(4.5.13) и (4.5.15), (4.5.17) позволяют установить связь между элементами $A_k$, $B_k$ и элементами $a$, $e$, $i$, $\omega_0$, $\Omega_0$, $M_0$. Ранее было показано, что эта система элементов является канонической.

Рассмотрим, кроме того, элементы:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= L, & c_1 &= l+g+h, \\ C_2 &= G-L, & c_2 &= g+h, \\ C_3 &= H-G, & c_3 &= h \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.2)$$

и элементы

$$\left.\begin{aligned} D_1&=L, & d_1&=l+g+h,\\ D_2&=\sqrt{2(L-G)}\cos(g+h), & d_2&=-\sqrt{2(L-G)}\sin(g+h),\\ D_3&=\sqrt{2(G-H)}\cos h, & d_3&=-\sqrt{2(G-H)}\sin h. \end{aligned}\right\} \tag{4.6.3}$$

Эти элементы, как легко проверить, являются также каноническими.

Итак, мы имеем следующие системы элементов промежуточного движения:

Система I: $a$, $e$, $i$, $\omega_0$, $\Omega_0$, $M_0$.

Система II: $L$, $G$, $H$, $l$, $g$, $h$.

Система III: $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$.

Система IV: $C_1$, $C_2$, $C_3$, $c_1$, $c_2$, $c_3$.

Система V: $D_1$, $D_2$, $D_3$, $d_1$, $d_2$, $d_3$.

В § 4.12 мы проведем аналогию между элементами эйлерова промежуточного движения и соответствующими элементами невозмущенного кеплерова движения.

## § 4.7. Задача об устойчивости движения спутника

Рассмотрим сначала промежуточное движение. В § 2.7 мы видели, что промежуточное движение спутника происходит в области, ограниченной двумя эллипсоидами и двумя гиперболоидами. Орбита спутника, как легко показать, касается одного эллипсоида, затем гиперболоида, второго эллипсоида и второго гиперболоида и т. д. Согласно [2] движение спутника будет условно-периодическим с тремя периодами. Введем эти периоды.

Назовем *аномалистическим периодом* $T_1$ промежуток времени между двумя последовательными касаниями внешнего (внутреннего) ограничивающего эллипсоида. Очевидно, этому промежутку времени соответствует изменение $\psi$ от некоторого $\psi_0$ до $\psi_0 + 2\pi$. *Драконическим периодом* $T_2$ назовем промежуток времени между двумя последовательными пересечениями спутником плоскости $z = c\sigma$, например, с юга на север. Как легко видеть, этому промежутку времени будет соответствовать изменение $\theta$ от $\theta_0$ до $\theta_0 + 2\pi$. Так как плоскость $z = c\sigma$ отстоит от экваториальной

плоскости на 7,5 км, то драконический период практически будет совпадать с промежутком времени между двумя последовательными пересечениями спутником плоскости экватора. Назовем, наконец, *сидерическим периодом* $T_3$ промежуток времени, в течение которого долгота $w_0$ возрастает на $2\pi$ радиан. В соответствии с этим введем *среднее аномалистическое движение* $n_1$, *среднее драконическое движение* $n_2$ и *среднее сидерическое движение* $n_3$ по формулам

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{n_2}, \quad T_3 = \frac{2\pi}{n_3}. \tag{4.7.1}$$

Ясно, что все три периода изменяются от оборота к обороту, подвергаясь периодическим (и, вообще говоря, малым) колебаниям. Однако если пренебречь этими малыми колебаниями, то мы получим некоторые средние значения для этих периодов, которые и будут характеризовать движение спутника на больших промежутках времени.

Обращаясь к уравнениям § 3.8 и 3.9, мы видим, что при изменении $\psi$ на $2\pi$ время $t$ изменяется (в среднем) на величину, равную $2\pi\,(1-\lambda)/n_0$. Поэтому

$$n_1 = \frac{n_0}{1-\lambda}.$$

Аналогичным образом находим, что

$$n_2 = n_1\,(1+\nu), \quad n_3 = n_2 + n_1\mu.$$

С принятой точностью, таким образом, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= n_0\,(1+\lambda), \\ n_2 &= n_0\,(1+\nu+\lambda), \\ n_3 &= n_0\,(1+\nu+\mu+\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{4.7.2}$$

Отсюда следует, что средние движения и соответственно три периода отличаются друг от друга величинами порядка $\varepsilon^2$.

Очевидно, что $n_1$, $n_2$ и $n_3$ представляют собой средние скорости изменения переменных $\psi$, $\theta$ и $w$, а периоды $T_1$, $T_2$ и $T_3$ показывают, за какое время эти переменные изменяются (в среднем) на $2\pi$.

Величины $n_1$, $n_2$ и $n_3$ в известной степени определяют характер движения спутника. Если $n_1$, $n_2$, $n_3$ несоизмеримы, то орбита спутника не будет замкнутой кривой.

В этом случае какую бы точку тороидального пространства, где происходит движение спутника, мы ни взяли, всегда найдется такой момент времени, когда спутник будет сколь угодно близко от этой точки. Другими словами, траектория спутника будет всюду плотно заполнять область возможности движения. Картина изменяется, если отношения этих постоянных являются рациональными числами. В этом случае орбита спутника будет замкнутой кривой, а его движение — периодическим. Два условия периодичности будут связывать три элемента, $a$, $e$, $i$, от которых зависят постоянные $n_1$, $n_2$, $n_3$. Один из этих элементов можно выбрать произвольно, а два других будут принимать счетное множество значений. Три угловых элемента $\Omega_0$, $\omega_0$, $M_0$ будут произвольными. Таким образом, уравнения промежуточного движения допускают $\infty^6$ периодических движений, период которых в общем случае является весьма большой величиной.

Перейдем теперь к рассмотрению возмущенного движения. Предположим сначала, что на спутник действуют только силы гравитационной природы. Для определенности будем считать, что спутник подвержен возмущениям от зональных, тессеральных и секториальных гармоник потенциала притяжения Земли, а также влиянию Луны и Солнца. Тогда согласно § 2.1 возмущающая функция $R$ будет даваться формулой

$$R = R_T + R_L + R_S.$$

Используя равенства § 3.14, мы можем представить функцию $R$ в виде следующего ряда:

$$R = \varepsilon^* \sum A \cos y, \tag{4.7.3}$$

где

$$y = k_1 l + k_2 g + k_3 h + s_1 \omega_1 t + s_2 \omega_2 t + s_3 \omega_3 t + d_0, \tag{4.7.4}$$

причем $\varepsilon^*$ — малый параметр, $k_1$, $k_2$, . . ., $s_3$ — целые числа, $\omega_1$ — угловая скорость вращения Земли, $\omega_2$ и $\omega_3$ — средние движения Луны и Солнца, $d_0$ — постоянная, а коэффициенты $A$ суть функции элементов $a$, $e$, $i$ или $L$, $G$, $H$.

Будем рассматривать такую область пространства, чтобы функция $R$ имела порядок $\varepsilon^4$ *). Тогда отношения частот $n'$ и $n''$ к $n$ будут иметь порядок $\varepsilon^2$.

Вычислим теперь при помощи (4.5.4) следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 R_0}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 R_0}{\partial L\,\partial G} & \frac{\partial^2 R_0}{\partial L\,\partial H} \\ \frac{\partial^2 R_0}{\partial G\,\partial L} & \frac{\partial^2 R_0}{\partial G^2} & \frac{\partial^2 R_0}{\partial G\,\partial H} \\ \frac{\partial^2 R_0}{\partial H\,\partial L} & \frac{\partial^2 R_0}{\partial H\,\partial G} & \frac{\partial^2 R_0}{\partial H^2} \end{vmatrix},$$

где

$$R_0 = -\alpha_1 (L, G, H).$$

Тогда получим

$$\Delta = \frac{27}{2} \frac{c^4 (1+\sigma^2)^2 (fm)^{10}}{L^{10} G^{10}} \left(1 + 5\frac{H^2}{G^2}\right) + O(c^6).$$

Сделанные предположения относительно функции $R$ и тот факт, что $\Delta \neq 0$, дают нам возможность воспользоваться теоремой В. И. Арнольда [3] об устойчивости канонических систем. Из этой теоремы следует, что для всех начальных условий из рассматриваемой области, за исключением, быть может, некоторого множества малой вместе с $\varepsilon^2$ меры, элементы $L$, $G$, $H$ можно представить сходящимися тригонометрическими рядами. Следовательно, почти для всех начальных условий элементы $L$, $G$, $H$ будут изменяться в ограниченных пределах и тем самым почти все орбиты спутника будут *устойчивыми по Лагранжу*, ибо область пространства, где происходит движение спутника, полностью определяется элементами $L$, $G$, $H$. Эта область, ограниченная двумя эллипсоидами и гиперболоидами (см. § 2.7), будет лишь пульсировать со временем, а не расширяться или сужаться вековым образом **).

Заметим, однако, что возмущения от сопротивления атмосферы, как мы увидим в гл. VIII, приведут к тому,

---

*) Этой области примерно соответствует $r < 20\ 000$ *км*.

**) Полученные результаты, очевидно, имеют также значение для естественных спутников планет, для которых возмущения от сжатия преобладают над возмущениями от Солнца и других спутников.

что расстояния между поверхностью Земли и ограничивающими эллипсоидами будут непрерывно сокращаться, и спутник рано или поздно упадет на Землю.

## § 4.8. Аналог теоремы Лапласа

При решении уравнений для канонических элементов $L$, $G$, $H$, $l$, $g$, $h$ могут быть использованы практически все методы, разработанные в классической теории возмущений. Сюда относятся *):

1. Метод последовательных приближений.
2. Метод последовательных приближений в форме Пуассона.
3. Метод Делоне.
4. Метод Цейпеля.
5. Метод Ньюкома.

Все перечисленные методы, за исключением первого, позволяют построить теорию движения спутника (речь идет пока о гравитационной теории) в чисто тригонометрической форме. Если же использовать обычный метод последовательных приближений, то это приведет к тому, что все элементы (в каком-нибудь приближении) будут обязательно иметь вековые и смешанные возмущения. Ясно, что в случае спутников теория с вековыми и смешанными членами менее предпочтительна по сравнению с чисто тригонометрической теорией.

Посмотрим, однако, что дает метод последовательных приближений при вычислении возмущений первого порядка. Для простоты мы будем предполагать, что возмущающая функция $R$ имеет вид (4.7.3). Поскольку элементы $l$, $g$, $h$ входят в $R$ только посредством тригонометрических функций и поскольку в промежуточном движении

$$l = n(t - t_0) + l_0, \quad g = n'(t - t_0) + g_0,$$
$$h = n''(t - t_0) + h_0,$$

где $n$, $n'$, $n''$, $l_0$, $g_0$, $h_0$ — постоянные, то в первом приближении элементы $L$, $G$, $H$ не будут иметь вековых членов,

*) Изложение первых трех методов можно найти в книге М. Ф. Субботина [1]. О методе Цейпеля см. книгу Ф. Брауэра и Клеменса [4], а о методе Ньюкома—книгу Е. А. Гребеникова и Ю. А. Рябова [5].

если

$$k_1 n + k_2 n' + k_3 n'' + s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + s_3\omega_3 \neq 0. \quad (4.8.1)$$

Таким образом, мы имеем следующую теорему: *Если начальные условия таковы, что при любых целых* $k_1$, $k_2$, $k_3$, $s_1$, $s_2$, $s_3$ *выполняется условие* (4.8.1), *то среди возмущений первого порядка* (*относительно* $\varepsilon^*$) *элементов* $L$, $G$, $H$ *нет вековых членов.*

Эта теорема является аналогом теоремы Лапласа в теории возмущений планет, но она позволяет сделать более сильные утверждения относительно области возможности движения, чем теорема Лапласа *). Действительно, в теореме Лапласа речь идет только о большой полуоси орбиты планеты, но не об эксцентриситете и наклоне, которые наряду с большой полуосью играют важную роль в эволюции орбиты. В то же самое время из доказанной теоремы следует, что все три элемента $a$, $e$, $i$ будут подвержены только периодическим изменениям. Поэтому (в первом приближении) область тороидального пространства, где происходит движение спутника, будет пульсировать, а не расширяться вековым образом со временем.

Что касается элементов $l$, $g$, $h$, то они будут иметь как периодические, так и вековые возмущения. Но эти элементы не связаны с областью возможности движения.

## § 4.9. Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов, аналогичные уравнениям Лагранжа

Дифференциальные уравнения (4.5.2) могут быть легко преобразованы в уравнения относительно элементов $a$, $e$, $i$, $l$, $g$, $h$. Действительно, дифференцируя формулы (4.5.7)—(4.5.9), мы можем выразить производные $\dot{a}$, $\dot{e}$, $\dot{s}$ через производные $\dot{L}$, $\dot{G}$, $\dot{H}$. С другой стороны, эти же формулы позволяют записать частные производные $R$ по $L$, $G$, $H$ через частные производные $R$ по $a$, $e$, $s$. Подстановка всех этих производных в (4.5.2) нам даст следующие

*) О теореме Лапласа см. книгу М. Ф. Субботина [1].

уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= a_1\frac{\partial R}{\partial l} + a_2\frac{\partial R}{\partial g} + a_3\frac{\partial R}{\partial h},\\
\frac{de}{dt} &= e_1\frac{\partial R}{\partial l} + e_2\frac{\partial R}{\partial g} + e_3\frac{\partial R}{\partial h},\\
\frac{ds}{dt} &= s_1\frac{\partial R}{\partial l} + s_2\frac{\partial R}{\partial g} + s_3\frac{\partial R}{\partial h},\\
\frac{dl}{dt} &= n_1 - a_1\frac{\partial R}{\partial a} - e_1\frac{\partial R}{\partial e} - s_1\frac{\partial R}{\partial s},\\
\frac{dg}{dt} &= n_2 - a_2\frac{\partial R}{\partial a} - e_2\frac{\partial R}{\partial e} - s_2\frac{\partial R}{\partial s},\\
\frac{dh}{dt} &= n_3 - a_3\frac{\partial R}{\partial a} - e_3\frac{\partial R}{\partial e} - s_3\frac{\partial R}{\partial s},
\end{aligned}\right\} \qquad (4.9.1)$$

где (с точностью до $\varepsilon^2$ включительно)

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\sqrt{fma^{-1}}}\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(1-e^2)\cos^2 i\right\},\\
a_2 &= \frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{fma^{-1}}}\left\{12 - 15s^2 + 8\sqrt{1-e^2}\cos^2 i\right\},\\
a_3 &= -\frac{\varepsilon^2\cos i}{\sqrt{fma^{-1}}}\left\{3 + 2\sqrt{1-e^2}\right\},
\end{aligned}\right\} \qquad (4.9.2)$$

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1-e^2}{e\sqrt{fma}}\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(1-e^2)(5-4s^2)\right\},\\
e_2 &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{fma}}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\left[(12-15s^2)\sqrt{1-e^2} - \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. - 22 + 23s^2 - e^2(18-17s^2)\right]\right\},\\
e_3 &= \frac{\varepsilon^2\sqrt{1-e^2}\cos i}{2e\sqrt{fma}}\left\{3 + 5e^2 - 3\sqrt{1-e^2}\right\},
\end{aligned}\right\} \qquad (4.9.3)$$

$$\left.\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\varepsilon^2(1-e^2)\,s\cos^2 i}{2\sqrt{fma}},\\
s_2 &= \frac{\cos^2 i}{s\sqrt{fma(1-e^2)}}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}(6 - 9s^2 + 2e^2 + e^2s^2)\right\},\\
s_3 &= -\frac{\cos i}{s\sqrt{fma(1-e^2)}}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(3 + e^2 - 4s^2)\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.9.4)$$

Эти дифференциальные уравнения аналогичны уравнениям Лагранжа для кеплеровых оскулирующих элементов.

## § 4.10. Дифференциальные уравнения, аналогичные уравнениям Ньютона

В самом общем случае дифференциальные уравнения движения спутника можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial x} &= F_x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial y} &= F_y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\partial W}{\partial z} &= F_z, \end{aligned}\right\} \qquad (4.10.1)$$

где $W$ — силовая функция в промежуточном движении, а $F_x$, $F_y$, $F_z$ — проекции возмущающего ускорения на оси координат $Ox$, $Oy$, $Oz$.

При изучении различных возмущений, таких, например, как возмущения от сопротивления атмосферы, компоненты $F_x$, $F_y$, $F_z$ не являются удобными. Поэтому мы заменим их компонентами $S$, $T$, $B$, которые введем следующим образом. Пусть

$$\bar{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c\sigma)^2}, \qquad (4.10.2)$$

а $V$ — орбитальная скорость. Тогда $S$ есть компонент по радиусу-вектору $\bar{r}$, $T$ — компонент по направлению, перпендикулярному к $\bar{r}$ и составляющему с направлением движения угол, меньший 90°, и лежащему в плоскости, проходящей через $\bar{r}$ и $V$, а $B$ есть компонент по нормали к этой плоскости.

Обозначим направляющие косинусы этих компонентов относительно координатных осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ через $s_1$, $s_2$, $s_3$; $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ и $b_1$, $b_2$, $b_3$ соответственно. Тогда для $s_1$, $s_2$, $s_3$ будем иметь

$$s_1 = \frac{x}{\bar{r}}, \quad s_2 = \frac{y}{\bar{r}}, \quad s_3 = \frac{z - c\sigma}{\bar{r}}. \qquad (4.10.3)$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{B}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{V}$, то

$$b_1 = \frac{\dot{y}z - (z - c\sigma)\dot{y}}{b}, \quad b_2 = \frac{(z - c\sigma)\dot{x} - \dot{x}z}{b}, \quad b_3 = \frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{b}, \tag{4.10.4}$$

где

$$b = \bar{r}\sqrt{V^2 - \dot{\bar{r}}^2} \tag{4.10.5}$$

Так как направление вектора $\boldsymbol{T}$ совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{S}$, то для $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ легко находим следующие формулы:

$$\tau_1 = \frac{\dot{\bar{r}}x - \bar{r}\dot{x}}{b}, \quad \tau_2 = \frac{\dot{\bar{r}}y - \bar{r}\dot{y}}{b}, \quad \tau_3 = \frac{\dot{\bar{r}}z - (z - c\sigma)\dot{\bar{r}}}{b}. \tag{4.10.6}$$

Связь между компонентами $F_x$, $F_y$, $F_z$ и $S$, $T$, $B$ будет даваться уравнениями

$$\left.\begin{aligned} S &= s_1F_x + s_2F_y + s_3F_z, \\ T &= \tau_1F_x + \tau_2F_y + \tau_3F_z, \\ B &= b_1F_x + b_2F_y + b_3F_z, \end{aligned}\right\} \tag{4.10.7}$$

или

$$\left.\begin{aligned} F_x &= s_1S + \tau_1T + b_1B, \\ F_y &= s_2S + \tau_2T + b_2B, \\ F_z &= s_3S + \tau_3T + b_3B. \end{aligned}\right\} \tag{4.10.8}$$

Выберем теперь переменные, которыми мы будем описывать возмущенное движение. В качестве таких переменных возьмем следующие шесть независимых элементов:

$$\hat{a},\ \hat{p},\ \hat{s},\ \Omega,\ \omega,\ M,$$

которые связаны с элементами $a$, $e$, $i$, $\Omega_0$, $\omega_0$ и $M_0$ формулами (см. § 3.18)

$$\left.\begin{aligned} \hat{a} &= a\{1 + \varepsilon^2(1 - e^2)\alpha^2\}, \\ \hat{p} &= p\{1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2)\alpha^2\}, \\ 1 - \hat{s}^2 &= \alpha^2\{1 - \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - \alpha^2)\}, \end{aligned}\right\} \tag{4.10.9}$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \mu\psi + \Omega_0, \quad \omega = \nu\psi + \omega_0, \\ M &= n_0(t - t_0) + M_0, \end{aligned}\right\} \tag{4.10.10}$$

где

$$\alpha = \cos i, \quad p = a\,(1 - e^2),$$

причем в (4.10.9) отброшены члены порядка $\varepsilon^4$ и выше.

Для того чтобы вывести дифференциальные уравнения для этих элементов, воспользуемся так называемой *основной операцией* *), которая в данном случае заключается в следующем. Пусть

$$\Psi\,(\hat{a}, \hat{p}, \hat{s}, \Omega, \omega, M; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = 0$$

есть какой-либо первый интеграл уравнений промежуточного движения. Тогда этому интегралу будет соответствовать следующее равенство:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{a}}\frac{d\hat{a}}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial\hat{p}}\frac{d\hat{p}}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial\hat{s}}\frac{d\hat{s}}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial\Omega}\left[\frac{d\Omega}{dt}\right] + \frac{\partial\Psi}{\partial\omega}\left[\frac{d\omega}{dt}\right] + \\ + \frac{\partial\Psi}{\partial M}\left[\frac{dM}{dt}\right] + \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{x}}F_x + \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{y}}F_y + \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{z}}F_z = 0,$$

при этом $\left[\frac{d\Omega}{dt}\right]$, $\left[\frac{d\omega}{dt}\right]$ и $\left[\frac{dM}{dt}\right]$ означают производные $\Omega$, $\omega$ и $M$ по $t$, взятые только через посредство элементов, так что, например,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \left[\frac{d\Omega}{dt}\right]. \qquad (4.10.11)$$

Другими словами, при вычислении производной первого интеграла по времени элементы $\hat{a}$, $\hat{p}$, $\hat{s}$, $\Omega_0$, $\omega_0$, $M_0$ рассматриваются как функции времени, координаты и время — как постоянные, а производные по времени от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ заменяются соответствующими компонентами возмущающего ускорения.

Выведем сначала дифференциальные уравнения для элементов $\hat{a}$, $\hat{p}$, $\hat{s}$. Для этого воспользуемся тремя первыми интегралами, которые на основании § 2.3 могут быть

*) Подробно об основной операции в случае кеплеровых элементов см. книгу М. Ф. Субботина [1].

записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1 &= V^2 - \frac{2fm\,(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2}, \\ \alpha_2^2 &= \bar{r}^2 V^2 - \dot{\bar{r}}^2 - c^2\dot{z}^2 + Q, \\ \alpha_3 &= x\dot{y} - y\dot{x}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.10.12)$$

где $Q$ дается формулой (2.3.8).

Применяя основную операцию к интегралам (4.10.12), мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \dot{x}F_x + \dot{y}F_y + \dot{z}F_z, \\ \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{dt} &= r^2(\dot{x}F_x + \dot{y}F_y + \dot{z}F_z) - \\ &\quad - \dot{\bar{r}}\bar{r}\,[xF_x + yF_y + (z - c\sigma)F_z] - c^2\dot{z}F_z, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= xF_y - yF_x. \end{aligned}\right\} \qquad (4.10.13)$$

Подставим в эти уравнения формулы (4.10.8), а затем (4.10.3), (4.10.4) и (4.10.6). Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \dot{\bar{r}}S + \sqrt{V^2 - \dot{\bar{r}}^2}\,T, \\ \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{\bar{r}(\alpha_2^2 - Q) + c^2(z - c\sigma)\dot{\bar{r}}\dot{z}}{\bar{r}\sqrt{V^2 - \dot{\bar{r}}^2}}\,T - \\ &\quad - \frac{c^2(z - c\sigma)\dot{z}}{\bar{r}}\,S - \frac{c^2\alpha_3\dot{z}}{\bar{r}\sqrt{V^2 - \dot{\bar{r}}^2}}\,B, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \frac{\alpha_3}{\sqrt{V^2 - \dot{\bar{r}}^2}}\,T - \frac{\dot{\bar{r}}z - (z - c\sigma)\dot{\bar{r}}}{\sqrt{V^2 - \dot{\bar{r}}^2}}\,B. \end{aligned}\right\} \qquad (4.10.14)$$

Но согласно § 3.18

$$2\alpha_1 = -\frac{fm}{\hat{a}}, \quad \alpha_2^2 = fm\hat{p}, \quad \alpha_3^2 = fm\hat{p}\,(1 - \hat{s}^2).$$

Поэтому

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{2\hat{a}^2}{fm}\frac{d\alpha_1}{dt},$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{2}{fm}\alpha_2\frac{d\alpha_2}{dt},$$

$$\hat{s}\frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{1-\hat{s}^2}{fm\hat{p}}\left(\alpha_2\frac{d\alpha_2}{dt} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3}\frac{d\alpha_3}{dt}\right).$$

Подставляя сюда (4.10.14), мы окончательно получим следующие уравнения для элементов $\hat{a}$, $\hat{p}$, $\hat{s}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\hat{a}}{dt} = 2\hat{a}^2\left(\dot{\bar{r}}S' + \sqrt{V^2-\dot{\bar{r}}^2}\,T'\right),\\
&\frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{2c^2(z-c\sigma)\dot{z}}{\bar{r}}S' + \frac{2\alpha_2^2}{\sqrt{V^2-\dot{\bar{r}}^2}}T' +\\
&+\frac{2\left[c^2(z-c\sigma)\dot{\bar{r}}\dot{z}-\bar{r}Q\right]}{\bar{r}\sqrt{V^2-\dot{\bar{r}}^2}}T' - \frac{2c^2\alpha_3\dot{z}}{\bar{r}\sqrt{V^2-\dot{\bar{r}}^2}}B',\\
&\hat{s}\frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{1-\hat{s}^2}{\hat{p}}\left\{-\frac{c^2(z-c\sigma)\dot{z}}{\bar{r}}S' +\right.\\
&\qquad+\frac{c^2(z-c\sigma)\dot{\bar{r}}\dot{z}-\bar{r}Q}{\bar{r}\sqrt{V^2-\dot{\bar{r}}^2}}T' -\\
&\left.-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3}\frac{\bar{r}(z-c\sigma)\dot{\bar{r}}-\bar{r}^2\dot{z}+c^2(1-\hat{s}^2)\dot{z}}{\bar{r}\sqrt{V^2-\dot{\bar{r}}^2}}B'\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.10.15)$$

где положено

$$S = fmS', \quad T = fmT', \quad B = fmB'. \qquad (4.10.16)$$

Заметим, что полученные уравнения являются совершенно точными, ибо при их выводе никаких упрощений, связанных с малостью $c$ и $\sigma$, не делалось.

Аналогичным образом можно вывести дифференциальные уравнения для элементов $M$, $\Omega$ и $\omega$. Для этого нужно взять формулы (3.14.2)—(3.14.5), а также (4.10.10), и применить к ним основную операцию. В результате

получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= \mu\dot{\psi} + A_1S' + A_2T' + A_3B',\\ \frac{d\omega}{dt} &= \nu\dot{\psi} + B_1S' + B_2T' + B_3B',\\ \frac{dM}{dt} &= n_0 + C_1S' + C_2T' + C_3B'.\end{aligned}\right\} \qquad (4.10.17)$$

Выражения для коэффициентов $A_k$, $B_k$ и $C_k$ с точностью до $\varepsilon^2$ включительно получены в работе [6]. Здесь мы ради краткости приведем упрощенные выражения для этих коэффициентов, сохранив в них лишь члены, не зависящие от $\varepsilon$:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \sqrt{\frac{fm}{p}}\, r \sin\theta \operatorname{cosec} i,$$

$$B_1 = -\sqrt{\frac{fm}{p}}\,\frac{p}{e}\cos\psi, \quad C_1 = \sqrt{\frac{fm}{p}}\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}(p\cos\psi - 2er),$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{fm}{p}}\,\frac{r+p}{e}\sin\psi, \quad C_2 = -\sqrt{\frac{fm}{p}}\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}(r+p)\sin\psi,$$

$$B_3 = -\sqrt{\frac{fm}{p}}\, r \sin\theta \operatorname{ctg} i, \quad C_3 = 0.$$

В уравнениях (4.10.17) через $\dot{\psi}$ обозначена производная $\psi$ по входящему явно времени $t$.

Полученные здесь уравнения для элементов промежуточного движения носят самый общий характер, поскольку они применимы для определения возмущений от произвольных возмущающих сил. Следует заметить, однако, что ими целесообразно пользоваться в тех случаях, когда возмущающие силы не имеют силовой функции (сопротивление атмосферы и др.). В случае возмущающих сил гравитационной природы, по-видимому, целесообразнее воспользоваться более простыми каноническими уравнениями, выведенными в § 4.5, или уравнениями § 4.9.

## § 4.11. Еще одна форма дифференциальных уравнений для элементов

Перейдем в уравнениях (4.1.2) от времени $t$ к новой независимой переменной $\tau$ согласно формуле

$$dt = r J_i d\tau, \qquad (4.11.1)$$

где

$$J = \xi^2 + c^2\eta^2. \tag{4.11.2}$$

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= J\frac{\partial(K-R)}{\partial\xi'}, & \frac{d\xi'}{d\tau} &= -J\frac{\partial(K-R)}{\partial\xi}, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= J\frac{\partial(K-R)}{\partial\eta'}, & \frac{d\eta'}{d\tau} &= -J\frac{\partial(K-R)}{\partial\eta}, \\ \frac{dw}{d\tau} &= J\frac{\partial(K-R)}{\partial w'}, & \frac{dw'}{d\tau} &= -J\frac{\partial(K-R)}{\partial w}, \end{aligned}\right\} \tag{4.11.3}$$

При $R = 0$ уравнения (4.11.3) описывают промежуточное движение спутника. Как было показано в § 3.17, общее решение уравнений промежуточного движения однозначно определяется шестью величинами:

$$p,\ e,\ s,\ u,\ v,\ \Omega,$$

где

$$p = a(1 - e^2), \quad s = \sin i, \tag{4.11.4}$$

$$u = m_1(\tau + \bar{c}_3), \quad v = m_2(\tau + c_4), \quad \Omega = m_3(\tau + c_5), \tag{4.11.5}$$

причем $m_1$, $m_2$ и $m_3$ даются формулами (3.17.16).

Поскольку в промежуточном движении координаты спутника достаточно просто выражаются через $p$, $e$, $s$, $u$, $v$ и $\Omega$, то представляется целесообразным взять эти величины в качестве искомых при решении уравнений возмущенного движения.

Чтобы вывести дифференциальные уравнения для этих элементов, нужно подставить в (4.11.3) вместо

$$\frac{d\xi}{d\tau},\ \frac{d\eta}{d\tau},\ \frac{dw}{d\tau},\qquad \frac{d\xi'}{d\tau},\ \frac{d\eta'}{d\tau},\ \frac{dw'}{d\tau}$$

следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{\partial\xi}{\partial p}\frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial\xi}{\partial e}\frac{de}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial\xi}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{d\tau}, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{\partial\eta}{\partial p}\frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial\eta}{\partial e}\frac{de}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial\eta}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{d\tau}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dw'}{d\tau} &= \frac{\partial w'}{\partial p}\frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial w'}{\partial e}\frac{de}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial w'}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{d\tau}. \end{aligned}$$

Тогда, имея в виду, что переменные $\xi$, $\eta$, $w$, $\xi'$, $\eta'$, $w'$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial u} m_1 + \frac{\partial \xi}{\partial v} m_2 + \frac{\partial \xi}{\partial \Omega} m_3 &= J \frac{\partial K}{\partial \xi'}, \\
\frac{\partial \eta}{\partial u} m_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v} m_2 + \frac{\partial \eta}{\partial \Omega} m_3 &= J \frac{\partial K}{\partial \eta'}, \\
\frac{\partial w}{\partial u} m_1 + \frac{\partial w}{\partial v} m_2 + \frac{\partial w}{\partial \Omega} m_3 &= J \frac{\partial K}{\partial w'}, \\
\frac{\partial \xi'}{\partial u} m_1 + \frac{\partial \xi'}{\partial v} m_2 + \frac{\partial \xi'}{\partial \Omega} m_3 &= -J \frac{\partial K}{\partial \xi}, \\
\frac{\partial \eta'}{\partial u} m_1 + \frac{\partial \eta'}{\partial v} m_2 + \frac{\partial \eta'}{\partial \Omega} m_3 &= -J \frac{\partial K}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial w'}{\partial u} m_1 + \frac{\partial w'}{\partial v} m_2 + \frac{\partial w'}{\partial \Omega} m_3 &= -J \frac{\partial K}{\partial w},
\end{aligned}$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial \xi}{\partial e}\frac{de}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial \xi}{\partial \Omega}\left(\frac{d\Omega}{d\tau} - m_3\right) = 0, \\
&\frac{\partial \xi'}{\partial p}\frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial \xi'}{\partial e}\frac{de}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial \xi'}{\partial \Omega}\left(\frac{d\Omega}{d\tau} - m_3\right) = \\
&\qquad\qquad = J\frac{\partial R}{\partial \xi}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial w}{\partial p}\frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial w}{\partial e}\frac{de}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial \Omega}\left(\frac{d\Omega}{d\tau} - m_3\right) = 0, \\
&\frac{\partial w'}{\partial p}\frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial w'}{\partial e}\frac{de}{d\tau} + \ldots + \frac{\partial w'}{\partial \Omega}\left(\frac{d\Omega}{d\tau} - m_3\right) = \\
&\qquad\qquad = J\frac{\partial R}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \qquad (4.11.6)$$

так как $R$ не зависит от $\xi'$, $\eta'$, $w'$.

Преобразуем систему (4.11.6) к другой, более удобной системе. Для этого введем скобки Лагранжа:

$$\begin{aligned}
[a, b] = &\left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\frac{\partial \xi'}{\partial b} - \frac{\partial \xi'}{\partial a}\frac{\partial \xi}{\partial b}\right) + \\
&+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial a}\frac{\partial \eta'}{\partial b} - \frac{\partial \eta'}{\partial a}\frac{\partial \eta}{\partial b}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial w'}{\partial b} - \frac{\partial w'}{\partial a}\frac{\partial w}{\partial b}\right)
\end{aligned}$$

и выразим производные $R$ по $\xi$, $\eta$, $w$ через производные по элементам согласно формулам

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial p} &= \frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial R}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial p} + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial p},\\
\frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial e},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \Omega}.
\end{aligned}$$

Тогда, как легко видеть, уравнения (4.11.6) эквивалентны следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
&[p, p]\frac{dp}{d\tau} + [p, e]\frac{de}{d\tau} + \dots + [p, \Omega] \times\\
&\qquad \times \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} - m_3\right) = J\frac{\partial R}{\partial p},\\
&[e, p]\frac{dp}{d\tau} + [e, e]\frac{de}{d\tau} + \dots + [e, \Omega] \times\\
&\qquad \times \left(\frac{d\Omega}{d\tau} - m_3\right) = J\frac{\partial R}{\partial e},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[\Omega, p]\frac{dp}{d\tau} + [\Omega, e]\frac{de}{d\tau} + \dots + [\Omega, \Omega] \times\\
&\qquad \times \left(\frac{d\Omega}{d\tau} - m_3\right) = J\frac{\partial R}{\partial \Omega}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.11.7)$$

Следовательно, чтобы получить уравнения для элементов $p$, $e$, $s$, $u$, $v$, $\Omega$, нужно вычислить скобки Лагранжа и разрешить систему (4.11.7) относительно производных от этих элементов.

Очевидно, нам нужно вычислить лишь 15 скобок Лагранжа, ибо вследствие того, что

$$[a, a] = 0, \quad [a, b] = -[b, a],$$

из 36 скобок шесть равны нулю, а 15 скобок отличаются от других 15 только знаком.

Сделаем теперь одно существенное упрощение. При вычислении скобок Лагранжа мы отбросим все члены, пропорциональные $\varepsilon$. Тем самым в окончательных уравнениях в коэффициентах при производных $R$ по элементам мы будем пренебрегать членами порядка $\varepsilon^2$. Полученные таким образом уравнения будут упрощенными,

но они, как мы увидим в дальнейшем, позволят находить все важнейшие неравенства в движении спутника.

С принятой степенью точности согласно §§ 3.2, 3.3, 3.5 и 3.17 имеем

$$\xi = \frac{p}{1+e\cos v}, \quad \xi' = m_2 \frac{e}{p}\sin v,$$

$$\eta = s\sin u, \qquad \eta' = \frac{m_1 s\cos u}{1-s^2\sin^2 u},$$

$$w = \Omega + \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{1-s^2}\operatorname{tg} u\right), \quad w' = \sqrt{fmp}.$$

Поэтому все неравные нулю скобки Лагранжа будут даваться формулами

$$\left.\begin{aligned}
[p, e] &= \frac{\sqrt{fmp}}{p^3}\xi^2\left(1+\frac{1}{2}e\cos v\right)\sin v,\\
[p, v] &= \frac{e\sqrt{fmp}}{2p^3}\xi^2(e+2\cos v+e\cos^2 v),\\
[p, u] &= -\frac{\sqrt{fmp}}{2p}, \quad [p, \Omega] = -\frac{\sqrt{fmp}\cos i}{2p},\\
[e, v] &= -\frac{e\sqrt{fmp}}{p^2}\xi^2, \quad [\Omega, s] = -\frac{s\sqrt{fmp}}{\cos i}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.11.8)$$

Подставляя равенства (4.11.8) в (4.11.7) и разрешая полученные уравнения относительно производных от элементов, получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{d\tau} &= 2p^2\sqrt{fmp}\left(\frac{\xi}{p}\right)^2\frac{\partial R'}{\partial u},\\
\frac{de}{d\tau} &= \frac{p\sqrt{fmp}}{e}\left\{\frac{\partial R'}{\partial v}+\frac{\partial R'}{\partial u}-(1-e^2)\left(\frac{\xi}{p}\right)^2\frac{\partial R'}{\partial u}\right\},\\
\frac{ds}{d\tau} &= \frac{p\sqrt{fmp}\cos i}{s}\left(\frac{\xi}{p}\right)^2\left\{\cos i\frac{\partial R'}{\partial u}-\frac{\partial R'}{\partial\Omega}\right\},\\
\frac{d\Omega}{d\tau} &= m_3+\frac{p\sqrt{fmp}\cos i}{s}\left(\frac{\xi}{p}\right)^2\frac{\partial R'}{\partial s},\\
\frac{du}{d\tau} &= m_1-\frac{p\sqrt{fmp}\cos^2 i}{s}\left(\frac{\xi}{p}\right)^2\frac{\partial R'}{\partial s},\\
\frac{dv}{d\tau} &= m_2-\frac{p\sqrt{fmp}}{e}\left\{\frac{\partial R'}{\partial e}+\right.\\
&\qquad \left.+\left(\frac{\xi}{p}\right)^2(2+e\cos v)\sin v\frac{\partial R'}{\partial u}\right\},
\end{aligned}\right\} \qquad (4.11.9)$$

где

$$R' = \frac{R}{fm}. \tag{4.11.10}$$

Введем теперь две функции $F'$ и $\Phi'$ по формулам

$$F' = \left(\frac{\xi}{p}\right)^2 R', \quad \Phi' = \left(\frac{\xi}{p}\right)^2 (2 + e\cos v)\sin v\, R' \tag{4.11.11}$$

и заменим элемент $p$ элементом $a$. Тогда уравнениям (4.11.9) можно придать следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{d\tau} &= 2a^2\sqrt{fmp}\left(\frac{\partial R'}{\partial v} + \frac{\partial R'}{\partial u}\right),\\
\frac{de}{d\tau} &= \frac{p\sqrt{fmp}}{e}\left\{\frac{\partial R'}{\partial v} + \frac{\partial R'}{\partial u} - (1-e^2)\frac{\partial F'}{\partial u}\right\},\\
\frac{ds}{d\tau} &= \frac{p\sqrt{fmp}\cos i}{s}\left\{\cos i\,\frac{\partial F'}{\partial u} - \frac{\partial F'}{\partial \Omega}\right\},\\
\frac{d\Omega}{d\tau} &= m_3 + \frac{p\sqrt{fmp}\cos i}{s}\frac{\partial F'}{\partial s},\\
\frac{du}{d\tau} &= m_1 - \frac{p\sqrt{fmp}\cos^2 i}{s}\frac{\partial F'}{\partial s},\\
\frac{dv}{d\tau} &= m_2 - \frac{p\sqrt{fmp}}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e} + \frac{\partial \Phi'}{\partial u}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{4.11.12}$$

Перейдем наконец от независимой переменной $\tau$ к новой переменной $v$ согласно последнему уравнению (4.11.12). Тогда

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dv} &= 2a^2\left(\frac{\partial R'}{\partial v} + \frac{\partial R'}{\partial u}\right)G^{-1},\\
\frac{de}{dv} &= \frac{p}{e}\left\{\frac{\partial R'}{\partial v} + \frac{\partial R'}{\partial u} - (1-e^2)\frac{\partial F'}{\partial u}\right\}G^{-1},\\
\frac{ds}{dv} &= \frac{p\cos i}{s}\left\{\cos i\,\frac{\partial F'}{\partial u} - \frac{\partial F'}{\partial \Omega}\right\}G^{-1},\\
\frac{d\Omega}{dv} &= \left\{\mu + \frac{p\cos i}{s}\frac{\partial F'}{\partial s}\right\}G^{-1},\\
\frac{du}{dv} &= \left\{1 + \nu - \frac{p\cos^2 i}{s}\frac{\partial F'}{\partial s}\right\}G^{-1},
\end{aligned}\right\} \tag{4.11.13}$$

где

$$G = 1 - \frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e} + \frac{\partial \Phi'}{\partial u}\right\}. \tag{4.11.14}$$

При этом переменная $v$ связана с временем $t$ уравнением

$$\frac{dt}{dv} = \frac{\xi^2 + c^2\eta^2}{m_2} G^{-1}, \qquad (4.11.15)$$

в котором $m_2$ определяется равенством (3.17.16), а $\mu$ и $\nu$ формулами (3.9.3) и (3.7.15).

Выведем теперь уравнение для среднего движения $n_0$. Это уравнение легко получается, если воспользоваться результатами § 4.1 и формулой (3.18.17). Действительно,

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad n_0 = (-2\alpha_1)^{3/2} (fm)^{-1}.$$

Поэтому

$$\frac{dn_0}{dt} = -3 \frac{\sqrt[3]{fmn_0}}{fm} \frac{d\alpha_1}{dt},$$

и, следовательно,

$$\frac{dn_0}{dt} = -3 \frac{\sqrt[3]{fmn_0}}{fm} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Переходя в этом уравнении от независимой переменной к $\tau$, получим

$$\frac{dn_0}{d\tau} = -3 \sqrt[3]{fmn_0} \frac{\partial R'}{\partial \tau},$$

где $R'$ определяется формулой (4.11.10). Но

$$\frac{\partial R'}{\partial \tau} = m_1 \frac{\partial R'}{\partial u} + m_2 \frac{\partial R'}{\partial v} + m_3 \frac{\partial R'}{\partial \Omega}.$$

Поэтому, если перейти от $\tau$ к переменной $v$, окончательно найдем

$$\frac{dn_0}{dv} = -3 \sqrt[3]{fmn_0} \left\{ (1+\nu) \frac{\partial R'}{\partial u} + \frac{\partial R'}{\partial v} + \mu \frac{\partial R'}{\partial \Omega} \right\} G^{-1}. \qquad (4.11.16)$$

В этом уравнении в коэффициентах при производных $R'$ по элементам сохранены (посредством $\nu$ и $\mu$) все члены, пропорциональные $\varepsilon^2$.

Заметим, что в полученных уравнениях при вычислении $\frac{\partial R'}{\partial e}$ не нужно учитывать зависимость $p$ и $v$ от $e$, ибо именно при этих условиях были выведены уравнения (4.11.9), а следовательно, и (4.11.12) и (4.11.13).

## § 4.12. Случай кеплеровых элементов

1. Уравнения Лагранжа. Как уже отмечалось в § 3.15, при $c = 0$ и $\sigma = 0$ элементы $a$, $e$, $i$, $\Omega_0$, $\omega_0$ и $M_0$ превращаются соответственно в большую полуось, эксцентриситет, наклон, долготу узла, аргумент перицентра и среднюю аномалию в эпоху кеплерова эллиптического движения. Поэтому, если положить в уравнениях (4.9.1) $\varepsilon = 0$, то мы получим *уравнения Лагранжа* для кеплеровых оскулирующих элементов.

Поскольку при $\varepsilon = 0$

$$l = n(t - t_0) + M_0, \quad g = \omega_0, \quad h = \Omega_0,$$

то уравнения Лагранжа можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M_0},\\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial \omega_0},\\
\frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega_0} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega_0},\\
\frac{d\Omega_0}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{d\omega_0}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{dM_0}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.12.1)$$

Здесь положено

$$s = \sin i, \quad fm = n^2a^3.$$

2. Уравнения Ньютона. Рассмотрим теперь уравнения, полученные в § 4.10. Поскольку при $\varepsilon = 0$

$$\hat{a} = a, \quad \hat{p} = p, \quad \hat{s} = \sin i,$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r} = \sqrt{\frac{fm}{p}}\, e \sin\psi, \quad \sqrt{V^2 - \dot{\bar{r}}^2} = \frac{\sqrt{fmp}}{r^2},$$

где $\psi$ — истинная аномалия и $r$ — радиус-вектор спутника, то уравнения (4.10.17) и (4.10.15) при $\varepsilon = 0$ легко

приводятся к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = 2a^2\left(e\sin\psi\, S^* + \frac{p}{r}T^*\right),\\
&\frac{de}{dt} = p\sin\psi\, S^* + p(\cos\psi + \cos E)\,T^*,\\
&\frac{di}{dt} = r\cos\theta\cdot B^*,\\
&\frac{d\Omega_0}{dt} = r\sin\theta\,\mathrm{cosec}\, i\, B^*,\\
&\frac{d\omega_0}{dt} = \frac{1}{e}\left[-p\cos\psi\, S^* + (p+r)\sin\psi\, T^*\right] - \\
&\qquad\qquad - \cos i\,\frac{d\Omega_0}{dt},\\
&\frac{dM_0}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left[(p\cos\psi - 2er)S^* - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - (r+p)\sin\psi\, T^*\right].
\end{aligned}\right\} \quad (4.12.2)$$

Здесь $\theta$ — аргумент широты, $a, e, i$ — кеплеровы элементы и

$$S^* = \frac{1}{\sqrt{fmp}}S, \quad T^* = \frac{1}{\sqrt{fmp}}T, \quad B^* = \frac{1}{\sqrt{fmp}}B,$$

а $S$, $T$ и $B$ — проекции возмущающего ускорения.

Уравнения (4.12.2) принято называть *уравнениями Ньютона* *).

3. Новая форма уравнений для кеплеровых элементов. Положим теперь $\varepsilon = 0$ в уравнениях (4.11.13). Тогда получим следующие уравнения для кеплеровых элементов:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{dv} = 2a^2\left(\frac{\partial R'}{\partial v} + \frac{\partial R'}{\partial u}\right)G^{-1},\\
&\frac{de}{dv} = \frac{p}{e}\left\{\frac{\partial R'}{\partial v} + \frac{\partial R'}{\partial u} - (1-e^2)\frac{\partial F'}{\partial u}\right\}G^{-1},\\
&\frac{di}{dv} = p\,\mathrm{cosec}\, i\left(\cos i\,\frac{\partial F'}{\partial u} - \frac{\partial F'}{\partial \Omega_0}\right)G^{-1},\\
&\frac{d\Omega_0}{dv} = p\,\mathrm{cosec}\, i\,\frac{\partial F'}{\partial i}G^{-1},\\
&\frac{du}{dv} = \left(1 - p\,\mathrm{ctg}\, i\,\frac{\partial F'}{\partial i}\right)G^{-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.12.3)$$

*) Иногда их называют уравнениями Эйлера, а порой и уравнениями Гаусса [1].

Здесь $v$ — истинная аномалия, $u$ — аргумент широты,

$$G = 1 - \frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e} + \frac{\partial \Phi'}{\partial u}\right),$$

а $R'$, $F'$ и $\Phi'$ выражаются через возмущающую функцию формулами

$$R' = \frac{R}{fm}, \quad F' = \left(\frac{r}{p}\right)^2 R',$$

$$\Phi' = \left(\frac{r}{p}\right)^2 (2 + e\cos v)\sin v \cdot R'.$$

Уравнения (4.12.3) позволяют найти элементы $a$, $e$, $i$, $\Omega_0$ и $u$ как функции возмущенной истинной аномалии $v$. Связь же истинной аномалии $v$ с временем $t$ находится из уравнения

$$\frac{dt}{dv} = \frac{r^2}{\sqrt{fmp}} G^{-1}.$$

Уравнения (4.12.3) в некоторых случаях могут быть более удобными по сравнению с другими формами уравнений для оскулирующих элементов. Это связано с тем обстоятельством, что координаты в кеплеровом движении выражаются через истинную аномалию несравненно проще, чем через время. Преимущество их особенно очевидно, когда функция $R$ не зависит явно от времени и когда нас интересует движение при больших эксцентриситетах.

Заметим, что при вычислении производной $R'$ по $e$ нужно учитывать только явную зависимость $R'$ от $e$ и не нужно считаться с зависимостью $p$ от $e$.

4. Канонические элементы кеплерова движения. Рассмотрим теперь канонические элементы. Равенства (4.5.10)—(4.5.12) при $\varepsilon = 0$ дают

$$\left.\begin{aligned} L &= \sqrt{fma}, & l &= M, \\ G &= \sqrt{fma(1-e^2)}, & g &= \omega_0, \\ H &= \sqrt{fma(1-e^2)}\cos i, & h &= \Omega_0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.12.4)$$

где $a$, $e$, $i$, $\omega_0$, $\Omega_0$ — кеплеровы элементы, $M$ — средняя аномалия.

Элементы (4.12.4) называются *элементами Делоне*. Дифференциальные уравнения для них имеют вид (4.5.2),

а функция Гамильтона $R'$ равна

$$R' = \frac{(fm)^2}{2L^2} + R,$$

где $R$ — возмущающая функция.

Рассмотрим, наконец, формулы (4.6.2) и (4.6.3). При $\varepsilon = 0$ элементы $C_1$, $C_2$, $C_3$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ образуют *первую систему канонических элементов Пуанкаре*, а элементы $D_k$ и $d_k$ представляют собой *вторую систему канонических элементов Пуанкаре.*

Что касается элементов $A_k$ и $B_k$, то они при $\varepsilon = 0$ являются некоторой модификацией элементов Делоне.

## § 4.13. Постановка задачи о возмущениях элементов промежуточной орбиты

Полученные в § 4.5, 4.9 и 4.10 дифференциальные уравнения для элементов промежуточной орбиты позволяют довольно просто построить аналитическую теорию движения спутника со всей необходимой для практики точностью. Важной особенностью этих уравнений является то, что они дают возможность уже в первом приближении находить возмущения, обусловленные совместным влиянием различных возмущающих факторов и сжатия Земли.

Рассмотрим подробнее этот вопрос. Пусть $\gamma$ есть параметр, характеризующий малость возмущающей функции $R$. Тогда, подставив в частные производные $R$ по элементам формулы промежуточного движения, мы получим в правых частях дифференциальных уравнений члены, пропорциональные $\gamma$, $\gamma\varepsilon^2$, $\gamma\varepsilon^4$ и т. д. Поскольку $\varepsilon^2$ имеет порядок $10^{-3}$, то наиболее существенные возмущения будут получаться в результате интегрирования членов, пропорциональных $\gamma$. Что касается комбинированных возмущений, то они будут результатом интегрирования членов, пропорциональных $\gamma\varepsilon^2$, $\gamma\varepsilon^4$ и т. д.

В ряде случаев комбинированные возмущения являются малыми, и их далеко не всегда нужно учитывать. Поэтому рассмотрим сначала задачу определения самых существенных возмущений. Эта задача, как мы сейчас увидим, решается весьма просто.

Возьмем дифференциальные уравнения (4.11.13), сохранив в них члены, линейные относительно производных $R$

по элементам. Тогда они запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dv} &= 2a^2\left(\frac{\partial R'}{\partial v}+\frac{\partial R'}{\partial u}\right),\\
\frac{de}{dv} &= \frac{p}{e}\left[\frac{\partial R'}{\partial v}+\frac{\partial R'}{\partial u}-(1-e^2)\frac{\partial F'}{\partial u}\right],\\
\frac{di}{dv} &= \frac{p}{s}\left[\alpha\frac{\partial F'}{\partial u}-\frac{\partial F'}{\partial \Omega}\right],\\
\frac{d\Omega}{dv} &= \mu+\frac{p\alpha}{s}\frac{\partial F'}{\partial s},\\
\frac{d\omega}{dv} &= \nu-\frac{p\alpha^2}{s}\frac{\partial F'}{\partial s}+\frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e}+\frac{\partial \Phi'}{\partial u}\right),\\
\frac{dt}{dv} &= \frac{\xi^2+c^2\eta^2}{m_2}\left[1+\frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e}+\frac{\partial \Phi'}{\partial u}\right)\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (4.13.1)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha=\cos i, \quad s=\sin i, \quad p=a(1-e^2),\\
&R'=\frac{R}{fm}, \quad F'=\left(\frac{\xi}{p}\right)^2 R',\\
&\Phi'=(2+e\cos v)\sin v\, F',
\end{aligned}\right\} \qquad (4.13.2)$$

а $\mu$, $\nu$ и $m_2$ даются формулами (3.9.3), (3.7.15) и (3.17.16).

После определения из первых пяти уравнений (4.13.1) элементов $a$, $e$, $i$, $\omega$ и $\Omega$ как явных функций $v$ шестое уравнение (4.13.1) позволит установить зависимость $v$ от времени $t$.

При $R=0$ первые пять уравнений (4.13.1) имеют решение:

$$\left.\begin{aligned}
&a=a_0, \quad e=e_0, \quad i=i_0,\\
&\omega=\nu v+\omega_0, \quad \Omega=\mu v+\Omega_0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.13.3)$$

Поскольку мы сначала будем пренебрегать комбинированными возмущениями, то в правые части уравнений (4.13.1) вместо $\xi$, $\eta$, $w$ можно подставить следующие упрощенные выражения (см. § 3.17):

$$\xi=\frac{p}{1+e\cos v}, \qquad (4.13.4)$$

$$\eta=\sin i\sin u, \qquad (4.13.5)$$

$$w=\Omega+\operatorname{Arctg}(\cos i\operatorname{tg} u), \qquad (4.13.6)$$

где

$$p = a(1 - e^2), \quad u = v + \omega. \tag{4.13.7}$$

Интегрируя теперь уравнения (4.13.1) при условии (4.13.3), мы найдем все важнейшие возмущения первого порядка. Отброшенные неравенства будут примерно в 1000 раз меньше найденных.

Очевидно, такой же метод определения самых существенных возмущений можно использовать и в случае уравнений § 4.5, 4.9 и 4.10.

Заметим, что такая упрощенная схема определения возмущений первого порядка хотя внешне и похожа на схему вычисления возмущений кеплеровых элементов, но существенно отличается от последней. Действительно, во-первых, в случае кеплеровых элементов все величины $a$, $e$, $i$, $\omega$, $\Omega$ и $M_0$ в нулевом приближении постоянны, в то время как в нашем случае только неугловые элементы являются постоянными, а угловые суть линейные функции независимой переменной. Во-вторых, при использовании элементов промежуточной орбиты параметр $\gamma$ имеет порядок $10^{-6}$ и выше, а в уравнениях для кеплеровых элементов $\gamma \sim 10^{-3}$.

Что касается комбинированных неравенств, то мы рассмотрим их в гл. VIII на примере влияния сопротивления атмосферы, а сейчас продолжим анализ возмущений первого порядка.

Решение уравнений (4.13.1) позволяет представить возмущенные элементы в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + \delta a, & \omega &= \omega' + \delta\omega, \\ e &= e_0 + \delta e, & \Omega &= \Omega' + \delta\Omega, \\ i &= i_0 + \delta i, & v &= v' + \delta v, \end{aligned}\right\} \tag{4.13.8}$$

где $a_0$, $e_0$, $i_0$, $\omega'$, $\Omega'$, и $v'$ — элементы в промежуточном движении, а $\delta a, \delta e, \ldots, \delta v$ — *возмущения первого порядка*. Зная возмущения этих элементов, можно найти возмущения других величин, описывающих движение спутника. Как следует из § 3.10, прямоугольные координаты $x$, $y$, $z$ легко находятся, если известны $a$, $e$, $i$, $\hat{\Omega}$, $\psi$ и $\theta$. Но с принятой точностью из (3.17.7), (3.17.8) и (3.17.13) мы имеем

$$\delta\hat{\Omega} = \delta\Omega, \quad \delta\psi = \delta v, \quad \delta\theta = \delta v + \delta\omega, \tag{4.13.9}$$

так что

$$\psi = \psi' + \delta v, \quad \hat{\Omega} = \hat{\Omega}' + \delta\Omega, \quad \theta = \theta' + \delta v + \delta\omega, \tag{4.13.10}$$

где $\psi'$, $\hat{\Omega}'$ и $\theta'$ суть $\psi$, $\hat{\Omega}$ и $\theta$ в промежуточном движении.

Вместо возмущения $\delta v$ или $\delta\psi$ можно рассматривать возмущение $\delta M$ элемента $M$, входящего в уравнения, связывающие $\psi$ с временем $t$. Его можно найти из формулы

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial M}\delta M + \frac{\partial\psi}{\partial e}\delta e, \tag{4.13.11}$$

где

$$\frac{\partial\psi}{\partial M} = \frac{(1+e_0\cos\psi')^2}{(1-e_0^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial e} = \frac{2+e_0\cos\psi'}{1-e_0^2}\sin\psi'. \tag{4.13.12}$$

Равенства (4.13.11) и (4.13.12) выводятся из (3.8.1) и (3.8.3), если в них отбросить члены, пропорциональные $\varepsilon^2$.

Далее, если потребуются возмущения элементов $l$, $g$, $h$, то, как легко видеть, они соответственно равны $\delta M$, $\delta\omega$ и $\delta\Omega$, так что возмущенные значения $l$, $g$, $h$ определятся по формулам

$$l = n(t - t_0) + l_0 + \delta M,$$
$$g = n'(t - t_0) + g_0 + \delta\omega,$$
$$h = n''(t - t_0) + h_0 + \delta\Omega,$$

где $n$, $n'$ и $n''$ — значения средних движений в промежуточной орбите.

## § 4.14. Замечания

Канонические уравнения были выведены в работе автора [7]. По-видимому, они являются наиболее удобными для аналитических исследований. Эти уравнения были использованы С. Н. Вашковьяк для построения теории движения спутников Марса и Л. П. Насоновой для вычисления вековых возмущений третьего порядка в движении спутника.

Уравнения, аналогичные уравнениям Лагранжа, были получены Е. И. Тимошковой [8], а уравнения, подобные уравнениям Ньютона, выведены в работе Б. Н. Носкова

и автора [6]. Эти уравнения имеют ту же точность, что и канонические уравнения. Они были использованы Б. Н. Носковым и автором для определения возмущений спутника, вызываемых совместным влиянием сопротивления атмосферы и сжатия Земли *).

Уравнения § 4.11 были получены в работе автора [9]. Эти уравнения упрощенные, однако они позволяют довольно легко найти все важнейшие неравенства в движении спутника. Они будут использованы нами для определения возмущений от зональных, тессеральных и секториальных гармоник геопотенциала, а также лунно-солнечных возмущений.

---

*) См. гл. VIII.

ГЛАВА V

# ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ЗОНАЛЬНЫХ ГАРМОНИК

## § 5.1. Возмущающая функция

В этой главе мы рассмотрим возмущения элементов орбиты спутника, обусловленные зональными гармониками потенциала притяжения Земли. Согласно (1.12.2) возмущающая функция, соответствующая этим членам потенциала, имеет вид

$$R = \frac{fm}{r} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi), \tag{5.1.1}$$

где $f$ — постоянная притяжения, $m$ и $r_0$ — масса и средний экваториальный радиус Земли, $r$ и $\varphi$ — геоцентрические радиус-вектор и широта спутника, $j_n$ — безразмерные коэффициенты, определяемые формулой (1.12.3).

Как уже отмечалось в § 1.8, коэффициенты $j_n$ очень медленно убывают с возрастанием порядка гармоники, и мы в настоящее время не знаем, сколько членов ряда (5.1.1) нужно учитывать при построении точной теории движения спутника. Следовательно, задача должна ставиться таким образом, чтобы найти общие формулы, по которым можно было бы вычислять возмущения от любого числа гармоник.

Поскольку величины $j_n$ имеют порядок $10^{-6}$ и выше, то при выводе формул для возмущений мы будем отбрасывать члены, пропорциональные $j_n \cdot \varepsilon^2$. Поэтому в выражениях для $r$ и $\sin\varphi$, которые нужно подставить в формулу (5.1.1), мы будем пренебрегать членами, пропорциональными $\varepsilon^2$. Тогда согласно (4.13.4) и (4.13.5) будем иметь

$$r = \xi = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{5.1.2}$$

$$\sin\varphi = \eta = \sin i \sin u. \tag{5.1.3}$$

В дальнейшем оказывается удобным вместо постоянной $\omega_0$ ввести постоянную

$$\omega_0^* = \omega_0 - \frac{\pi}{2}.$$

Если положить далее

$$u^* = (1+\nu)\,v + \omega_0^*,$$

то

$$u = u^* + \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\sin\varphi = \sin i \cos u^*. \tag{5.1.4}$$

Подставляя (5.1.2) и (5.1.4) в формулу (5.1.1), найдем

$$R = \frac{fm}{p} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{p}\right)^n (1+e\cos v)^{n+1} P_n (s \cos u^*), \tag{5.1.5}$$

где $s = \sin i$.

Поскольку для определения возмущений мы будем пользоваться уравнениями (4.13.1), нам нужно найти также разложения для функций $R'$, $F'$ и $\Phi'$, определяемых формулами (4.13.2). Они имеют следующий вид:

$$R' = \frac{1}{p} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{p}\right)^n (1+e\cos v)^{n+1} P_n (s \cos u^*), \tag{5.1.6}$$

$$F' = \frac{1}{p} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{p}\right)^n (1+e\cos v)^{n-1} P_n (s \cos u^*), \tag{5.1.7}$$

$$\Phi' = \frac{1}{p} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{p}\right)^n (1+e\cos v)^{n-1} (2+e\cos v) \times \times \sin v\, P_n (s \cos u^*). \tag{5.1.8}$$

Рассмотрим подробнее полученные выражения. Очевидно, функция $R'$ может быть представлена в виде следующего ряда:

$$R' = \frac{1}{p} \sum_{k,\,j} A_{k,\,j} \cos (ku^* + jv), \tag{5.1.9}$$

коэффициенты которого зависят от $p$, $e$ и $s$. Аналогичный вид будут иметь и функции $F'$ и $\Phi'$, только $\Phi'$ будет содержать вместо косинусов синусы.

Напомним, что те члены в (5.1.9), для которых $k = j = 0$, называются *вековыми* членами. Они вызывают *вековые*

*возмущения*. Члены, для которых $k = -j \neq 0$ и $k \neq -j$, называются соответственно *долгопериодическими* и *короткопериодическими*. При интегрировании долгопериодических членов в возмущениях появятся малые знаменатели вида $k\nu$, где $k$ — целое число, а $\nu$ — величина порядка $\varepsilon^2$. Интегрирование короткопериодических членов не приведет к малым знаменателям, и амплитуды таких возмущений будут пропорциональны $j_n$.

В дальнейшем мы будем пренебрегать короткопериодическими возмущениями. Таким образом, все упрощения, которые были здесь сделаны, позволяют нам получить вековые возмущения с точностью до $\varepsilon^4$, а периодические — до $\varepsilon^2$ включительно.

Введем теперь в рассмотрение коэффициенты $M_n^{(k)}(e)$ и $L_n^{(k)}(s)$ согласно формулам

$$M_n^{(k)}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)^n \cos kv\, dv, \qquad (5.1.10)$$

$$L_n^{(k)}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(s\cos u^*)\cos ku^*\, du^*. \qquad (5.1.11)$$

Тогда, если в (5.1.6) отбросить короткопериодические члены, то, как легко видеть, для функции $R'$ будем иметь следующее разложение:

$$R' = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty} R_k \cos k(u^* - v), \qquad (5.1.12)$$

где

$$R_0 = \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{p}\right)^n M_{n+1}^{(0)} L_n^{(0)}, \qquad (5.1.13)$$

$$R_k = 2\sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{p}\right)^n M_{n+1}^{(k)} L_n^{(k)}. \qquad (5.1.14)$$

Аналогичным образом находим

$$F' = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} F_k \cos k(u^* - v), \tag{5.1.15}$$

$$\Phi' = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \sin k(u^* - v), \tag{5.1.16}$$

где

$$F_0 = \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{p}\right)^n M_{n-1}^{(0)} L_n^{(0)}, \tag{5.1.17}$$

$$F_k = 2 \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{p}\right)^n M_{n-1}^{(k)} L_n^{(k)}, \tag{5.1.18}$$

$$\Phi_k = -2 \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{p}\right)^n N_{n-1}^{(k)} L_n^{(k)}, \tag{5.1.19}$$

причем

$$N_n^{(k)}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e\cos v)^n (2 + e\cos v) \sin v \sin kv \, dv. \tag{5.1.20}$$

Методика вычисления коэффициентов $M_n^{(k)}(e)$, $N_n^{(k)}(e)$ и $L_n^{(k)}(s)$ будет рассмотрена в следующих параграфах.

## § 5.2. Коэффициенты $M_n^{(k)}(e)$

Рассмотрим функцию $M_n^{(k)}(e)$, определяемую формулой

$$M_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e\cos v)^n \cos kv \, dv. \tag{5.2.1}$$

Очевидно, при положительном $n$ функция $M_n^{(k)}(e)$ является многочленом относительно $e$. При четном $k$ степень этого многочлена равна $n$, если $n$ четно, и $n - 1$, если $n$ нечетно. При нечетном $k$ степень $M_n^{(k)}(e)$ будет равна $n$ или $n - 1$, смотря по тому, четно или нечетно $n - 1$. Легко видеть также, что многочлен $M_n^{(k)}(e)$ имеет порядок $e^k$. Из форму-

лы (5.2.1) следует, что

$$M_n^{(k)}(e) \equiv 0, \quad k > n, \tag{5.2.2}$$

$$M_n^{(k)}(-e) = (-1)^k M_n^{(k)}(e). \tag{5.2.3}$$

Выведем рекуррентные соотношения, связывающие $M_n^{(k)}$ соседних индексов. Для этого применим сначала к интегралу (5.2.1) операцию интегрирования по частям. Тогда получим

$$M_n^{(k)} = \frac{ne}{2\pi k} \int_0^{2\pi} (1 + e\cos v)^{n-1} \sin v \sin kv\, dv, \tag{5.2.4}$$

или

$$M_n^{(k)} = \frac{ne}{4\pi k} \int_0^{2\pi} (1 + e\cos v)^{n-1} [\cos(k-1)v - \cos(k+1)v]\, dv. \tag{5.2.5}$$

Следовательно,

$$M_n^{(k)} = \frac{ne}{2k} [M_{n-1}^{(k-1)} - M_{n-1}^{(k+1)}]. \tag{5.2.6}$$

С другой стороны, из (5.2.1) имеем

$$M_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e\cos v)^{n-1} \cos kv\, dv + \\ + \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e\cos v)^{n-1} \cos v \cos kv\, dv, \tag{5.2.7}$$

или

$$M_n^{(k)} = M_{n-1}^{(k)} + \frac{e}{2} [M_{n-1}^{(k-1)} + M_{n-1}^{(k+1)}]. \tag{5.2.8}$$

Приравнивая правые части формул (5.2.6) и (5.2.8) и заменяя затем $n - 1$ на $n$, найдем

$$M_n^{(k)} = \frac{e}{2k} [(n + 1 - k) M_n^{(k-1)} - (n + 1 + k) M_n^{(k+1)}]. \tag{5.2.9}$$

Полученная формула позволяет вычислять $M_n^{(k+1)}$, если известны $M_n^{(k)}$ и $M_n^{(k-1)}$.

Выведем теперь формулу, связывающую $M_n^{(k)}$ с одинаковыми верхними индексами. С этой целью применим к последнему интегралу (5.2.7) операцию интегрирования по частям. Тогда

$$M_n^{(k)} = M_{n-1}^{(k)} + \frac{n-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)^{n-2}e^2\sin^2 v\cos kv\,dv + \\ + \frac{ek}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)^{n-1}\sin v\sin kv\,dv. \quad (5.2.10)$$

Разбивая первый интеграл в (5.2.10) на три слагаемых (для чего используются известные формулы замены произведений тригонометрических функций соответствующими суммами) и учитывая (5.2.4), найдем

$$\frac{n^2-k^2}{n}M_n^{(k)} = (2n-1)M_{n-1}^{(k)} - (n-1)(1-e^2)M_{n-2}^{(k)}. \quad (5.2.11)$$

Эта формула дает возможность вычислить $M_n^{(k)}$, если известны $M_{n-1}^{(k)}$ и $M_{n-2}^{(k)}$.

Перейдем к выводу формул для производной $M_n^{(k)}$ по $e$. Дифференцируя (5.2.1) по $e$, получим

$$\frac{dM_n^{(k)}}{de} = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)^{n-1}\cos v\cos kv\,dv. \quad (5.2.12)$$

Если разбить интеграл (5.2.12) на сумму двух интегралов, то найдем

$$\frac{dM_n^{(k)}}{de} = \frac{n}{2}[M_{n-1}^{(k-1)} + M_{n-1}^{(k+1)}]. \quad (5.2.13)$$

Можно получить и другую формулу для производной $M_n^{(k)}$ по $e$. Согласно (5.2.8)

$$M_{n-1}^{(k-1)} + M_{n-1}^{(k+1)} = \frac{2}{e}[M_n^{(k)} - M_{n-1}^{(k)}]. \quad (5.2.14)$$

Поэтому

$$\frac{dM_n^{(k)}}{de} = \frac{n}{e}[M_n^{(k)} - M_{n-1}^{(k)}]. \quad (5.2.15)$$

Из равенств (5.2.15) и (5.2.11) легко вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $M_n^{(k)}$.

Оно имеет вид

$$\frac{d^2M_n^{(k)}}{de^2} - \frac{2n-1}{e(1-e^2)}\frac{dM_n^{(k)}}{de} - \frac{n(1-n)e^2-k^2}{e^2(1-e^2)}M_n^{(k)} = 0. \quad (5.2.16)$$

Рассмотрим один частный случай. Пусть $n = k$. Тогда из (5.2.1) находим

$$M_k^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^k \cos^k v \cos kv\, dv.$$

Но

$$\int_0^{2\pi} \cos^k v \cos kv\, dv = \frac{2\pi}{2^k}.$$

Следовательно,

$$M_k^{(k)}(e) = \left(\frac{e}{2}\right)^k. \quad (5.2.17)$$

Кроме того, из (5.2.2) имеем

$$M_{k-1}^{(k)} \equiv 0. \quad (5.2.18)$$

Таким образом, для вычисления таблицы коэффициентов $M_n^{(k)}$ можно воспользоваться следующей схемой. Формулой (5.2.17) задаем элементы главной диагонали $M_k^{(k)}(e)$, затем согласно (5.2.18) приписываем в каждой строке слева от этого элемента нуль, а потом по формуле (5.2.11) последовательно вычисляем элементы строки $M_{k+1}^{(k)}$, $M_{k+2}^{(k)}$ и т. д.

Явные выражения для некоторых $M_n^{(k)}$ приведены в Приложении. Общие формулы для $M_n^{(k)}$ будут получены в § 6.6.

## § 5.3. Коэффициенты $N_n^{(k)}(e)$

На основании формулы (5.1.20) имеем

$$N_{n-1}^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+e\cos v)^n \sin v \sin kv\, dv +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+e\cos v)^{n-1} \sin v \sin kv\, dv.$$

Разбивая каждый из этих интегралов на два, как это сделано в § 5.2, получим

$$N_{n-1}^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)^n\cos(k-1)v\,dv -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)^n\cos(k+1)v\,dv +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)^{n-1}\cos(k-1)v\,dv -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)^{n-1}\cos(k+1)v\,dv$$

или, согласно (5.2.1),

$$N_{n-1}^{(k)} = \frac{1}{2}[M_n^{(k-1)} - M_n^{(k+1)} + M_{n-1}^{(k-1)} - M_{n-1}^{(k+1)}]. \quad (5.3.1)$$

При помощи (5.2.6) отсюда находим

$$N_{n-1}^{(k)} = \frac{k}{e}\left[\frac{1}{n}M_n^{(k)} + \frac{1}{n+1}M_{n+1}^{(k)}\right]. \quad (5.3.2)$$

Эта формула позволяет вычислять $N_{n-1}^{(k)}$, если известны $M_n^{(k)}$ и $M_{n+1}^{(k)}$.

Выведем еще одно соотношение, которое нам потребуется в будущем. Из (5.2.15) имеем

$$\frac{dM_{n+1}^{(k)}}{de} = \frac{n+1}{e}[M_{n+1}^{(k)} - M_n^{(k)}]. \quad (5.3.3)$$

Вычитая из (5.3.3) равенство (5.3.2), умноженное на $k$, получим

$$\frac{dM_{n+1}^{(k)}}{de} - kN_{n-1}^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{e}\left[\frac{(n+1)^2-k^2}{n+1}M_{n+1}^{(k)} - \frac{n(n+1)+k^2}{n}M_n^{(k)}\right].$$

Если отсюда исключить $M_{n+1}^{(k)}$, а затем и $M_n^{(k)}(e)$ при помощи формулы (5.2.11), то найдем

$$\frac{dM_{n+1}^{(k)}}{de} - kN_{n-1}^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{e}[(n-1)(1-e^2)(M_{n-1}^{(k)} - M_{n-2}^{(k)}) + e^2(2n-1)M_{n-1}^{(k)}].$$

Но согласно (5.2.15)

$$\frac{n-1}{e}[M_{n-1}^{(k)} - M_{n-2}^{(k)}] = \frac{dM_{n-1}^{(k)}}{de}.$$

Поэтому

$$\frac{dM_{n+1}^{(k)}}{de} - kN_{n-1}^{(k)} = (1-e^2)\frac{dM_{n-1}^{(k)}}{de} + e^2(2n-1)M_{n-1}^{(k)}. \quad (5.3.4)$$

Это и есть то соотношение, которое нам нужно было установить.

## § 5.4. Коэффициенты $L_n^{(k)}(s)$

Рассмотрим функцию $L_n^{(k)}(s)$, определяемую равенством

$$L_n^{(k)}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(s\cos u)\cos ku\,du, \quad (5.4.1)$$

где $0 \leqslant s \leqslant 1$, а $n$ и $k$ — целые числа.

Положим в формуле

$$P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\psi) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(\cos\theta)P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\psi,$$

которая выражает собой теорему сложения для полиномов Лежандра (см. § 1.3),

$$\theta = i, \quad \theta' = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = u.$$

Тогда получим

$$P_n(s\cos u) =$$

$$= P_n(0)P_n(\alpha) + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(0)P_n^{(k)}(\alpha)\cos ku, \quad (5.4.2)$$

где

$$s = \sin i, \quad \alpha = \cos i.$$

Умножая обе части (5.4.2) на $\cos ku\, du$ и интегрируя в пределах от 0 до $2\pi$, найдем

$$\int_0^{2\pi} P_n(s\cos u)\cos ku\, du = 0,$$

если $k > n$, и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(s\cos u)\cos ku\, du = \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(0)\, P_n^{(k)}(\alpha),$$

если $k \leqslant n$. Следовательно,

$$L_n^{(k)} = \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(0)\, P_n^{(k)}(\alpha). \tag{5.4.3}$$

Формула (5.4.3) выражает $L_n^{(k)}(\sin i)$ через присоединенную функцию Лежандра от $\cos i$.

Принимая во внимание известное свойство полиномов Лежандра

$$P_n(-\alpha) = (-1)^n P_n(\alpha)$$

и формулу (1.3.1)

$$P_n^{(k)}(\alpha) = (1-\alpha^2)^{k/2}\frac{d^k P_n(\alpha)}{d\alpha^k}, \tag{5.4.4}$$

можно показать, что

$$P_{2n}^{(2k+1)}(0) \equiv 0, \quad P_{2n+1}^{(2k)}(0) \equiv 0. \tag{5.4.5}$$

Следовательно,

$$L_n^{(k)}(s) = 0,$$

когда $n + k$ нечетно.

Перейдем к выводу рекуррентных соотношений, связывающих функции $L_n^{(k)}$ различных индексов. Согласно (1.2.4) и (1.2.6) имеем

$$(n+1)P_{n+1}(\theta) - (2n+1)\theta P_n(\theta) + nP_{n-1}(\theta) = 0, \tag{5.4.6}$$

$$(2n+1)P_n(\theta) = P'_{n+1}(\theta) - P'_{n-1}(\theta). \tag{5.4.7}$$

Полагая в (5.4.6) $\theta = s\cos u$, а затем умножая на $\cos ku du$ и интегрируя в пределах от 0 до $2\pi$, мы на основании

(5.4.1) получим

$$(n+1)\,L_{n+1}^{(k)}(s)+nL_{n-1}^{(k)}(s)=$$
$$=\frac{2n+1}{2\pi}\,s\int_0^{2\pi}P_n(s\cos u)\cos ku\cos u\,du,$$

или

$$(n+1)\,L_{n+1}^{(k)}(s)+nL_{n-1}^{(k)}(s)=$$
$$=\frac{1}{2}(2n+1)\,s\,[L_n^{(k-1)}(s)+L_n^{(k+1)}(s)]. \quad (5.4.8)$$

Далее из формулы (5.4.7) при $\theta=s\cos u$, находим

$$-s(2n+1)\,P_n(s\cos u)\sin u=$$
$$=-sP'_{n+1}(s\cos u)\sin u+sP'_{n-1}(s\cos u)\sin u.$$

Но

$$-sP'_n(s\cos u)\sin u=\frac{dP_n(s\cos u)}{du}.$$

Поэтому

$$-s(2n+1)\sin uP_n(s\cos u)=$$
$$=\frac{dP_{n+1}(s\cos u)}{du}-\frac{dP_{n-1}(s\cos u)}{du}. \quad (5.4.9)$$

Умножим обе части (5.4.9) на $\sin kudu$ и проинтегрируем в пределах от 0 до $2\pi$. Тогда, если интеграл от правой части взять по частям, получим

$$\frac{s}{2}(2n+1)\,[L_n^{(k-1)}(s)-L_n^{(k+1)}(s)]=$$
$$=k\,[L_{n+1}^{(k)}(s)-L_{n-1}^{(k)}(s)]. \quad (5.4.10)$$

Разрешая уравнения (5.4.8) и (5.4.10) относительно $L_n^{(k-1)}$ и $L_n^{(k+1)}$, найдем

$$s(2n+1)\,L_n^{(k-1)}=(n+k+1)\,L_{n+1}^{(k)}+(n-k)\,L_{n-1}^{(k)}, \quad (5.4.11)$$

$$s(2n+1)\,L_n^{(k+1)}=(n-k+1)\,L_{n+1}^{(k)}+(n+k)\,L_{n-1}^{(k)}. \quad (5.4.12)$$

Заменим в формуле (5.4.12) $k$ на $k-1$, а в формуле (5.4.11) $n$ на $n-1$, а затем на $n+1$. Тогда будем иметь

$$(n-k+2)\,L_{n+1}^{(k-1)}+(n+k-1)\,L_{n-1}^{(k-1)}=s(2n+1)\,L_n^{(k)}, \quad (5.4.13)$$

$$s(2n-1)\,L_{n-1}^{(k-1)}=(n+k)\,L_n^{(k)}+(n-k-1)\,L_{n-2}^{(k)}, \quad (5.4.14)$$

$$s(2n+3)\,L_{n+1}^{(k-1)}=(n+k+2)\,L_{n+2}^{(k)}+(n-k+1)\,L_n^{(k)}. \quad (5.4.15)$$

Если теперь из уравнений (5.4.13)—(5.4.15) исключить $L_{n+1}^{(k-1)}$ и $L_{n-1}^{(k-1)}$, то мы найдем следующую рекуррентную формулу:

$$(2n-1)\,[(n+2)^2-k^2]\,L_{n+2}^{(k)}+(2n+1)\,[2\,(n^2+ \\ +k^2+n-1)-s^2\,(2n-1)\,(2n+3)]\,L_n^{(k)}+ \\ +(2n+3)\,[(n-1)^2-k^2]\,L_{n-2}^{(k)}=0, \quad (5.4.16)$$

которая связывает три последовательные функции с одним и тем же верхним индексом.

Выведем вторую рекуррентную формулу. Для этого разрешим уравнения (5.4.8) и (5.4.10) относительно $L_{n+1}^{(k)}$ и $L_{n-1}^{(k)}$. Тогда

$$kL_{n+1}^{(k)}=\frac{1}{2}\,s\,(n+k)\,L_n^{(k-1)}+\frac{1}{2}\,s\,(k-n)\,L_n^{(k+1)}, \quad (5.4.17)$$

$$kL_{n-1}^{(k)}=\frac{1}{2}\,s\,(k-n-1)\,L_n^{(k-1)}+\frac{1}{2}\,s\,(k+n+1)\,L_n^{(k+1)}. \quad (5.4.18)$$

Заменяя в (5.4.17) $n$ на $n-1$, а в (5.4.18) $k$ на $k-1$, а затем на $k+1$, будем иметь

$$\frac{s}{2}\,(k+n-1)\,L_{n-1}^{(k-1)}+\frac{s}{2}\,(k-n+1)\,L_{n-1}^{(k+1)}=kL_n^{(k)}, \quad (5.4.19)$$

$$(k-1)\,L_{n-1}^{(k-1)}=\frac{s}{2}\,(k-n-2)\,L_n^{(k-2)}+\frac{s}{2}\,(k+n)\,L_n^{(k)}, \quad (5.4.20)$$

$$(k+1)\,L_{n-1}^{(k+1)}=\frac{s}{2}\,(k-n)\,L_n^{(k)}+\frac{s}{2}\,(k+n+2)\,L_n^{(k+2)}. \quad (5.4.21)$$

Исключая отсюда $L_{n-1}^{(k-1)}$ и $L_{n-1}^{(k+1)}$, получим

$$(k-1)\,(k-n+1)\,(k+n+2)\,L_n^{(k+2)}+ \\ +(k+1)\,(k+n+1)\,(k-n-2)\,L_n^{(k-2)}+ \\ +\frac{2k}{s^2}\,[s^2\,(k^2+n^2+n-1)-2\,(k^2-1)]\,L_n^{(k)}=0. \quad (5.4.22)$$

Формула (5.4.22), таким образом, связывает три соседние функции с одним и тем же нижним индексом.

Выведем теперь формулу для производной $L_n^{(k)}$ по $s$. Из равенства (5.4.1) имеем

$$\frac{dL_n^{(k)}}{ds}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_n'\,(s\cos u)\cos u\cos ku\,du. \quad (5.4.23)$$

Заменяя здесь $n$ на $n+2$ и вычитая из полученной формулы равенство (5.4.23), найдем

$$\frac{dL_{n+2}^{(k)}}{ds} - \frac{dL_n^{(k)}}{ds} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P'_{n+2} - P'_n) \cos u \cos ku \, du.$$

Но согласно (5.4.7)

$$P'_{n+2} - P'_n = (2n+3) P_{n+1}.$$

Поэтому

$$\frac{dL_{n+2}^{(k)}}{ds} - \frac{dL_n^{(k)}}{ds} = \frac{2n+3}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{n+1} \cos u \cos ku \, du$$

или

$$\frac{dL_{n+2}^{(k)}}{ds} - \frac{dL_n^{(k)}}{ds} = \frac{2n+3}{2} [L_{n+1}^{(k-1)} + L_{n+1}^{(k+1)}]. \quad (5.4.24)$$

Используя равенства, полученные из (5.4.17) и (5.4.18) заменой $n$ на $n+1$, мы вместо (5.4.24) будем иметь

$$\frac{dL_{n+2}^{(k)}}{ds} - \frac{dL_n^{(k)}}{ds} = \frac{1}{s} [(n+2) L_{n+2}^{(k)} + (n+1) L_n^{(k)}]. \quad (5.4.25)$$

Заменяя здесь $n$ на $n-2$, получим

$$\frac{dL_n^{(k)}}{ds} - \frac{dL_{n-2}^{(k)}}{ds} = \frac{1}{s} [nL_n^{(k)} + (n-1) L_{n-2}^{(k)}]. \quad (5.4.26)$$

Продифференцируем (5.4.16) по $s$. Тогда

$$\begin{aligned}(2n-1)[(n+2)^2 - k^2] \frac{dL_{n+2}^{(k)}}{ds} + \\ + (2n+1)[2(n^2+k^2+n-1) - \\ - s^2(2n-1)(2n+3)] \frac{dL_n^{(k)}}{ds} + \\ + (2n+3)[(n-1)^2 - k^2] \frac{dL_{n-2}^{(k)}}{ds} = \\ = 2s(2n-1)(2n+1)(2n+3) L_n^{(k)}. \quad (5.4.27)\end{aligned}$$

Исключая из уравнений (5.4.25) — (5.4.27) величины

$$\frac{dL_{n+2}^{(k)}}{ds}, \quad \frac{dL_{n-2}^{(k)}}{ds}, \quad L_{n-2}^{(k)},$$

будем иметь

$$s\frac{dL_n^{(k)}}{ds}+(n+1)\,L_n^{(k)}=$$

$$=\frac{(n+1)^2-k^2}{(1-s^2)\,(2n+3)}\,L_n^{(k)}-\frac{(n+2)^2-k^2}{(1-s^2)\,(2n+3)}\,L_{n+2}^{(k)}. \quad (5.4.28)$$

Если отсюда при помощи (5.4.16) исключить $L_{n+2}^{(k)}$, то получим

$$(2n-1)\,s\,(1-s^2)\frac{dL_n^{(k)}}{ds}=[(n-1)^2-k^2]\,L_{n-2}^{(k)}+$$

$$+[k^2-s^2n^2+n\,(n-1)\,(1-s^2)]\,L_n^{(k)}. \quad (5.4.29)$$

Исходя из равенств (5.4.28) и (5.4.16), легко получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $L_n^{(k)}$. Оно имеет следующий вид:

$$s^2\,(1-s^2)\,\frac{d^2L_n^{(k)}}{ds^2}+s\,(1-2s^2)\,\frac{dL_n^{(k)}}{ds}-$$

$$-[k^2-s^2n\,(1+n)]\,L_n^{(k)}=0. \quad (5.4.30)$$

Итак, рекуррентные формулы (5.4.16), (5.4.22) и (5.4.28), (5.4.29) позволяют вычислить любое количество функций $L_n^{(k)}$ и их первых производных, если известны, например,

$$L_2^{(0)},\quad L_4^{(0)},\quad L_2^{(2)},\quad L_4^{(2)}.$$

Однако, по-видимому, более удобно пользоваться одной рекуррентной формулой, скажем, формулой (5.4.16), задавая две соседние функции $L_{k-2}^{(k)}$ и $L_k^{(k)}$. С этой целью найдем, во-первых, явное выражение для $L_k^{(k)}$ и покажем, во-вторых, что при любом $k$ формула (5.4.16) остается справедливой, если считать $L_{k-2}^{(k)}=0$.

При помощи формулы (1.2.3)

$$P_n(\alpha)=\frac{1\cdot3\cdot5\,\ldots\,(2n-1)}{n!}\left[\alpha^n-\frac{n\,(n-1)}{2\,(2n-1)}\,\alpha^{n-2}+\ldots\right]$$

и формулы (5.4.4) находим

$$P_k^{(k)}(\alpha) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)(1-\alpha^2)^{k/2},$$

$$P_{k+2}^{(k)}(\alpha) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k+1)}{2}[(2k+3)\alpha^2 - 1](1-\alpha^2)^{k/2}.$$

Положим в этих равенствах $\alpha^2 = 1 - s^2$ и воспользуемся уравнением (5.4.3). Тогда

$$L_k^{(k)}(s) = \frac{s^k [1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)]^2}{(2k)!}, \tag{5.4.31}$$

$$L_{k+2}^{(k)}(s) = -\frac{s^k [1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k+1)]^2}{2 \cdot (2k+2)!}[(2k+2) - (2k+3)s^2]. \tag{5.4.32}$$

Если в формуле (5.4.16) положить $n = k$ и $L_{k-2}^{(k)} = 0$, то при помощи (5.4.31) и (5.4.32) мы легко убедимся в том, что (5.4.16) превращается в тождество.

Таким образом, для вычисления функций $L_n^{(k)}$ можно пользоваться только формулой (5.4.16), принимая за исходные данные

$$L_{k-2}^{(k)} = 0, \quad L_k^{(k)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k)} s^k. \tag{5.4.33}$$

Другими словами, мы задаем второй формулой (5.4.33) элементы главной диагонали и приписываем в каждой строке слева от этих элементов нули, а затем по формуле (5.4.16) вычисляем последовательно $L_{k+2}^{(k)}$, $L_{k+4}^{(k)}$ и т. д.

Отметим в заключение некоторые свойства коэффициентов $L_n^{(k)}(s)$. Очевидно, $L_n^{(k)}$ является многочленом $n$-й степени относительно $s$, причем наинизшая степень $s$ в этом многочлене равна $k$. Если $n + k$ нечетно, то все $L_n^{(k)}(s)$ тождественно равны нулю. Далее мы имеем

$$L_n^{(k)}(s) \equiv 0, \quad k > n, \tag{5.4.34}$$

$$L_n^{(k)}(-s) = (-1)^n L_n^{(k)}(s). \tag{5.4.35}$$

Явные выражения для некоторых $L_n^{(k)}(s)$ приведены в Приложении. Общие выражения для $L_n^{(k)}$ будут получены в § 6.5.

## § 5.5. Выражения для $R'$, $F'$, $\Phi'$

Пусть

$$\omega^* = u^* - v. \tag{5.5.1}$$

Тогда из формул (5.1.12), (5.1.15) и (5.1.16) имеем

$$pR' = R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \cos k\omega^*, \tag{5.5.2}$$

$$pF' = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos k\omega^*, \tag{5.5.3}$$

$$p\Phi' = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \sin k\omega^*. \tag{5.5.4}$$

Принимая во внимание (5.4.34) и тот факт, что $L_n^{(k)}(s) = 0$ при нечетном $n + k$, мы при помощи (5.1.13), (5.1.14) и (5.1.17)—(5.1.19) находим следующие формулы для коэффициентов $R_0$, $F_0$, $R_k$, $F_k$, $\Phi_k$:

$$R_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{2n} M_{2n+1}^{(0)} L_{2n}^{(0)}, \tag{5.5.5}$$

$$F_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{2n} M_{2n-1}^{(0)} L_{2n}^{(0)}, \tag{5.5.6}$$

$$R_{2m} = 2 \sum_{n=m}^{\infty} \gamma_{2n} M_{2n+1}^{(2m)} L_{2n}^{(2m)}, \tag{5.5.7}$$

$$F_{2m} = 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_{2n} M_{2n-1}^{(2m)} L_{2n}^{(2m)}, \tag{5.5.8}$$

$$\Phi_{2m} = -2 \sum_{n=m}^{\infty} \gamma_{2n} N_{2n-1}^{(2m)} L_{2n}^{(2m)}, \tag{5.5.9}$$

$$R_{2m+1} = 2 \sum_{n=m}^{\infty} \gamma_{2n+1} M_{2n+2}^{(2m+1)} L_{2n+1}^{(2m+1)}, \tag{5.5.10}$$

$$F_{2m+1} = 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_{2n+1} M_{2n}^{(2m+1)} L_{2n+1}^{(2m+1)}, \tag{5.5.11}$$

$$\Phi_{2m+1} = -2 \sum_{n=m}^{\infty} \gamma_{2n+1} N_{2n}^{(2m+1)} L_{2n+1}^{(2m+1)}, \tag{5.5.12}$$

где

$$\gamma_k = j_k \left(\frac{r_0}{p}\right)^k \qquad (\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0). \tag{5.5.13}$$

Из этих формул следует, что вековые части функций $R'$ и $F'$ обусловлены только четными зональными гармониками, члены с четными $k$ происходят от гармоник четного порядка, а члены с нечетными $k$ — от нечетных гармоник.

Заметим также, что коэффициенты $R_k$ и $F_k$ пропорциональны $e^k s^k$, а коэффициенты $\Phi_k$ пропорциональны $e^{k-1}s^k$. Это обстоятельство важно иметь в виду в тех случаях, когда величины $e$ и $s$ малы.

## § 5.6. Элементы как функции $v$

Так как $F'$ не зависит от $\Omega$ и

$$\frac{\partial R'}{\partial v} + \frac{\partial R'}{\partial u} = 0,$$

то уравнения (4.13.1) в нашем случае приобретают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{dv} = 0,\\
&\frac{de}{dv} = -\frac{p(1-e^2)}{e}\frac{\partial F'}{\partial \omega^*},\\
&\frac{ds}{dv} = \frac{p(1-s^2)}{s}\frac{\partial F'}{\partial \omega^*},\\
&\frac{d\Omega}{dv} = \mu + \frac{p\alpha}{s}\frac{\partial F'}{\partial s},\\
&\frac{d\omega^*}{dv} = \nu - \frac{p\alpha^2}{s}\frac{\partial F'}{\partial s} + \frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e} + \frac{\partial \Phi'}{\partial \omega^*}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{5.6.1}$$

где $\omega^*$ дается формулой (5.5.1).

Из первого уравнения (5.6.1) следует

$$a = a_0, \tag{5.6.2}$$

где $a_0$ — постоянная. Таким образом, элемент $a$ не имеет не только вековых, но и долгопериодических возмущений первого порядка.

Подставим в уравнения (5.6.1) вместо $R'$, $F'$ и $\Phi'$ их выражения из (5.5.2)—(5.5.4). Тогда

$$\left.\begin{aligned}
\frac{de}{dv} &= \frac{1-e^2}{e}\sum_{k=1}^{\infty} kF_k \sin k\omega^*,\\
\frac{ds}{dv} &= -\frac{1-s^2}{s}\sum_{k=1}^{\infty} kF_k \sin k\omega^*,\\
\frac{d\Omega}{dv} &= \mu + \frac{\alpha}{s}\frac{\partial F_0}{\partial s} + \frac{\alpha}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial F_k}{\partial s}\cos k\omega^*,\\
\frac{d\omega^*}{dv} &= \nu - \frac{\alpha^2}{s}\frac{\partial F_0}{\partial s} + \frac{1}{e}\frac{\partial R_0}{\partial e} +\\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{e}\left(\frac{\partial R_k}{\partial e} + k\Phi_k\right) - \frac{\alpha^2}{s}\frac{\partial F_k}{\partial s}\right]\cos k\omega^*.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.6.3)$$

Будем решать эти уравнения методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем упрощенное решение, которое получается, если в правых частях (5.6.3) отбросить периодические члены. Оно имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
e &= e_0, \quad \Omega = \mu' v + \Omega_0,\\
s &= s_0, \quad \omega^* = \nu' v + \omega_0^*,
\end{aligned}\right\} \qquad (5.6.4)$$

где $e_0$, $s_0$, $\Omega_0$ и $\omega_0^*$ — постоянные,

$$\mu' = \mu + \Delta\mu, \quad \nu' = \nu + \Delta\nu, \qquad (5.6.5)$$

причем $\mu = \mu(a_0, e_0, s_0)$ и $\nu = \nu(a_0, e_0, s_0)$ определяются формулами промежуточного движения, а $\Delta\mu$ и $\Delta\nu$ даются равенствами

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\mu &= \frac{\alpha_0}{s_0}\frac{\partial F_0}{\partial s_0},\\
\Delta\nu &= \frac{1}{e_0}\frac{\partial R_0}{\partial e_0} - \frac{\alpha_0^2}{s_0}\frac{\partial F_0}{\partial s_0}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.6.6)$$

Подставим теперь формулы (5.6.2) и (5.6.4) в первые два уравнения (5.6.3). Тогда после интегрирования найдем

$$e = e_0 + \delta e, \quad s = s_0 + \delta s, \qquad (5.6.7)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \delta e &= -\frac{1-e_0^2}{\nu' e_0}\sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos kg', \\ \delta s &= \frac{1-s_0^2}{\nu' s_0}\sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos kg', \end{aligned}\right\} \tag{5.6.8}$$

причем

$$g' = \nu' v + \omega_0^*. \tag{5.6.9}$$

Перейдем к решению третьего уравнения (5.6.3). Подставим в правую часть этого уравнения формулы (5.6.2) и (5.6.7). Тогда с принятой точностью будем иметь

$$\frac{d\Omega}{dv} = \mu' + \frac{\partial \mu}{\partial e_0}\delta e + \frac{\partial \mu}{\partial s_0}\delta s + \frac{\alpha_0}{s_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial F_k}{\partial s_0}\cos kg'. \tag{5.6.10}$$

Из формулы (3.9.3) с точностью до $\varepsilon^2$ включительно находим

$$\frac{\partial \mu}{\partial e_0} = -\frac{6\varepsilon_0^2 e_0 \alpha_0}{1-e_0^2}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial s_0} = \frac{3\varepsilon_0^2 s_0}{\alpha_0}.$$

Подставляя эти выражения и формулы (5.6.8) в уравнение (5.6.10), а затем интегрируя, мы можем представить $\Omega$ в следующем виде:

$$\Omega = \mu' v + \Omega_0 + \delta\Omega, \tag{5.6.11}$$

где

$$\delta\Omega = \frac{10\alpha_0}{\nu'(4-5s_0^2)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}F_k \sin kg' + \\ + \frac{\alpha_0}{\nu' s_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{\partial F_k}{\partial s_0}\sin kg'. \tag{5.6.12}$$

Здесь мы воспользовались для $\nu'$ упрощенным выражением

$$\nu' = \frac{3}{4}\varepsilon_0^2(4-5s_0^2),$$

что не противоречит принятой точности.

Аналогичным образом решается и последнее уравнение (5.6.3). В результате будем иметь

$$\omega^* = \nu' v + \omega_0^* + \delta\omega, \tag{5.6.13}$$

где $\delta\omega$ можно представить в виде

$$\delta\omega = -\alpha_0\delta\Omega - \frac{4}{\nu'}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}F_k \sin kg' + \\ + \frac{1}{\nu' e_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\partial R_k}{\partial e_0} + k\Phi_k\right)\sin kg'. \tag{5.6.14}$$

В заключение заметим, что входящие в выражения (5.6.6), (5.6.8), (5.6.12) и (5.6.14) коэффициенты $R_k$, $F_k$ и $\Phi_k$ вычисляются по формулам (5.5.5)—(5.5.12), в которых $a$, $e$, $s$ должны быть заменены соответственно на $a_0$, $e_0$, $s_0$.

## § 5.7. Соотношение между $t$ и $v$

Согласно (4.11.14) и (4.11.15) время $t$ связано с переменной $v$ уравнением

$$\frac{dt}{dv} = \frac{\xi^2 + c^2\eta^2}{m_2}\left\{1 + \frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e} + \frac{\partial\Phi'}{\partial u^*}\right)\right\}, \tag{5.7.1}$$

где $m_2$ определяется формулой (3.17.16), а $\xi$ и $\eta$ — сфероидальные координаты спутника.

Полагая

$$\frac{\xi^2 + c^2\eta^2}{m_2} = \frac{J}{n_0},$$

где $n_0$ выражается через $a$, $e$, $s$ формулой (3.8.7), а $J$ есть функция элементов орбиты и переменных $u^*$ и $v$, мы приведем уравнение (5.7.1) к виду

$$\frac{dt}{dv} = \frac{J}{n_0}\left\{1 + \frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e} + \frac{\partial\Phi'}{\partial u^*}\right)\right\}. \tag{5.7.2}$$

Вычисления показывают, что

$$J = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos v)^2} + O(\varepsilon^2), \tag{5.7.3}$$

причем $O(\varepsilon^2)$ не содержит свободного члена и долгопериодических членов, пропорциональных $\varepsilon^2$.

Чтобы проинтегрировать уравнение (5.7.2), нам необходимо в первое слагаемое правой части ввести возмущения элементов $e$ и $n_0$. Поэтому будем иметь

$$\frac{dt}{dv}=\frac{J_0}{n_0^{(0)}}+\frac{J_0}{n_0^{(0)}}\frac{p_0}{e_0}\left(\frac{\partial R'}{\partial e}+\frac{\partial \Phi'}{\partial u^*}\right)+\frac{\partial J_0}{\partial e_0}\frac{\delta e}{n_0^{(0)}}-\frac{J_0}{n_0^{(0)}}\frac{\delta n_0}{n_0^{(0)}}, \tag{5.7.4}$$

где $J_0$ и $n_0^{(0)}$ определяются формулами промежуточного движения, в которых элементы $a$, $e$, $s$ заменены соответственно на $a_0$, $e_0$, $s_0$.

Поскольку в промежуточном движении время $t$ связано с $v$ уравнением

$$\frac{dt}{dv}=\frac{J_0}{n_0^{(0)}}, \tag{5.7.5}$$

то, полагая

$$t-t_0=\int\frac{J_0}{n_0^{(0)}}dv+\delta t, \tag{5.7.6}$$

мы вместо (5.7.4) будем иметь

$$\frac{d(n_0^{(0)}\delta t)}{dv}=J_0\frac{p_0}{e_0}\left(\frac{\partial R'}{\partial e}+\frac{\partial \Phi'}{\partial u^*}\right)+\frac{\partial J_0}{\partial e_0}\delta e-J_0\frac{\delta n_0}{n_0^{(0)}}. \tag{5.7.7}$$

Найдем теперь возмущение $\delta n_0$. Так как $R'$ не зависит от $\Omega$, то уравнение (4.11.16) в нашем случае запишется в виде

$$\frac{dn_0}{dv}=-3\sqrt[3]{fmn_0}\left\{\frac{\partial R'}{\partial v}+(1+\nu)\frac{\partial R'}{\partial u^*}\right\}.$$

Интегрируя это уравнение и замечая, что без потери точности можно принять

$$fm=n_0^2a_0^3,$$

мы получим

$$\frac{\delta n_0}{n_0^{(0)}}=-3a_0R'+3a_0c_1, \tag{5.7.8}$$

где $c_1$ — постоянная интегрирования.

При помощи легко проверяемого равенства

$$3a_0J_0R'+J_0\frac{p_0}{e_0}\frac{\partial R'}{\partial e_0}+\frac{p_0}{e_0}\frac{\partial J_0}{\partial e_0}R'=\frac{p_0}{e_0}(1-e_0^2)^{3/2}\frac{\partial F'}{\partial e_0}$$

и формулы (5.7.8) уравнение (5.7.7) приводится к виду

$$\frac{d(n_0^{(0)}\delta t)}{dv}=-3a_0c_1J_0+\frac{\partial J_0}{\partial e_0}\delta e-$$
$$-\frac{p_0}{e_0}\frac{\partial J_0}{\partial e_0}R'+\frac{p_0}{e_0}(1-e_0^2)^{3/2}\frac{\partial F'}{\partial e_0}+J_0\frac{p_0}{e_0}\frac{\partial \Phi'}{\partial u^*}. \tag{5.7.9}$$

Преобразуем полученное уравнение. Для этого введем функцию

$$L = \int \frac{\partial J_0}{\partial e_0}\, dv = -\frac{\sqrt{1-e_0^2}\,(2+e_0\cos v)\sin v}{(1+e_0\cos v)^2} \qquad (5.7.10)$$

и положим

$$X = -L\frac{d\delta e}{dv} - \frac{p_0}{e_0}\frac{\partial J_0}{\partial e_0}R' + \frac{p_0}{e_0}J_0\frac{\partial \Phi'}{\partial u^*}. \qquad (5.7.11)$$

Тогда (5.7.9) примет вид

$$\frac{d(n_0^{(0)}\delta t)}{dv} = -3a_0c_1J_0 + \frac{p_0}{e_0}(1-e_0^2)^{3/2}\frac{\partial F'}{\partial e_0} + \frac{d}{dv}(L\delta e) + X. \qquad (5.7.12)$$

Покажем, наконец, что в уравнении (5.7.12) величиной $X$ можно пренебречь. Подставляя в (5.7.11) второе уравнение (5.6.1) и заменяя $\frac{\partial J_0}{\partial e_0}$ на $\frac{dL}{dv}$, мы найдем

$$X = -\frac{p_0}{e_0}\left(L\frac{\partial R'}{\partial v} + L\frac{\partial R'}{\partial u^*} + R'\frac{dL}{dv}\right),$$

где члены выше второго порядка малости опущены. Так как $L$ не зависит от $u^*$, можно написать

$$X = -\frac{p_0}{e_0}\left\{\frac{\partial(LR')}{\partial v} + \frac{\partial(LR')}{\partial u^*}\right\},$$

или

$$X = -\frac{p_0}{e_0}\sqrt{1-e_0^2}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v} + \frac{\partial \Phi'}{\partial u^*}\right),$$

а это равенство показывает, что среди членов второго порядка $X$ содержит только короткопериодические члены, которые при интегрировании уравнения (5.7.12) дадут члены второго порядка, а этими членами мы пренебрегаем.

Выберем теперь постоянную $c_1$ так, чтобы свободный член в правой части (5.7.12) был равен нулю. Тогда

$$c_1 = \frac{(1-e_0^2)^{3/2}}{3a_0e_0}\frac{\partial F_0}{\partial e_0},$$

где $F_0$ дается формулой (5.5.6).

Отбрасывая в (5.7.12) короткопериодические члены второго порядка, мы приходим окончательно к следующе-

му уравнению:

$$\frac{d\,(n_0^{(0)}\delta t)}{dv} = \frac{p_0}{e_0}\,(1-e_0^2)^{3/2}\,\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial e_0} + \frac{d}{dv}\,(L\,\delta e), \qquad (5.7.13)$$

где

$$\widetilde{F} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos k\omega^*, \qquad (5.7.14)$$

причем $F_k$ определяются равенствами (5.5.8) и (5.5.11).

Интегрируя (5.7.13) и подставляя полученный результат в равенство (5.7.6), будем иметь

$$n_0^{(0)}\,(t-t_0) + M_0 = \Psi_0\,(v) + \frac{p_0\,(1-e_0^2)^{3/2}}{e_0}\int \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial e_0}\,dv + L\,\delta e, \qquad (5.7.15)$$

где

$$\Psi_0\,(v) = \int J_0\,dv, \qquad (5.7.16)$$

а $M_0$ — произвольная постоянная.

## § 5.8. Возмущения элемента $M$

Пусть $v'$ есть $v$ в промежуточном движении. Тогда на основании (5.7.15) $v'$ будет удовлетворять уравнению

$$n_0^{(0)}\,(t-t_0) + M_0 = \Psi_0\,(v'), \qquad (5.8.1)$$

где $\Psi_0\,(v')$ определяется формулой (5.7.16).

Обозначим далее через $\delta v$ возмущение переменной $v$, т. е. положим

$$v = v' + \delta v.$$

Тогда из уравнения (5.7.15) следует

$$n_0^{(0)}\,(t-t_0) + M_0 =$$

$$= \Psi_0\,(v') + \frac{d\Psi_0}{dv'}\,\delta v + L\delta e + \frac{p_0\,(1-e_0^2)^{3/2}}{e_0}\int \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial e_0}\,dv'. \qquad (5.8.2)$$

Но согласно (5.7.3) и (5.7.16)

$$\frac{d\Psi_0}{dv'} = J_0\,(v') = \frac{(1-e_0^2)^{3/2}}{(1+e_0\cos v')^2} + O\,(\varepsilon^2),$$

Поэтому

$$\delta v = \frac{(1+e_0\cos v')^2}{(1-e_0^2)^{3/2}}\left[L\delta e + \frac{p_0(1-e_0^2)^{3/2}}{e_0}\int\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial e_0}dv'\right]. \quad (5.8.3)$$

Подставляя сюда вместо $L$ и $\widetilde{F}$ их выражения из (5.7.10) и (5.7.14), мы окончательно получаем

$$\delta v = \frac{(2+e_0\cos v')\sin v'}{1-e_0^2}\delta e - \frac{(1+e_0\cos v')^2}{\nu' e_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{\partial F_k}{\partial e_0}\sin kg'. \quad (5.8.4)$$

Уравнение (5.8.4) дает возможность легко вывести формулу для возмущения элемента $M$. Действительно, так как в промежуточном движении переменные $\psi$ и $v$, как это следует из (3.17.8), отличаются друг от друга периодическими членами порядка $\varepsilon^2$, а $\delta\psi = \delta v$, то в (5.8.4) можно заменить $v'$ на $\psi$. Тогда, используя равенства (4.13.11) и (4.13.12), находим

$$\delta M = -\frac{(1-e_0^2)^{3/2}}{\nu' e_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{\partial F_k}{\partial e_0}\sin kg'. \quad (5.8.5)$$

Здесь $F_k$ даются равенствами (5.5.8) и (5.5.11).

## § 5.9. Сводка формул для возмущений

Приведем окончательные формулы для возмущений элементов промежуточной орбиты. Поскольку $v$ отличается от $\psi$ только периодическими членами порядка $\varepsilon^2$ и $\delta s = \alpha_0\delta i$, то с принятой точностью мы можем представить формулы (5.6.2), (5.6.7), (5.6.11) и (5.5.13) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0, & M &= n_0^{(0)}(t-t_0) + M_0 + \delta M,\\ e &= e_0 + \delta e, & \Omega &= \mu'\psi + \Omega_0 + \delta\Omega,\\ i &= i_0 + \delta i, & \omega &= \nu'\psi + \omega_0 + \delta\omega. \end{aligned}\right\} \quad (5.9.1)$$

Здесь $a_0$, $e_0$, $i_0$, $M_0$, $\Omega_0$ и $\omega_0$ — постоянные, $\delta e$, $\delta i$, $\delta M$, $\delta\Omega$ и $\delta\omega$ — периодические возмущения; величины $\mu'$ и $\nu'$ даются формулами

$$\mu' = \mu + \Delta\mu,\ \nu' = \nu + \Delta\nu,$$

где $\Delta\mu$ и $\Delta\nu$ — коэффициенты вековых неравенств, а $\mu$, $\nu$ и $n_0^{(0)}$ определяются по формулам промежуточного движения, в которых $a$, $e$ и $i$ заменены соответственно на $a_0$, $e_0$ и $i_0$.

Согласно (5.6.6) и (5.5.6), (5.5.5) для коэффициентов вековых неравенств мы имеем следующие формулы:

$$\Delta\nu = \frac{1}{e_0} C_0 - \frac{\alpha_0^2}{s_0} B_0, \quad \Delta\mu = \frac{\alpha_0}{s_0} B_0, \tag{5.9.2}$$

где

$$C_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{2n} L_{2n}^{(0)} \frac{dM_{2n+1}^{(0)}}{de_0}, \tag{5.9.3}$$

$$B_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{2n} M_{2n-1}^{(0)} \frac{dL_{2n}^{(0)}}{ds_0}, \tag{5.9.4}$$

причем

$$\gamma_k = j_k \left(\frac{r_0}{p_0}\right)^k. \tag{5.9.5}$$

Заметим, что в этих, а также в последующих формулах величины $M_n^{(k)}$ и $L_n^{(k)}$ и производные от них должны быть вычислены при $e = e_0$ и $s = s_0$.

Приведем теперь формулы для периодических возмущений. На основании § 5.6 и 5.5 они имеют следующий вид:

$$\delta e = -\frac{1-e_0^2}{\nu' e_0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kg', \tag{5.9.6}$$

$$\delta i = \frac{\alpha_0}{\nu' s_0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kg', \tag{5.9.7}$$

$$\delta\Omega = \frac{\alpha_0}{\nu' s_0 (4-5s_0^2)} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kg', \tag{5.9.8}$$

$$\delta\omega = -\alpha_0 \delta\Omega + \frac{1}{\nu' e_0} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kg', \tag{5.9.9}$$

$$\delta M = -\frac{(1-e_0^2)^{3/2}}{\nu' e_0} \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin kg', \tag{5.9.10}$$

где коэффициенты $a_k$, $b_k$, $c_k$, $d_k$ в случае четных индексов определяются формулами

$$a_{2m} = 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_{2n} M_{2n-1}^{(2m)} L_{2n}^{(2m)}, \tag{5.9.11}$$

$$b_{2m} = \frac{1}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_{2n} M_{2n-1}^{(2m)} R_{2n}^{(2m)}, \tag{5.9.12}$$

$$c_{2m} = \frac{1}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_{2n} L_{2n}^{(2m)} Q_{2n-1}^{(2m)}, \tag{5.9.13}$$

$$d_{2m} = \frac{1}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_{2n} L_{2n}^{(2m)} \frac{dM_{2n-1}^{(2m)}}{de_0}, \tag{5.9.14}$$

а в случае нечетных индексов — формулами

$$a_{2m+1} = 2 \sum_{n=m+2}^{\infty} \gamma_{2n+1} M_{2n}^{(2m+1)} L_{2n+1}^{(2m+1)}, \tag{5.9.15}$$

$$b_{2m+1} = \frac{2}{2m+1} \sum_{n=m+2}^{\infty} \gamma_{2n+1} M_{2n}^{(2m+1)} R_{2n+1}^{(2m+1)}, \tag{5.9.16}$$

$$c_{2m+1} = \frac{2}{2m+1} \sum_{n=m+2}^{\infty} \gamma_{2n+1} L_{2n+1}^{(2m+1)} Q_{2n}^{(2m+1)}, \tag{5.9.17}$$

$$d_{2m+1} = \frac{2}{2m+1} \sum_{n=m+2}^{\infty} \gamma_{2n+1} L_{2n+1}^{(2m+1)} \frac{dM_{2n}^{(2m+1)}}{de_0}, \tag{5.9.18}$$

причем, если принять во внимание (5.3.4), то

$$R_n^{(k)} = (4 - 5s_0^2) \frac{dL_n^{(k)}}{ds_0} + 10 s_0 L_n^{(k)}, \tag{5.9.19}$$

$$Q_n^{(k)} = (1 - e_0^2) \frac{dM_n^{(k)}}{de_0} + e_0 (2n - 3) M_n^{(k)}. \tag{5.9.20}$$

Переменная $g'$ определяется формулой (5.6.9). Заменяя в ней $v$ на $\psi$, будем иметь

$$g' = \nu' \psi + \omega_0^*, \tag{5.9.21}$$

где

$$\omega_0^* = \omega_0 - \frac{\pi}{2}. \tag{5.9.22}$$

Но так как $\psi$ отличается от

$$M' = n\,(t - t_0) + M_0$$

лишь периодическими членами, то без потери точности можем считать, что

$$g' = n'\,(t - t_0) + g_0', \tag{5.9.23}$$

где

$$n' = n_0^{(0)}\nu', \quad g_0' = \omega_0 + \nu' M_0 - \frac{\pi}{2}. \tag{5.9.24}$$

Таким образом, полученные в этом параграфе формулы позволяют вычислять долгопериодические возмущения без предварительного вычисления $v$ или $\psi$.

## § 5.10. Возмущения от гармоники $m$-го порядка

В предыдущем параграфе были приведены формулы, которые дают возмущения от всех зональных гармоник. Однако полезно также иметь формулы, дающие возмущения от одной гармоники произвольного порядка $m$.

Рассмотрим сначала случай четной гармоники ($m = 2n$). Тогда из формул § 5.9 легко находим:

$$\left.\begin{aligned}
\delta e &= -\frac{\gamma_{2n}}{\nu' e_0}(1-e_0^2)\sum_{k=1}^{n-1} 2M_{2n-1}^{(2k)}L_{2n}^{(2k)}\cos 2kg',\\
\delta i &= \frac{\gamma_{2n}}{\nu' s_0}\alpha_0\sum_{k=1}^{n-1} 2M_{2n-1}^{(2k)}L_{2n}^{(2k)}\cos 2kg',\\
\delta\Omega &= \frac{\gamma_{2n}}{\nu' s_0}\frac{\alpha_0}{4-5s_0^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}M_{2n-1}^{(2k)}R_{2n}^{(2k)}\sin 2kg',\\
\delta\omega &= -\alpha_0\delta\Omega + \frac{\gamma_{2n}}{\nu' e_0}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}L_{2n}^{(2k)}Q_{2n-1}^{(2k)}\sin 2kg',\\
\delta M &= -\frac{\gamma_{2n}}{\nu' e_0}(1-e_0^2)^{3/2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}L_{2n}^{(2k)}\frac{dM_{2n-1}^{(2k)}}{de_0}\sin 2kg'.
\end{aligned}\right\} \tag{5.10.1}$$

При нечетном $m$ будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\delta e &= -\frac{\gamma_{2n+1}}{\nu' e_0}(1-e_0^2)\times \\
&\qquad \times \sum_{k=0}^{n-1} 2M_{2n}^{(2k+1)} L_{2n+1}^{(2k+1)} \cos(2k+1)g', \\
\delta i &= \frac{\gamma_{2n+1}}{\nu' s_0}\alpha_0 \sum_{k=0}^{n-1} 2M_{2n}^{(2k+1)} L_{2n+1}^{(2k+1)} \cos(2k+1)g', \\
\delta\Omega &= \frac{\gamma_{2n+1}}{\nu' s_0}\frac{\alpha_0}{4-5s_0^2}\times \\
&\qquad \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1} M_{2n}^{(2k+1)} R_{2n+1}^{(2k+1)} \sin(2k+1)g', \\
\delta\omega &= -\alpha_0\delta\Omega + \frac{\gamma_{2n+1}}{\nu' e_0}\times \\
&\qquad \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1} L_{2n+1}^{(2k+1)} Q_{2n}^{(2k+1)} \sin(2k+1)g', \\
\delta M &= -\frac{\gamma_{2n+1}}{\nu' e_0}(1-e_0^2)^{3/2}\times \\
&\qquad \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1} L_{2n+1}^{(2k+1)} \frac{dM_{2n}^{(2k+1)}}{de_0} \sin(2k+1)g'.
\end{aligned}\right\} \quad (5.10.2)$$

Коэффициенты $\Delta\nu$ и $\Delta\mu$ при вековых возмущениях элементов $\omega$ и $\Omega$, вызываемых гармоникой порядка $2n$, будут определяться формулами

$$\Delta\nu = \gamma_{2n}\left[\frac{1}{e_0} L_{2n}^{(0)} \frac{dM_{2n+1}^{(0)}}{de_0} - \frac{\alpha_0^2}{s_0} M_{2n-1}^{(0)} \frac{dL_{2n}^{(0)}}{ds_0}\right],$$

$$\Delta\mu = \gamma_{2n}\frac{\alpha_0}{s_0} M_{2n-1}^{(0)} \frac{dL_{2n}^{(0)}}{ds_0}.$$

Из формул (5.9.2)—(5.9.4) следует, что гармоники нечетного порядка не вызывают вековых возмущений.

## § 5.11. Влияние третьей гармоники

В полученных выше формулах для возмущений элементов отсутствуют члены, обусловленные третьей гармоникой геопотенциала, поскольку ее влияние учитывается

(посредством параметра σ) формулами промежуточного движения.

Рассмотрим, однако, симметричную промежуточную орбиту, которая получается из несимметричной при $\sigma = 0$. В этом случае промежуточный потенциал будет содержать только четные гармоники, а возмущающая функция $R$ помимо членов, даваемых формулой (5.1.1), будет включать в себя третью гармонику. Явные выражения для возмущений элементов симметричной орбиты можно получить из общих формул (5.10.2). Они оказываются такими:

$$\left.\begin{aligned}
\delta e &= \frac{3}{8}\frac{\gamma_3}{\nu}(1-e^2)\,s\,(4-5s^2)\cos g',\\
\delta i &= -\frac{3}{8}\frac{\gamma_3}{\nu}e\alpha\,(4-5s^2)\cos g',\\
\delta\Omega &= -\frac{3}{8}\frac{\gamma_3}{\nu}e\frac{\alpha}{s}\,(4-5s^2)\sin g',\\
\delta\omega &= -\alpha\delta\Omega-\frac{3}{8}\frac{\gamma_3}{\nu}\frac{1}{e}s\,(4-5s^2)\sin g',\\
\delta M &= \frac{3}{8}\frac{\gamma_3}{\nu}\frac{(1-e^2)^{3/2}}{e}\,s\,(4-5s^2)\sin g',
\end{aligned}\right\} \qquad (5.11.1)$$

где

$$\gamma_3 = -J_3\left(\frac{r_0}{p_0}\right)^3, \qquad \nu = \frac{3}{4}\varepsilon^2(4-5s^2). \qquad (5.11.2)$$

Здесь значок «0» у величин $e$, $s$, $\alpha$ опущен.

Таким образом, влияние третьей гармоники можно учесть двумя способами: либо посредством промежуточной орбиты (тогда возмущения элементов не будут содержать членов с $J_3$) либо посредством возмущений элементов (тогда в формулах промежуточной орбиты нужно положить $\sigma = 0$).

Заметим, что хотя формулы (5.11.1) и (5.11.2) могут быть полезны в некоторых случаях, первый способ является более точным. Действительно, промежуточная орбита учитывает все члены до второго порядка включительно, а формулы (5.11.1)— только члены первого порядка малости.

В заключение отметим один любопытный факт. Рассмотрим элемент $q = a\,(1-e)$, который аналогичен перигейному расстоянию. Из (5.11.1) и (5.11.2) для возмущений

этого элемента находим

$$\delta q = \frac{1}{2} J_3 \left(\frac{r_0}{c}\right)^2 r_0 \sin i_0 \cos g'.$$

Эта формула показывает, что амплитуда долгопериодического возмущения перигейного расстояния не зависит от большой полуоси орбиты спутника и равна примерно $7{,}5 \sin i_0$ *км*. Она одна и та же как для близких спутников, так и для спутников весьма далеких.

## § 5.12. Возмущения от гармоник четвертого и пятого порядков

Приведем явные выражения для возмущений элементов, вызываемых четвертой и пятой зональными гармониками. Для этого воспользуемся выражениями для $L_n^{(k)}(s)$ и $M_n^{(k)}(e)$, приведенными в Приложении.

Возмущения от четвертой гармоники. Коэффициенты вековых возмущений $\Delta\mu$ и $\Delta\nu$ определяются формулами

$$\Delta\mu = -\frac{15}{32}\gamma_4\alpha(2+3e^2)(4-7s^2),$$

$$\Delta\nu = -\alpha\Delta\mu + \frac{15}{128}\gamma_4(4+3e^2)(8-40s^2+35s^4),$$

где

$$\gamma_4 = j_4\left(\frac{r_0}{p}\right)^4.$$

Формулы для долгопериодических возмущений имеют вид

$$\delta e = \frac{15}{64}\frac{\gamma_4}{\nu} e(1-e^2)s^2(6-7s^2)\cos 2g',$$

$$\delta i = -\frac{15}{64}\frac{\gamma_4}{\nu} e^2\alpha s(6-7s^2)\cos 2g',$$

$$\delta\Omega = -\frac{15}{64}\frac{\gamma_4}{\nu k} e^2\alpha(24-56s^2+35s^4)\sin 2g',$$

$$\delta\omega = -\alpha\,\delta\Omega - \frac{15}{128}\frac{\gamma_4}{\nu}(2+e^2)s^2(6-7s^2)\sin 2g',$$

$$\delta M = \frac{15}{64}\frac{\gamma_4}{\nu}(1-e^2)^{3/2}s^2(6-7s^2)\sin 2g',$$

где можно считать, что $\nu = \frac{3}{4}\varepsilon^2 k$, причем

$$k = 4 - 5s^2,$$

а $g'$ определяется равенством (5.9.23). Здесь значок «0» у величин $e$, $\alpha$ и $s$ опущен.

Возмущения от пятой гармоники. Вековые возмущения в этом случае равны нулю, а долгопериодические даются формулами:

$$\delta e = -\frac{15}{128}\frac{\gamma_5}{\nu}(1-e^2)(4+3e^2)\,s\,(8-28s^2+21s^4)\cos g' + \\ +\frac{35}{256}\frac{\gamma_5}{\nu}e^2(1-e^2)\,s^3(8-9s^2)\cos 3g',$$

$$\delta i = \frac{15}{128}\frac{\gamma_5}{\nu}e\,(4+3e^2)\,\alpha\,(8-28s^2+21s^4)\cos g' - \\ -\frac{35}{256}\frac{\gamma_5}{\nu}e^3\alpha s^2(8-9s^2)\cos 3g',$$

$$d\Omega = \frac{15}{128}\frac{\gamma_5}{\nu k}e\,(4+3e^2)\,\frac{\alpha}{s}\,(32-296s^2+560s^4-315s^6)\sin g' - \\ -\frac{35}{768}\frac{\gamma_5}{\nu k}e^3\alpha s\,(96-220s^2+135s^4)\sin 3g',$$

$$\delta\omega = -\alpha\delta\Omega + \frac{15}{128}\frac{\gamma_5}{\nu}\frac{1}{e}(4+25e^2+ \\ +6e^4)\,s\,(8-28s^2+21s^4)\sin g' - \\ -\frac{35}{768}\frac{\gamma_5}{\nu}e\,(3+2e^2)\,s^3(8-9s^2)\sin 3g',$$

$$\delta M = -\frac{15}{128}\frac{\gamma_5}{\nu}\frac{(1-e^2)^{3/2}}{e}(4+9e^2)\,s\,(8-28s^2+21s^4)\sin g' + \\ +\frac{35}{256}\frac{\gamma_5}{\nu}e\,(1-e^2)^{3/2}\,s^3(8-9s^2)\sin 3g',$$

где

$$\gamma_5 = j_5\left(\frac{r_0}{p}\right)^5.$$

Подобным образом можно расписать выражения для возмущений от других гармоник. Такие выражения для гармоник до восьмого порядка включительно содержатся в работе [1].

## § 5.13. Вековые возмущения

Вековые возмущения играют важную роль в эволюции орбиты спутника, а выявление их из наблюдений дает чрезвычайно ценную информацию о структуре гравитационного поля Земли. Поэтому представляется целесообразным остановиться на них подробнее.

Пусть

$$n' = n'_0 + \Delta n', \quad n'' = n''_0 + \Delta n''$$

суть среднесуточные изменения элементов $\omega$ и $\Omega$ и пусть $n'_0$ и $n''_0$ — среднесуточные изменения этих элементов в промежуточном движении, а $\Delta n'$ и $\Delta n''$ — поправки к ним, обусловленные возмущающей функцией (5.1.1). Тогда на основании § 5.10 будем иметь

$$\Delta n' = \sum_{n=2}^{\infty} \dot{\omega}_{2k}, \quad \Delta n'' = \sum_{n=2}^{\infty} \dot{\Omega}_{2k}, \tag{5.13.1}$$

где величины $\dot{\Omega}_{2k}$ и $\dot{\omega}_{2k}$ представляют собой коэффициенты вековых возмущений от гармоники порядка $2k$. Они даются следующими формулами:

$$\dot{\Omega}_{2k} = \frac{n_0 \alpha_0}{s_0} \gamma_{2k} M_{2k-1} L'_{2k}, \tag{5.13.2}$$

$$\dot{\omega}_{2k} = -\alpha_0 \dot{\Omega}_{2k} + \frac{n_0}{e_0} \gamma_{2k} M'_{2k+1} L_{2k}. \tag{5.13.3}$$

Здесь $n_0$ — среднесуточное аномалистическое движение,

$$\gamma_{2k} = j_{2k} \left(\frac{r_0}{p_0}\right)^{2k}, \tag{5.13.4}$$

причем

$$p_0 = a_0 (1 - e_0^2), \quad \alpha_0 = \cos i_0, \quad s_0 = \sin i_0,$$
$$M_n = M_n^{(0)}(e_0), \quad L_n = L_n^{(0)}(s_0).$$

Для вычисления $M_n$ можно воспользоваться рекуррентной формулой

$$nM_n = (2n-1) M_{n-1} - (n-1)(1 - e_0^2) M_{n-2},$$

принимая за исходные данные

$$M_1 = 1, \quad M_2 = \frac{1}{2}(2 + e_0^2).$$

Производная $M'_n$ может быть вычислена по формуле

$$M'_n = \frac{n}{e_0}(M_n - M_{n-1}).$$

Функции $L_n(s_0)$ можно вычислять двумя способами. Во-первых, их можно выразить через полиномы Лежандра:

$$L_{2n}(s_0) = P_{2n}(0) P_{2n}(\alpha_0). \qquad (5.13.5)$$

Во-вторых, можно воспользоваться следующим рекуррентным соотношением:

$$(2n-1)(n+2)^2 L_{n+2} = s_0^2 (2n-1)(2n+3) L_n - \\ - 2(2n+1)(n^2+n-1) L_n - (2n+3)(n-1)^2 L_{n-2},$$

а за начальные данные принять

$$L_0 = 1, \quad L_2 = -\frac{1}{4}(2 - 3s_0^2).$$

Тогда производная $L'_n$ найдется по формуле

$$(2n-1) s_0 (1-s_0^2) L'_n = \\ = (n-1)^2 L_{n-2} + [n(n-1)(1-s^2) - n^2 s^2] L_n.$$

Приведенные формулы позволяют весьма быстро вычислять возмущения от любого числа гармоник.

Рассмотрим теперь численные значения вековых возмущений на примере пяти спутников, элементы которых даны в табл. 6 § 3.16. Результаты вычислений для этих спутников приведены в табл. 9. Они дают суточные изменения элементов ω и Ω от всех гармоник с четвертой до двадцатой включительно.

Таблица 9

**Среднесуточные изменения элементов ω и Ω**

| $N$ | $\Delta n'$ | $\Delta n''$ |
|---|---|---|
| 1 | −0°,00084 | −0°,00093 |
| 2 | 0,00021 | −0,00098 |
| 3 | 0,00015 | −0,00046 |
| 4 | 0,00013 | 0,00030 |
| 5 | −0,00003 | 0,00014 |

Эта таблица показывает, что вклад зональных гармоник в суточные изменения элементов ω и Ω составляет несколько десятитысячных долей градуса. Нужно заметить, что результаты вычислений очень чувствительны к тому, какое число гармоник мы принимаем во внимание.

Влияние различных гармоник на изменение элементов ω и Ω показано в табл. 10.

Таблица 10

**Значения $\dot{\omega}_{2n}$ и $\dot{\Omega}_{2n}$**

| $2n$ | $\dot{\omega}_{2n}$ | $\dot{\Omega}_{2n}$ | $2n$ | $\dot{\omega}_{2n}$ | $\dot{\Omega}_{2n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0°,00221 | —0°,00217 | 14 | —0°,00032 | 0°,00003 |
| 6 | —0,00130 | —0,00100 | 16 | —0,00040 | 0,00019 |
| 8 | —0,00074 | 0,00013 | 18 | 0,00030 | 0,00015 |
| 10 | 0,00111 | —0,00077 | 20 | —0,00014 | 0,00000 |
| 12 | 0,00009 | 0,00005 | | | |

В ней приведены вековые неравенства для спутника с элементами

$$a = 7509{,}9\ км,\quad e = 0{,}086211,\quad i = 28°{,}8039,$$

вызываемые различными гармониками от четвертого до двадцатого порядка.

## § 5.14. Случай малых $e$

Полученные в этой главе формулы для долгопериодических возмущений имеют особенность при $e_0 = 0$. Поскольку случай малых $e$ представляет большой интерес для практики, мы преобразуем эти формулы к такому виду, чтобы они не содержали $e_0$ в знаменателях. В общем случае это можно сделать, если ввести вместо $M_n^{(k)}(e)$ коэффициенты $\widetilde{M}_n^{(k)}(e)$:

$$\widetilde{M}_n^{(k)} = \frac{1}{e} M_n^{(k)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и рассмотреть некоторые модификации элементов. Однако, имея в виду очень малые $e$, мы ограничимся рассмотрением тех случаев, когда в возмущениях можно отбросить члены с $e^2$.

Прежде всего найдем явные выражения для коэффициентов $M_n^{(k)}(e)$. Так как $M_n^{(k)}(e)$ имеют порядок $e^k$, то с точностью до $e^2$ включительно все нужные нам коэффициенты определятся формулами

$$M_n^{(0)} = 1 + \frac{n(n-1)}{4} e^2, \qquad (15.14.1)$$

$$M_n^{(1)} = \frac{ne}{2}, \quad M_n^{(2)} = \frac{n(n-1)}{8} e^2, \qquad (15.14.2)$$

которые легко находятся путем непосредственного вычисления интегралов (5.2.1).

Подставим (5.14.1) и (5.14.2) в формулы (5.9.6)—(5.9.18). Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \delta e &= A_1 \cos g' + A_2 \cos 2g', \\ \delta i &= B_1 \cos g', \\ \delta\Omega &= C_1 \sin g', \\ e_0\delta\omega &= -A_1 \sin g' - A_2 \sin 2g', \\ e_0\delta M &= A_1 \sin g' + A_2 \sin 2g', \\ \delta\omega + \delta M &= D_1 \sin g', \end{aligned}\right\} \qquad (5.14.3)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2}{\nu}\sum_{n=2}^{\infty} n\gamma_{2n+1}L_{2n+1}^{(1)}, \\ A_2 &= -\frac{e}{2\nu}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(2n-1)\gamma_{2n}L_{2n}^{(2)}, \\ B_1 &= -\frac{e\alpha}{s}A_1, \\ C_1 &= \frac{2e\alpha}{\nu s(4-5s^2)}\sum_{n=2}^{\infty} n\gamma_{2n+1}R_{2n+1}^{(1)}, \\ D_1 &= -\alpha C_1 + \frac{e}{\nu}\sum_{n=2}^{\infty} n(8n-5)\gamma_{2n+1}L_{2n+1}^{(1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.14.4)$$

где, как и раньше, значок «0» опущен.

Рассмотрим теперь следующую систему элементов:

$$a,\ q_1 = e\sin\omega,\ q_2 = e\cos\omega,\ i,\ \Omega,\ M+\omega.$$

Возмущения элементов $a$, $i$, $\Omega$ и $M+\omega$, как показывают формулы (5.14.3) и (5.14.4), не имеют особенности при $e_0 = 0$. Покажем, что не имеют особенности и возмущения элементов $q_1$ и $q_2$. Действительно,

$$\begin{aligned} \delta q_1 &= \delta e\cos g' - e_0\,\delta\omega\sin g', \\ \delta q_2 &= -\delta e\sin g' + e_0\,\delta\omega\cos g', \end{aligned}$$

где $g'$ дается формулой (5.9.23), а входящие сюда величины $\delta e$ и $e_0\delta\omega$ не содержат $e_0$ в знаменателях.

## § 5.15. Важнейшие долгопериодические неравенства

Для близких искусственных спутников Земли вследствие малости эксцентриситета члены рядов, представляющих долгопериодические возмущения, быстро убывают с возрастанием кратности аргумента $g'$. Поэтому наиболее значительными долгопериодическими неравенствами являются члены, содержащие $\cos g'$ и $\sin g'$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \delta e &= A_e \cos g', \quad \delta\omega = A_\omega \sin g', \\ \delta i &= A_i \cos g', \quad \delta\Omega = A_\Omega \sin g', \end{aligned}\right\} \qquad (5.15.1)$$

и аналогичное неравенство для $M$, где амплитуды $A_e$, $A_i$, $A_\omega$ и $A_\Omega$ легко находятся из формул § 5.9, если положить в них $m = 0$ и $k = 1$.

Возмущения (5.15.1) играют важную роль при определении постоянных гравитационного поля Земли. Именно по этим неравенствам из наблюдений спутников находятся коэффициенты нечетных зональных гармоник геопотенциала.

Рассмотрим численные значения неравенств (5.15.1) на примере пяти спутников, элементы которых даны в табл. 6 § 3.16. Заметим, что определяемые из наблюдений амплитуды $A_e$, $A_i$, $A_\omega$ и $A_\Omega$ обычно включают в себя также влияние третьей гармоники. Поэтому в табл. 11 приведены полученные из наблюдений амплитуды важнейших неравенств, содержащие в себе влияние всех нечетных гармоник, начиная с третьей. Там же даны периоды этих неравенств $T_\omega$.

Таблица 11

**Важнейшие долгопериодические неравенства**

| $N$ | $A_e \cdot 10^3$ | $A_i \cdot 10^2$ | $A_\omega$ | $A_\Omega$ | $T_\omega$ (сутки) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,43 | —0°,70 | —0°,106 | —0°,018 | 82 |
| 2 | 0,546 | —0,761 | —0,1117 | —0,0176 | 181 |
| 3 | 0,521 | —0,867 | —0,0966 | —0,0246 | 298 |
| 4 | 0,250 | —0,004 | — | —0,0072 | 517 |
| 5 | 0,787 | —0,051 | — | —0,0012 | 369 |

Сравнение теории с наблюдениями показано на рис. 18 и 19. На них для спутников «Эксплорер-11» и «Анна-1 В» показано поведение эксцентриситета в зависимости от аргумента $g$. Теоретические кривые были вычислены на

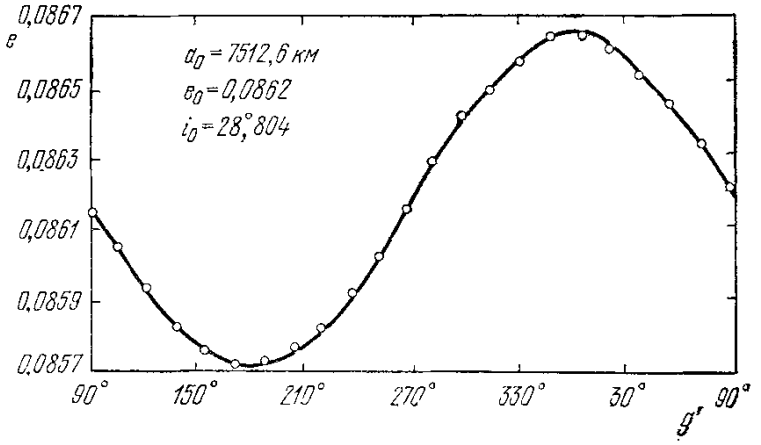


Рис. 18. Изменение эксцентриситета орбиты спутника «Эксплорер-11»».

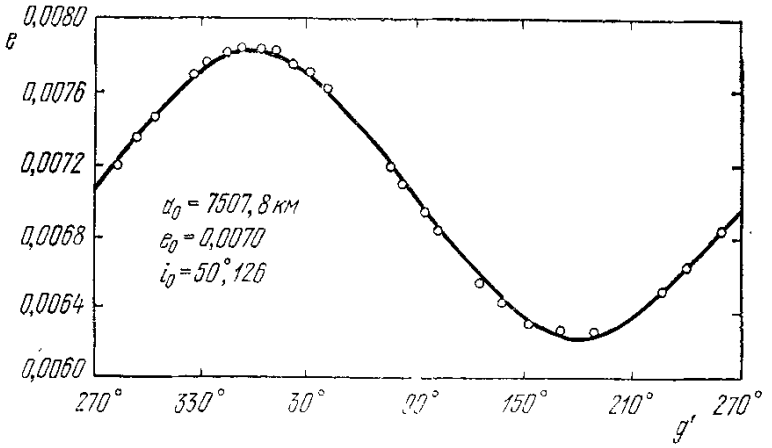


Рис. 19. Изменение эксцентриситета орбиты спутника «Анна-1В».

основе постоянных, соответствующих Стандартной Земле II (см. § 1.8), точки означают результаты наблюдений.

В заключение отметим, что наиболее существенный вклад в долгопериодические неравенства вносит третья гармоника. Это ясно видно из результатов вычислений, приведенных в табл. 12. В ней для спутников «Эксплорер-11» и «Анна-1 В» даны полные амплитуды $A_e$ и $A_\omega$, а также

амплитуды $A'_e$, и $A'_\omega$, освобожденные от влияния третьей гармоники. Поэтому влияние третьей гармоники более целесообразно учитывать формулами промежуточного движения, а не методами теории возмущений.

Таблица 12

**Амплитуды возмущений элементов $e$ и $\omega$**

| | «Эксплорер-11» | «Анна-1 В» |
|---|---|---|
| $A_e$ | $0{,}485 \cdot 10^{-3}$ | $0{,}775 \cdot 10^{-3}$ |
| $A'_e$ | $0{,}015 \cdot 10^{-3}$ | $0{,}010 \cdot 10^{-3}$ |
| $A_\omega$ | $0^\circ{,}328$ | $6^\circ{,}347$ |
| $A'_\omega$ | $0^\circ{,}019$ | $0^\circ{,}084$ |

## § 5.16. Дальнейшее развитие теории

Определению возмущений от зональных гармоник в движении искусственных спутников Земли посвящено большое число работ. Подавляющее большинство из них касается лишь нескольких первых членов потенциала. Из этих работ следует выделить исследования Д. Брауэра [2] и И. Козаи [3], в которых при помощи метода Делоне — Цейпеля были найдены вековые и долгопериодические возмущения от гармоник до восьмого порядка включительно. Сюда же относятся работа В. Ф. Проскурина и Ю. В. Батракова [4] и работа автора [1].

Общие выражения для вековых и долгопериодических возмущений от гармоник произвольного порядка были получены В. Каулой [5], Б. Гарфинкелем [6] и А. А. Орловым [7].

В этой главе была изложена теория на основе работы автора [8]. Используемые в ней функции наклона $L_n^{(k)}(\sin i)$ и эксцентриситета $M_n^{(k)}(e)$ были изучены в статьях [8] и [9]. Несколько другие функции наклона и эксцентриситета рассмотрены Р. Гудингом [10]. Формулы для вековых и долгопериодических возмущений от гармоник произвольного порядка получены также Ю. В. Батраковым [11].

Таким образом, в настоящее время мы имеем довольно полную и достаточно совершенную теорию возмущений от зональных гармоник геопотенциала. Эта теория дает вековые возмущения с точностью до второго порядка и долгопериодические возмущения с точностью до первого порядка включительно относительно $J_2$ (если считать, что все

$J_n$ при $n > 2$ имеют порядок $J_2^2$). Ею можно пользоваться при любых $0 \leqslant e < 1$ и $0° \leqslant i \leqslant 90°$, за исключением малой окрестности критического наклона $i = 63°30'$.

Мы здесь не останавливаемся на проблеме критического наклона. Эта проблема, обусловленная методами решения задачи, связана с тем, что при $i \approx 63°30'$, вековое движение перигея меняет свой знак. Исследованию движения спутника в окрестности критического наклона посвящены работы И. Козаи [12], И. Хагихары [13] и некоторые другие.

Дальнейшее развитие теории, по-видимому, должно идти в двух направлениях. Во-первых, необходимо провести подробное исследование вековых и долгопериодических возмущений в зависимости от основных параметров орбиты: большой полуоси, эксцентриситета и наклона. Подобные исследования имеют непосредственное отношение к задаче определения коэффициентов разложения потенциала притяжения Земли по наблюдениям спутников. Некоторые из этих исследований выполнены в работах И. П. Прохоровой и автора [14] и [15]. Во-вторых, в связи с увеличением точности наблюдений встает задача об определении неравенств более высокого порядка. Речь идет прежде всего о вековых возмущениях третьего порядка и периодических возмущениях второго порядка относительно $J_2$.

В последнее время Л. П. Насонова выполнила очень важную работу по определению вековых возмущений третьего порядка [16]. Она нашла аналитические выражения для вековых возмущений от любой совокупности зональных гармоник с точностью до $e^2$ включительно. Оказалось, что эти неравенства составляют несколько стотысячных долей градуса в сутки. Такие члены необходимо учитывать при обработке современных наблюдений. Недавно Н. А. Сорокин [17] для случая малых эксцентриситетов вывел формулы для определения долгопериодических возмущений второго порядка. Им также найдены аналитические выражения для короткопериодических возмущений [18].

ГЛАВА VI

# ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ТЕССЕРАЛЬНЫХ И СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГАРМОНИК

## § 6.1. Постановка задачи

Согласно (1.12.2) долготная часть потенциала земного притяжения дается следующей формулой:

$$R=\frac{fm}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}J_{nk}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)\cos k(\lambda-\lambda_{nk}), \quad (6.1.1)$$

где $r$ — радиус-вектор, $\varphi$ — геоцентрическая широта, $\lambda$ — долгота, отсчитываемая от гринвичского меридиана, $P_n^{(k)}$ — присоединенная функция Лежандра, $J_{nk}$ и $\lambda_{nk}$ — постоянные, численные значения которых можно найти из табл. 1 § 1.8.

Как и в случае зональных гармоник, в выражении $R$ через элементы $p, e, i, \Omega, u, v$ мы будем пренебрегать периодическими членами, пропорциональными $\varepsilon^2$. Поэтому будем считать, что в формуле (6.1.1) величины $r$, $\sin\varphi$ и $\lambda$ равны

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}, \quad (6.1.2)$$

$$\sin\varphi=\frac{z}{r}=\sin i\sin u, \quad (6.1.3)$$

$$\lambda=w-n_{\oplus}(t-\hat{t}_0), \quad (6.1.4)$$

$$w=\Omega+\operatorname{Arctg}(\cos i\operatorname{tg}u), \quad (6.1.5)$$

где через $n_{\oplus}$ обозначена угловая скорость вращения Земли, а через $\hat{t}_0$ — момент времени, когда гринвичский меридиан проходит через точку весеннего равноденствия.

Посмотрим теперь, как можно выразить функцию $R$ через элементы промежуточного движения. Для этого рассмотрим сначала вторую секториальную гармонику

$$P_2^{(2)}(\sin\varphi)\cos 2(\lambda-\lambda_{22}),$$

для которой при помощи (1.3.2) имеем

$$P_2^{(2)}(\sin\varphi)\cos 2(\lambda-\lambda_{22}) = 3\cos^2\varphi\cos 2(\lambda-\lambda_{22}). \quad (6.1.6)$$

Пусть

$$\hat{w} = \operatorname{Arctg}(\cos i \operatorname{tg} u),$$

$$\Omega_{22} = \Omega - n_\oplus (t - \hat{t}_0) - \lambda_{22}. \quad (6.1.7)$$

Тогда согласно (6.1.4) и (6.1.5)

$$\cos(\lambda-\lambda_{22}) = \cos(\hat{w}+\Omega_{22}).$$

Но поскольку

$$\cos\varphi\cos\hat{w} = \cos u,$$

$$\cos\varphi\sin\hat{w} = \cos i\sin u,$$

то

$$\cos\varphi\cos(\lambda-\lambda_{22}) = \cos u\cos\Omega_{22} - \cos i\sin u\sin\Omega_{22}. \quad (6.1.8)$$

Аналогично находим

$$\cos\varphi\sin(\lambda-\lambda_{22}) = \cos u\sin\Omega_{22} + \cos i\sin u\cos\Omega_{22}. \quad (6.1.9)$$

Подставляя (6.1.8) и (6.1.9) в (6.1.6) и вводя вместо $u$ переменную $u^* = u - 90°$, получим

$$P_2^{(2)}(\sin\varphi)\cos 2(\lambda-\lambda_{22}) = \alpha_{22}^{(1)}\cos 2\Omega_{22} + \\ + \alpha_{22}^{(2)}\cos 2(\Omega_{22}-u^*) + \alpha_{22}^{(3)}\cos 2(\Omega_{22}+u^*), \quad (6.1.10)$$

где

$$\alpha_{22}^{(1)} = \frac{3}{2}s^2, \quad \alpha_{22}^{(2)} = -\frac{3}{4}(1-\alpha)^2; \quad \alpha_{22}^{(3)} = -\frac{3}{4}(1+\alpha)^2, \quad (6.1.11)$$

причем

$$\alpha = \cos i, \quad s = \sin i,$$

а $\Omega_{22}$ определяется формулой (6.1.7).

Для того чтобы можно было воспользоваться уравнениями (4.11.13), нужно из $\Omega_{22}$ исключить время $t$. В промежуточном движении мы, очевидно, имеем

$$M = v - \Psi, \quad (6.1.12)$$

где

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (6.1.13)$$

а $\Psi$, если отбросить периодические члены с $\varepsilon^2$ и $\sigma$, есть уравнение центра, т. е.

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(e) \sin kM.$$

Подставляя в (6.1.7) вместо $t$ его выражение из (6.1.12) и (6.1.13), получим

$$\Omega_{22} = \Omega - \gamma v + \gamma M_0 + n_\oplus (\hat{t}_0 - t_0) - \lambda_{22} + \gamma\Psi, \quad (6.1.14)$$

где

$$\gamma = \frac{n_\oplus}{n} \quad (6.1.15)$$

есть отношение угловой скорости вращения Земли к среднему аномалистическому движению спутника.

Сначала мы рассмотрим лишь случай близких спутников, когда величина $\gamma$ мала. При этом в разложении функции $R$ будем пренебрегать членами, пропорциональными $\gamma$, т. е. членами порядка $\gamma J_{nk}$. Вследствие этого можно считать, что

$$\Omega_{22} = \Omega - \gamma v + \gamma M_0 + n_\oplus (\hat{t}_0 - t_0) - \lambda_{22}, \quad (6.1.16)$$

поскольку $\Psi$ есть периодическая функция $v$.

Вторая секториальная гармоника, как показывает формула (6.1.1), имеет множителем величину $\frac{1}{r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3$. Но при любом целом $n$ на основании § 5.2 мы имеем

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^n = \left(\frac{r_0}{p}\right)^n \left\{ M_n^{(0)} + 2\sum_{k=1}^{n} M_n^{(k)} \cos kv \right\}, \quad (6.1.17)$$

где $M_n^{(k)}$ суть функции $e$, изученные в § 5.2.

Формулы (6.1.10) (6.1.16) и (6.1.17) показывают, что в случае второй секториальной гармоники функция $R$ будет содержать члены вида

$$\frac{J_{22}}{p}\left(\frac{r_0}{p}\right)^2 A_{j,k} \cos(2\Omega_{22} + ju^* + kv), \quad (6.1.18)$$

где $j$ и $k$ — целые числа.

Подобные члены будут содержать и функции $R'$, $F'$ и $\Phi'$, которые входят в правые части уравнений (4.11.13).

Поскольку в промежуточном движении

$$u^* = (1 + \nu)v + \omega_0^*,$$
$$\Omega = \mu v + \Omega_0,$$

где $\omega_0^*$ и $\Omega_0$ — постоянные, то, интегрируя члены вида (6.1.18), мы получим

$$\frac{J_{22}}{p}\left(\frac{r_0}{p}\right)^2 A_{j,k}\frac{\sin(2\Omega_{22}+ju^*+kv)}{j+k+j\nu-2(\gamma-\mu)}. \qquad (6.1.19)$$

Рассмотрим знаменатель выражения (6.1.19), в котором $\nu$ и $\mu$ суть величины порядка $\varepsilon^2$. Он может быть мал в двух случаях:

1) $\gamma$ — мало́ и $j + k = 0$,

2) $2\gamma \approx j + k$.

Очевидно, первый случай соответствует близким спутникам, а второй — спутникам, периоды обращения которых равны $12^h$, $24^h$ и т. д.

Здесь мы ограничимся рассмотрением первого случая. Таким образом, мы будем учитывать только долгопериодические возмущения, для которых $j + k = 0$. Тогда функции $R'$, $F'$ и $\Phi'$ принимают весьма простой вид. Так, например,

$$F' = \frac{J_{22}}{p}\left(\frac{r_0}{p}\right)^2 M_1^{(0)}\alpha_{22}^{(1)}\cos 2\Omega_{22}, \qquad (6.1.20)$$

причем

$$M_1^{(0)} = 1, \quad \alpha_{22}^{(1)} = \frac{3}{2}s^2. \qquad (6.1.21)$$

Амплитуды долгопериодических возмущений будут иметь порядок $\gamma^{-1}J_{22}$. Короткопериодические возмущения, которыми мы пренебрегаем, пропорциональны $J_{22}$.

## § 6.2. Возмущения от второй секториальной гармоники

Будем исходить из дифференциальных уравнений (4.11.13) для элементов промежуточного движения. Пренебрегая в них членами порядка $\varepsilon^2 J_{22}$ и имея в виду, что

$$\frac{\partial R'}{\partial u} + \frac{\partial R'}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial u} = 0,$$

находим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{dv}=0, \quad \frac{de}{dv}=0\\
&\frac{di}{dv}=\frac{p}{s}\left(\alpha\frac{\partial F'}{\partial\omega^*}-\frac{\partial F'}{\partial\Omega}\right),\\
&\frac{d\Omega}{dv}=\mu+\frac{p\alpha}{s}\frac{\partial F'}{\partial s},\\
&\frac{d\omega}{dv}=\nu-\frac{p\alpha^2}{s}\frac{\partial F'}{\partial s}+\frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e}+\frac{\partial\Phi'}{\partial\omega^*}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.1}$$

где

$$\omega^* = u^* - v.$$

Подставим в правые части уравнений (6.2.1) выражение для $F'$ из (6.1.20) и соответствующие выражения для $R'$ и $\Phi'$. Полагая затем в них

$$a = a_0,\ e = e_0,\ i = i_0,$$
$$\omega^* = \nu v + \omega_0^*,\ \Omega = \mu v + \Omega_0$$

и интегрируя, мы получим возмущения элементов $a$, $e$, $i$, $\Omega$ и $\omega$. Возмущение элемента $M$ можно найти, используя тот же метод, что и в случае зональных гармоник. Окончательно имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\delta a=0, \quad \delta e=0,\\
&\delta i=\frac{3}{2}\gamma_{22}s_0\cos 2\Omega_{22},\\
&\delta\Omega=-\frac{3}{2}\gamma_{22}\alpha_0\sin 2\Omega_{22},\\
&\delta\omega=-\alpha_0\,\delta\Omega-\frac{9}{4}\gamma_{22}s_0^2\sin 2\Omega_{22},\\
&\delta M=-\frac{9}{8}\gamma_{22}\frac{2+3e_0^2}{1-e_0^2}s_0^2\sin 2\Omega_{22},
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.2}$$

где

$$\gamma_{22}=\frac{J_{22}}{\gamma}\left(\frac{r_0}{p}\right)^2, \tag{6.2.3}$$

а $\Omega_{22}$ определяется формулой (6.1.14). Заметим, однако, что, без потери точности, мы можем вычислять $\Omega_{22}$ по формуле (6.1.7). А поскольку

$$n_\oplus\,(t-\hat{t}_0) = S$$

есть звездное гринвичское время, то

$$\Omega_{22} = -S - \lambda_{22} + \Omega. \qquad (6.2.4)$$

Приведенные здесь формулы дают только долгопериодические возмущения с периодом, равным примерно половине суток. Амплитуды этих возмущений имеют множитель $\gamma^{-1}$, который для близких спутников равняется $10 \div 15$. Короткопериодические возмущения не содержат этого множителя, и их амплитуды примерно в $10 \div 15$ раз меньше амплитуд долгопериодических возмущений. Долгопериодические возмущения элементов $a$ и $e$ от второй секториальной гармоники равны нулю.

В заключение приведем численные значения амплитуд возмущений для спутника 1959 η, орбита которого характеризуется следующими элементами:

$$a = 8503{,}0 \text{ км}, \quad e = 0{,}1891, \quad i = 33°{,}36.$$

Мы имеем

$$\delta i = 0°{,}00076 \cos 2\Omega_{22},$$
$$\delta\Omega = -0°{,}00115 \sin 2\Omega_{22},$$
$$\delta\omega = 0°{,}00034 \sin 2\Omega_{22}.$$

В этом случае

$$\gamma = 0{,}0875.$$

При вычислениях было принято: $J_{22} = 2{,}32 \cdot 10^{-6}$.

## § 6.3. Возмущения от гармоник третьего порядка

Рассмотрим теперь возмущения от секториальной и тессеральных гармоник третьего порядка. Аналитические выражения этих возмущений могут быть найдены тем же методом, что и в случае второй гармоники.

Элемент $e$. Пусть

$$\gamma_{3m} = \frac{J_{3m}}{\gamma}\left(\frac{r_0}{p_0}\right)^3 \qquad (m = 1, 2, 3), \qquad (6.3.1)$$

$$g' = \nu v + \omega_0^*, \qquad (6.3.2)$$

$$\Omega_{3m} = (\mu - \gamma)\, v - \lambda'_{3m}, \qquad (6.3.3)$$

где

$$\lambda'_{3m} = \lambda_{3m} + n_\oplus (t_0 - \hat{t}_0) - \gamma M_0 - \Omega_0. \qquad (6.3.4)$$

Тогда будем иметь

$$\delta e = \gamma_{31}(1-e_0^2)[A_{31}\sin(g'-\Omega_{31}) + A'_{31}\sin(g'+\Omega_{31})] + \\ + \gamma_{32}(1-e_0^2)[A_{32}\cos(g'-2\Omega_{32}) + A'_{32}\cos(g'+2\Omega_{32})] + \\ + \gamma_{33}(1-e_0^2)[A_{33}\sin(g'-3\Omega_{33}) + A'_{33}\sin(g'+3\Omega_{33})], \quad (6.3.5)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{31} &= \frac{3}{16}(1-\alpha)(1-10\alpha-15\alpha^2), \\ A_{32} &= -\frac{15}{16}s(1-\alpha)(1+3\alpha), \\ A_{33} &= \frac{15}{8}s^2(1-\alpha), \\ A'_{31} &= -\frac{3}{16}(1+\alpha)(1+10\alpha-15\alpha^2), \\ A'_{32} &= \frac{15}{16}s(1+\alpha)(1-3\alpha), \\ A'_{33} &= -\frac{15}{8}s^2(1+\alpha), \end{aligned}\right\} \quad (6.3.6)$$

причем

$$s = \sin i_0, \quad \alpha = \cos i_0.$$

Элемент $i$. Возмущения элемента $i$ определяются следующей формулой:

$$\delta i = \gamma_{31}e_0[B_{31}\sin(g'-\Omega_{31}) + B'_{31}\sin(g'+\Omega_{31})] + \\ + \gamma_{32}e_0[B_{32}\cos(g'-2\Omega_{32}) + B'_{32}\cos(g'+2\Omega_{32})] + \\ + \gamma_{33}e_0[B_{33}\sin(g'-3\Omega_{33}) + B'_{33}\sin(g'+3\Omega_{33})], \quad (6.3.7)$$

где

$$\left.\begin{aligned} B_{31} &= -\frac{3}{16}s(1-10\alpha-15\alpha^2), \\ B_{32} &= \frac{15}{16}(1-\alpha)(1+3\alpha)(2+\alpha), \\ B_{33} &= -\frac{15}{8}s(1-\alpha)(3+\alpha), \\ B'_{31} &= -\frac{3}{16}s(1+10\alpha-15\alpha^2), \\ B'_{32} &= \frac{15}{16}(1+\alpha)(1-3\alpha)(2-\alpha), \\ B'_{33} &= -\frac{15}{8}s(1+\alpha)(3-\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (6.3.8)$$

Элемент $\Omega$. Для $\delta\Omega$ имеем такую формулу:

$$\begin{aligned}\delta\Omega = {} & \gamma_{31}e_0[C_{31}\cos(g'-\Omega_{31}) + C'_{31}\cos(g'+\Omega_{31})] + \\ & + \gamma_{32}e_0[C_{32}\sin(g'-2\Omega_{32}) + C'_{32}\sin(g'+2\Omega_{32})] + \\ & + \gamma_{33}e_0[C_{33}\cos(g'-3\Omega_{33}) + C'_{33}\cos(g'+3\Omega_{33})],\end{aligned} \quad (6.3.9)$$

где

$$\left.\begin{aligned} C_{31} &= \frac{3}{16}(11+10\alpha-45\alpha^2), \\ C_{32} &= -\frac{15}{16}\frac{1}{s}(2-7\alpha-4\alpha^2+9\alpha^3), \\ C_{33} &= \frac{15}{8}(1-\alpha)(1+3\alpha), \\ C'_{31} &= \frac{3}{16}(11-10\alpha-45\alpha^2), \\ C'_{32} &= -\frac{15}{16}\frac{1}{s}(2+7\alpha-4\alpha^2-9\alpha^3), \\ C'_{33} &= \frac{15}{8}\frac{1}{s}(1+\alpha)(1-3\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (6.3.10)$$

Элемент $\omega$. Возмущения этого элемента даются такой формулой:

$$\begin{aligned} e_0\delta\omega = {} & -e_0\alpha\delta\Omega + \\ & + \gamma_{31}(1+4e_0^2)[A_{31}\cos(g'-\Omega_{31}) + A'_{31}\cos(g'+\Omega_{31})] - \\ & - \gamma_{32}(1+4e_0^2)[A_{32}\sin(g'-2\Omega_{32}) + A'_{32}\sin(g'+2\Omega_{32})] + \\ & + \gamma_{33}(1+4e_0^2)[A_{33}\cos(g'-3\Omega_{33}) + A'_{33}\cos(g'+3\Omega_{33})], \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

где коэффициенты $A_{jk}$ определяются равенствами (6.3.6).

Элемент $M$. Формула для $\delta M$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} e_0\delta M = {} & -\gamma_{31}q_1[A_{31}\cos(g'-\Omega_{31}) + A'_{31}\cos(g'+\Omega_{31})] + \\ & + \gamma_{32}q_1[A_{32}\sin(g'-2\Omega_{32}) + A'_{32}\sin(g'+2\Omega_{32})] - \\ & - \gamma_{33}q_1[A_{33}\cos(g'-3\Omega_{33}) + A'_{33}\cos(g'+3\Omega_{33})], \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

где, если отбросить член с $e_0^4$,

$$q_1 = 1 - \frac{15}{2}e_0^2. \quad (6.3.13)$$

Э л е м е н т $a$. Как и для второй секториальной гармоники, долгопериодические возмущения в $a$ равны нулю:

$$\delta a = 0. \tag{6.3.14}$$

В полученных здесь формулах аргументы $\Omega_{3m}$ и $g'$ определяются из равенств (6.3.2)—(6.3.4). Однако, если заменить в них $v$ на $M$ и ввести звездное гринвичское время $S$, то с принятой точностью

$$\Omega_{3m} = -S - \lambda_{3m} + \Omega \quad (m = 1, 2, 3), \tag{6.3.15}$$

$$g' = n'(t - t_0) + \omega_0^* + \nu M_0, \tag{6.3.16}$$

$$\Omega = n''(t - t_0) + \Omega_0 + \mu M_0, \tag{6.3.17}$$

где (см. § 5.11)

$$n' = n\nu, \quad n'' = n\mu, \tag{6.3.18}$$

а $n$ — среднее аномалистическое движение спутника.

Приведенные формулы дают только долгопериодические возмущения с общим периодом, приближенно равным одним суткам. Они строго учитывают величины $e_0$ и $i_0$. Исключение составляет формула (6.3.13), в которой отброшены члены с $e_0^4$ и выше.

Рассмотрим теперь один пример. По наблюдениям спутника 1959 η, выполненным на промежутке времени около 1 месяца, были найдены амплитуды некоторых неравенств, обусловленных долготными членами потенциала [1]. В табл. 13 приводятся значения этих амплитуд для $\delta e$, найденные из наблюдений, а также вычисленные по формулам настоящего параграфа.

Таблица 13

**Возмущения элемента $e$**

| Амплитуда $\times 10^3$ | | Аргумент |
|---|---|---|
| Наблюденные | Вычисленные | |
| $0{,}0093 \pm 0{,}0020$ | 0,0113 | $g' - \Omega_{31}$ |
| $0{,}0093 \pm 0{,}0020$ | 0,0078 | $g' + \Omega_{31}$ |
| $0{,}0030 \pm 0{,}0013$ | 0,0030 | $g' - 2\Omega_{32}$ |
| $0{,}0042 \pm 0{,}0014$ | 0,0030 | $g' + 2\Omega_{32}$ |
| $0{,}0096 \pm 0{,}0015$ | 0,0103 | $g' - 3\Omega_{33}$ |
| $0{,}0139 \pm 0{,}0027$ | 0,0103 | $g' + 3\Omega_{33}$ |

Заметим, что $\delta e$ не содержит множителем $e_0$, в то время как $\delta i$, $\delta\Omega$, а также $\delta\omega + \delta M$ пропорциональны $e_0$. Вследствие этого при малых $e_0$ возмущения в $e$ являются преобладающими.

## § 6.4. Разложение возмущающей функции в общем случае

В предыдущих параграфах были рассмотрены возмущения элементов орбиты от нескольких первых тессеральных и секториальных членов геопотенциала. Однако, как и в случае зональных гармоник, коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник медленно убывают с возрастанием порядка гармоники, и вследствие этого гармоники более высокого порядка могут вызывать весьма заметные возмущения. Поэтому желательно иметь формулы для возмущений от произвольных тессеральной и секториальной гармоник. Для этого нам нужно получить общее выражение для возмущающей функции через элементы орбиты. Этой задачей мы и займемся в настоящем параграфе.

Запишем возмущающую функцию в следующем виде:

$$R = fm \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=1}^{n} J_{nq} R_{nq}, \tag{6.4.1}$$

где согласно (6.1.1)

$$R_{nq} = \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n^{(q)}(\sin\varphi)\cos q(\lambda - \lambda_{nq}). \tag{6.4.2}$$

Выразим функцию $R_{nq}$ через элементы орбиты спутника. На основании формул (6.1.4) и (6.1.5) имеем

$$\lambda = \Omega - S + \hat{w}, \tag{6.4.3}$$

где

$$\hat{w} = \operatorname{Arctg}(\alpha \operatorname{tg} u), \tag{6.4.4}$$

а $S$ — гринвичское звездное время.

Формулы § 6.1 позволяют написать также следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= s\sin u,\\ \cos\varphi\cos\hat{w} &= \cos u,\\ \cos\varphi\sin\hat{w} &= \alpha\sin u. \end{aligned}\right\} \tag{6.4.5}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\overline{R}_{nq} = \frac{(-1)^{\delta_q} r_0^n}{r^{n+1}} P_n^{(q)}(\sin\varphi) \exp\left[\sqrt{-1}\, q(\lambda - \lambda_{nq})\right], \quad (6.4.6)$$

где $\delta_0 = 1$; $\delta_q = 2$ (при $q \neq 0$). Действительная часть этой функции даст нам $R_{nq}$.

Так как

$$\lambda - \lambda_{nq} = -\lambda_{nq} + (\Omega - S) + \hat{w},$$

то

$$\overline{R}_{nq} = \frac{(-1)^{\delta_q} r_0^n}{r^{n+1}} \exp\left(-\sqrt{-1}\, q\lambda_{nq}\right) \exp\left[\sqrt{-1}\, q(\Omega - S)\right] \times$$
$$\times P_n^{(q)}(\sin\varphi) \exp\left(\sqrt{-1}\, q\hat{w}\right). \quad (6.4.7)$$

Далее с помощью формул (6.4.4) и (6.4.5) нетрудно установить, что

$$P_n^{(q)}(\sin\varphi) \exp\left(\sqrt{-1}\, q\hat{w}\right) = \sum_{k=-n}^{n} a_{nq}^k(i) \exp\left(\sqrt{-1}\, ku\right), \quad (6.4.8)$$

где $a_{nq}^k(i)$ суть некоторые коэффициенты наклона $i$, определяемые формулой

$$a_{nq}^k(i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n^{(q)}(\sin\varphi) \exp\left[\sqrt{-1}\,(q\hat{w} - ku)\right] du. \quad (6.4.9)$$

Подставляя равенство (6.4.8) в (6.4.7), получим

$$\overline{R}_{nq} = \sum_{k=-n}^{n} (-1)^{\delta_q} a_{nq}^k(i) \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \times$$
$$\times \exp\left[\sqrt{-1}\,(ku + q(\Omega - S) - q\lambda_{nq})\right].$$

Поскольку $u = v + \omega$, эта формула запишется в виде

$$\overline{R}_{nq} = \frac{(-1)^{\delta_q}}{a} \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n a_{nq}^k(i) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \exp\left(\sqrt{-1}\, kv\right) \times$$
$$\times \exp\left[\sqrt{-1}\,(k\omega + q\Omega - qS - q\lambda_{nq})\right]. \quad (6.4.10)$$

С помощью (6.1.2) можно написать

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\exp\left(\sqrt{-1}\,kv\right)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}B^{k}_{n+1,\,p}(e)\exp\left(\sqrt{-1}\,pM\right),\tag{6.4.11}$$

где $B^{k}_{n+1,p}(e)$ суть функции эксцентриситета $e$. Они определяются формулами

$$B^{k}_{n+1,\,p}(e)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\exp\left[\sqrt{-1}\,(kv-pM)\right]dM.\tag{6.4.12}$$

Функции эксцентриситета и функции наклона $a^{k}_{nq}(i)$ мы подробно рассмотрим в § 6.5 и 6.6. Как мы увидим в дальнейшем, коэффициенты $a^{k}_{nq}$ являются действительными при четном $n-q$ и мнимыми при нечетном $n-q$. Поэтому положим

$$a^{k}_{nq}=\left(\sqrt{-1}\right)^{n-q}A^{k}_{nq}.\tag{6.4.13}$$

Подставляя (6.4.11) и (6.4.13) в формулу (6.4.10), получим

$$\overline{R}_{nq}=\frac{(-1)^{\delta_q}(-1)^{\frac{n-q}{2}}}{a}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{n}A^{k}_{nq}(i)\,B^{k}_{n+1,\,p}\times$$

$$\times\exp\left[\sqrt{-1}\,(k\omega+pM+q\Omega-qS-q\lambda_{nq})\right].$$

Возьмем теперь действительную часть функции $\overline{R}_{nq}$. Тогда окончательно найдем

$$R_{nq}=\frac{(-1)^{\delta_q}}{a}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{n}A^{k}_{nq}(i)\,B^{k}_{n+1,\,p}(e)\,C^{k}_{pq},\tag{6.4.14}$$

где

$$C^{k}_{pq}=(-1)^{\frac{n-q}{2}}\cos\left[pM+k\omega+q\,(\Omega-S-\lambda_{nq})\right],\tag{6.4.15}$$

если $n-q$ четно, и

$$C_{pq}^{k}=(-1)^{\frac{n-q+1}{2}}\sin\left[pM+k\omega+q\left(\Omega-S-\lambda_{nq}\right)\right], \qquad (6.4.16)$$

если $n-q$ нечетно.

Таким образом, мы выразили $R_{nq}$ и тем самым $R$ через элементы $a$, $e$, $i$, $\omega$, $\Omega$ и $M$. Для определения возмущений мы можем воспользоваться уравнениями § 4.9, или уравнениями § 4.5, независимой переменной в которых является время $t$.

## § 6.5. Функции наклона $A_{nq}^{k}(i)$

На основании § 6.4

$$a_{nq}^{k}(i)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}P_{n}^{(q)}(\sin\varphi)\exp\left[\sqrt{-1}\left(q\hat{w}-ku\right)\right]du, \qquad (6.5.1)$$

где $\sin\varphi$ и $\hat{w}$ даются формулами (6.4.5).

Получим сначала явное выражение для функции $a_{nq}^{k}(i)$. Для полинома $P_n(x)$ и присоединенной функции $P_n^{(q)}(x)$ Лежандра мы имеем (см. § 1.2 и 1.3)

$$P_{n}(x)=\sum_{r=0}^{h}(-1)^{r}\frac{(2n-2r)!}{2^{n}r!\,(n-r)!\,(n-2r)!}x^{n-2r}, \qquad (6.5.2)$$

$$P_{n}^{(q)}(x)=(1-x^{2})^{q/2}\frac{d^{q}P_{n}(x)}{dx^{q}}, \qquad (6.5.3)$$

где $h=\frac{n}{2}$ или $h=\frac{n-1}{2}$, смотря по тому, которое из этих чисел целое.

Дифференцируя (6.5.2), получаем

$$\frac{d^{q}P_{n}(x)}{dx^{q}}=\frac{1}{2^{n}n!}\sum_{r=0}^{h-q}(-1)^{r}\frac{(2n-2r)!}{(n-q-2r)!}C_{n}^{r}x^{n-q-2r}, \qquad (6.5.4)$$

где

$$C_{n}^{r}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}.$$

Для случая $q=n$ из (6.5.4) легко находим

$$\frac{d^{n}P_{n}(x)}{dx^{n}}=\frac{(2n)!}{2^{n}n!}.$$

Поэтому, если в формуле (6.5.3) положить $x = \sin\varphi$ и $q = n$, получим

$$P_n^{(n)}(\sin\varphi) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\cos^n\varphi. \tag{6.5.5}$$

Далее имеем

$$\exp\left(\sqrt{-1}\,q\hat{w}\right) = \left(\cos\hat{w} + \sqrt{-1}\sin\hat{w}_q\right).$$

Подставляя сюда формулы (6.4.5), найдем

$$\cos^q\varphi\exp\left(\sqrt{-1}\,q\hat{w}\right) = \left(\cos u + \sqrt{-1}\,\alpha\sin u\right)^q =$$

$$= \frac{1}{2^q}\left[(1+\alpha)\exp\left(\sqrt{-1}\,u\right) + (1-\alpha)\exp\left(-\sqrt{-1}\,u\right)\right]^q.$$

Следовательно,

$$\cos^q\varphi\exp\left(\sqrt{-1}\,q\hat{w}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{q} C_q^m (1+\alpha)^m (1-\alpha)^{q-m}\exp\left[-\sqrt{-1}\,(q-2m)\,u\right]. \tag{6.5.6}$$

Рассмотрим сначала случай $q = n$. При этом формулы (6.5.5), (6.5.6) и (6.5.1) дают

$$a^k_{nn}(i) = \frac{1}{2\pi}\frac{(2n)!}{2^n n!}\sum_{m=0}^{n} C_n^m (1+\alpha)^m (1-\alpha)^{n-m} I^k_{nm},$$

где

$$I^k_{nm} = \int_0^{2\pi}\exp\left[-\sqrt{-1}\,(n-2m+k)\,u\right]du.$$

Но

$$I^k_{nm} = \begin{cases} 0, & n-2m+k \neq 0, \\ 2\pi, & n-2m+k = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$a^k_{nn} = \frac{(2n)!}{2^n n!} C_n^{\frac{n+k}{2}} (1+\alpha)^{\frac{n+k}{2}} (1-\alpha)^{\frac{n-k}{2}}$$

и

$$A^k_{nn}(i) = \frac{(2n)!}{2^n n!} C_n^{\frac{n+k}{2}} (1+\alpha)^{\frac{n+k}{2}} (1-\alpha)^{\frac{n-k}{2}}, \tag{6.5.7}$$

где $\alpha = \cos i$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть

$$x = \sin\varphi = \sin i \sin u = s \sin u.$$

Тогда

$$x = \frac{s}{2}\sqrt{-1}\,[\exp(-\sqrt{-1}u) - \exp(\sqrt{-1}u).]$$

Поэтому

$$x^{n-q-2r} = (-1)^r (\sqrt{-1})^{n-q} \frac{s^{n-q-2r}}{2^{n-q-2r}} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{n-q-2r} (-1)^l C_{n-q-2r}^l \exp[-\sqrt{-1}(n-q-2r-2l)u]. \tag{6.5.8}$$

Подставим равенства (6.5.8), (6.5.4), (6.5.3) и (6.5.6) в формулу (6.5.1). Тогда

$$a_{nq}^k = \frac{(\sqrt{-1})^{n-q}}{2^n n!} \sum_{m=0}^{q} \sum_{r=0}^{h-q} \sum_{l=0}^{n-q-2r} (-1)^l 2^{2r} \times$$
$$\times \frac{(2n-2r)!}{(n-q-2r)!} C_q^m C_n^r C_{n-q-2r}^k s^{n-q-2r} (1+\alpha)^m (1-\alpha)^{q-m} \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[\sqrt{-1}(2m+2r+2l-n-k)u]\,du. \tag{6.5.9}$$

Поскольку интеграл в (6.5.9) равен нулю, если $m+r+l \neq \frac{n+k}{2}$, и $2\pi$, если $m+r+l = \frac{n+k}{2}$, то из (6.5.9) и (6.4.13) находим

$$A_{nq}^k(i) = \sum_{m=0}^{q} \sum_{r=0}^{h-q} \sum_{l=0}^{n-q-2r} K_{nq}^{lk} (1+\alpha)^m (1-\alpha)^{q-m} s^{n-q-2r}, \tag{6.5.10}$$

где

$$K_{nq}^{lk} = (-1)^l \frac{(2n-2r)!}{2^{2n-2r} n!\,(n-q-2r)!} C_q^m C_n^r C_{n-q-2r}^l. \tag{6.5.11}$$

Рассмотрим теперь случай $q = 0$, т. е. функции наклона для зональных гармоник. Тогда $m = 0$ и $l = \frac{n+k}{2} - r$.

Поэтому формулы (6.5.10) и (6.5.11) дадут

$$A^k_{n0}(i) = \sum_{r=0}^{h} K^k_n s^{n-2r}, \tag{6.5.12}$$

где

$$K^k_n = (-1)^l \frac{(2n-2r)!\, C^l_{n-2r}}{2^{2n-2r} r!\,(n-r)!\,(n-2r)!}. \tag{6.5.13}$$

Здесь $l = \frac{n+k}{2} - r$, а $h = \frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$, смотря по тому, четно или нечетно $n$.

Нетрудно показать, что рассмотренные в § 5.4 функции $L^{(k)}_n(i)$ связаны с $A^k_{n0}(i)$ зависимостью *)

$$A^k_{n0}(i) = (-1)^{\frac{n+k}{2}} L^{(k)}_n(i). \tag{6.5.14}$$

Поэтому

$$L^{(k)}_n(i) = \sum_{r=0}^{h} (-1)^r \frac{(2n-2r)!\, C^{\frac{n+k}{2}-r}_{n-2r}\, s^{n-2r}}{2^{2n-2r} r!\,(n-r)!\,(n-2r)!}. \tag{6.5.15}$$

Полученные в этом параграфе формулы позволяют вычислять функции наклона для любых индексов $n$, $k$ и $q$. Важно также иметь рекуррентные формулы, связывающие функции наклона различных индексов. Такие формулы были выведены в работе А. Шаля и И. Лаклавери [2]. Они имеют вид

$$A^k_{nn} = \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{(n-k)(n+k)} s^2 A^k_{n-2,\,n-2}, \tag{6.5.16}$$

$$A^k_{nn} = \frac{n-k+2}{n+k} \cdot \frac{1+\alpha}{1-\alpha} A^{k-2}_{nn}, \tag{6.5.17}$$

$$A^k_{nn} = \frac{n(2n-1)}{n+k}(1+\alpha) A^{k+1}_{n-1,\,n-1}. \tag{6.5.18}$$

Соотношения (6.5.16)—(6.5.18) вместе с формулой (6.5.7) позволяют довольно быстро вычислять любое число функций $A^k_{nq}(i)$.

---

*) Функции $L^k_n(i)$ были введены как коэффициенты тригонометрического полинома для $P_n(s\cos u)$, а функции $A^k_{n0}(i)$ являются соответствующими коэффициентами для $P_n(s\sin u)$. Отсюда и получается зависимость (6.5.14.).

Для вычисления производной $A_{nq}^k$ по $i$ в работе [2] предлагается следующая формула:

$$(n+q)\frac{dA_{n-1,\,q}^{k+1}}{di}-(n-q+1)\frac{dA_{n+1,\,q}^{k+1}}{di}=$$

$$=\frac{2n+1}{2}\left[\alpha\left(A_{nq}^k-A_{nq}^{k+2}\right)+s\left(\frac{dA_{nq}^k}{di}-\frac{dA_{nq}^{k+2}}{di}\right)\right]. \quad (6.5.19)$$

Исходные данные, требуемые для вычисления по формулам (6.5.16)—(6.5.19), нужно определять из равенств (6.5.7) и (6.5.10).

## § 6.6. Функции эксцентриситета $B_{nq}^k(e)$

Согласно § 6.4 функция $B_{nq}^k(e)$ определяется формулой

$$B_{nq}^k(e)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^n\exp\left[\sqrt{-1}\,(kv-qM)\right]dM, \quad (6.6.1)$$

так что

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n\exp\left(\sqrt{-1}\,kv\right)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}B_{nq}^k\exp\left(\sqrt{-1}\,qM\right). \quad (6.6.2)$$

Функции $B_{nq}^k$ довольно просто связаны с коэффициентами Ганзена, которые обозначаются $X_q^{nk}$ и вводятся следующим равенством *):

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n\exp\left(\sqrt{-1}\,kv\right)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}X_q^{nk}\exp\left(\sqrt{-1}\,qM\right). \quad (6.6.3)$$

Действительно, сравнивая (6.6.2) и (6.6.3), находим

$$B_{nq}^k=X_q^{-n,\,k}. \quad (6.6.4)$$

Коэффициенты Ганзена были подробно изучены в трактате Тиссерана [3], который дает для них такие формулы:

$$X_q^{m,\,k}=(-1)^{q-k}\frac{(1-\beta^2)^{2m+3}}{(1+\beta^2)^{m+1}}\beta^{q-k}\times$$

$$\times\left[P_{q-k}+P_{q-k+1}Q_1\beta^2+P_{q-k+2}Q_2\beta^4+\ldots\right], \quad (6.6.5)$$

*) Можно, конечно, и $B_{nq}^k$ считать коэффициентами Ганзена, но здесь мы придерживаемся стандартных обозначений.

если $q > k$, и

$$X_q^{m,k} = (-1)^{k-q} \frac{(1-\beta^2)^{2m+3}}{(1+\beta^2)^{m+1}} \beta^{k-q} \times$$
$$\times [Q_{k-q} + Q_{k-q+1}P_1\beta^2 + Q_{k-q+2}P_2\beta^4 + \ldots], \quad (6.6.6)$$

если $k > q$.

В формулах (6.6.5) и (6.6.6)

$$\beta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

коэффициенты $P_k$ определяются равенствами

$$P_1 = \frac{m+2-q}{1} - \frac{\nu}{1},$$

$$P_2 = \frac{(m+2-q)(m+3-q)}{1\cdot 2} - \frac{m+3-q}{1}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{\nu^2}{1\cdot 2},$$

$$P_3 = \frac{(m+2-q)(m+3-q)(m+4-q)}{1\cdot 2\cdot 3} -$$
$$- \frac{(m+3-q)(m+4-q)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{m+4-q}{1}\cdot\frac{\nu^2}{1\cdot 2} - \frac{\nu^3}{1\cdot 2\cdot 3},$$

. . . . . .

а коэффициенты $Q_k$ — равенствами

$$Q_1 = \frac{m+2+q}{1} + \frac{\nu}{1},$$

$$Q_2 = \frac{(m+2+q)(m+3+q)}{1\cdot 2} + \frac{m+3+q}{1}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{\nu^2}{1\cdot 2},$$

$$Q_3 = \frac{(m+2+q)(m+3+q)(m+4+q)}{1\cdot 2\cdot 3} +$$
$$+ \frac{(m+3+q)(m+4+q)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{m+4+q}{1}\cdot\frac{\nu^2}{1\cdot 2} + \frac{\nu^3}{1\cdot 2\cdot 3},$$

. . . . . .

где

$$\nu = q\sqrt{1-e^2}.$$

Поскольку приведенные здесь формулы для коэффициентов Ганзена $X_q^{m,k}$ имеют место как при положительных, так и при отрицательных $m$, то они вместе с формулой (6.6.4) позволяют вычислять функции $B_{nq}^{k}$. Однако полезно иметь также рекуррентные соотношения между $B_{nq}^{k}$ соседних индексов. Эти соотношения были получены

в уже цитированной работе [2]. Они таковы:

$$4\left[\left(\frac{\nu}{q}\right)^3 - k\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\right]B^k_{nq} = e^2(k-n)B^{k-2}_{nq} + \\ + 2e(2k-n)B^{k-1}_{nq} + 2e(2k+n)B^{k+1}_{nq} + e^2(k+n)B^{k+2}_{nq}, \tag{6.6.7}$$

$$B^k_{n+2,\,q} = \left(\frac{q}{\nu}\right)^2\left[B^k_{n+1,\,q} + \frac{e}{2}\left(B^{k+1}_{n+1,\,q} + B^{k-1}_{n+1,\,q}\right)\right]. \tag{6.6.8}$$

Рассмотрим теперь связь функций $B^k_{nq}(e)$ с функциями $M^k_n(e)$, которые были введены в § 5.2. Мы имеем

$$M^k_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-e^2)^n\left(\frac{a}{r}\right)^n \exp\left(\sqrt{-1}\,kv\right)dv. \tag{6.6.9}$$

С другой стороны, при $q = 0$ формула (6.6.1) дает

$$B^k_{n,\,0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^n \exp\left(\sqrt{-1}\,kv\right)dM. \tag{6.6.10}$$

Заменяя в (6.6.10) переменную интегрирования $M$ через $v$ согласно равенству

$$dM = \left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{dv}{\sqrt{1-e^2}},$$

и сопоставляя полученную формулу с формулой (6.6.9), легко находим

$$M^k_n = (1-e^2)^{n+\frac{1}{2}}B^k_{n+2,\,0}.$$

Таким образом, функции эксцентриситета $B^k_{n,q}$ при $q = 0$ весьма легко выражаются через функции $M^k_n$.

В заключение заметим, что функции $B^k_{n,q}$ при малых $e$ имеют порядок $e^{|k-q|}$, а $M^k_n$ — порядок $e^k$.

## § 6.7. Структура возмущений. Резонансные неравенства

Соотношения (6.4.1) и (6.4.14)—(6.4.16) позволяют представить возмущающую функцию в следующем виде:

$$R = fm\sum_{h=2}^{\infty}\sum_{q=1}^{h}\sum_{k=-h}^{h}\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{hq}N_{hq}(a)\times \\ \times A^k_{hq}(i)B^k_{h+1,\,p}(e)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \tag{6.7.1}$$

где

$$N_{hq}(a) = \frac{(-1)^{\delta_q}}{a}\left(\frac{r_0}{a}\right)^h \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{h-q}{2}} \\ (-1)^{\frac{h-q+1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (6.7.2)$$

$$\theta = k\omega + q(\Omega - S - \lambda_{hq}) + pM. \quad (6.7.3)$$

В формулах (6.7.1) и (6.7.2) первые строчки соответствуют четным $h - q$, а вторые — нечетным $h - q$.

Такое представление возмущающей функции дает возможность легко составить правые части дифференциальных уравнений для элементов и проинтегрировать их в первом приближении. Рассмотрим сначала возмущения элемента $a$. Как и раньше, будем пренебрегать членами порядка $\varepsilon^2 J_{nq}$. Тогда из (4.9.1) имеем

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M}.$$

Подставляя сюда (6.7.1), получим

$$\frac{da}{dt} = 2na^2 \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{q=1}^{h} \sum_{k=-h}^{h} \sum_{p=-\infty}^{\infty} pJ_{hq}N_{hq}A_{hq}^k B_{h+1,p}^k \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (6.7.4)$$

где $n$ — среднее аномалистическое движение спутника, так что

$$M = n(t - t_0) + M_0. \quad (6.7.5)$$

В промежуточном движении величины $\omega$ и $\Omega$ определяются формулами

$$\omega = n'(t - t_0) + \omega_0, \quad (6.7.6)$$

$$\Omega = n''(t - t_0) + \Omega_0. \quad (6.7.7)$$

Кроме того

$$S = n_\oplus (t - t_0) + S_0, \quad (6.7.8)$$

где $n'$ — среднее движение перигея, $n''$ — среднее движение узла, $n_\oplus$ — скорость вращения Земли, а $\omega_0$, $\Omega_0$ и $S_0$ — постоянные.

Если теперь подставить формулы (6.7.5)—(6.7.8) в уравнение (6.7.4), то для возмущений элемента $a$ найдем

$$\delta a = \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{q=1}^{h} \sum_{k=-h}^{h} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{H_{hkpq}}{\nu_{kpq}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad (6.7.9)$$

где

$$H_{hkpq} = 2na^2 p J_{hq} N_{hq} A_{hq}^k B_{h+1,\,p}^k, \qquad (6.7.10)$$

$$\nu_{kpq} = pn + kn' + qn'' - qn_{\oplus}. \qquad (6.7.11)$$

Подобным образом можно получить выражения для возмущений всех остальных элементов. Приведем окончательный результат:

$$\delta e = \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{q=1}^{h} \sum_{k=-h}^{h} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{H_{hkpq}^{(e)}}{\nu_{kpq}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\delta i = \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{q=1}^{h} \sum_{k=-h}^{h} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{H_{hkpq}^{(i)}}{\nu_{kpq}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\delta\omega = \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{q=1}^{h} \sum_{k=-h}^{h} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{H_{hkpq}^{(\omega)}}{\nu_{kpq}} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\delta\Omega = \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{q=1}^{h} \sum_{k=-h}^{h} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{H_{hkpq}^{(\Omega)}}{\nu_{kpq}} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\delta M = \sum_{h=2}^{\infty} \sum_{q=1}^{h} \sum_{k=-h}^{h} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{H_{hkpq}^{(M)}}{\nu_{kpq}} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix},$$

где коэффициенты $H_{hkpq}^{(e)}$, $H_{hkpq}^{(i)}$, ... $H_{hkpq}^{(M)}$ определяются формулами

$$H_{hkpq}^{(e)} = na\left(p\sqrt{1-e^2} - k\right) J_{hq} N_{hq} A_{hq}^k B_{h+1,\,q}^k,$$

$$H_{hkpq}^{(i)} = \frac{na\,(k\cos i - q)}{\sin i\sqrt{1-e^2}} J_{hq} N_{hq} A_{hq}^k B_{h+1,\,q}^k,$$

$$H_{hkpq}^{(\omega)} = naJ_{hq}N_{hq}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} A_{hq}^k \frac{dB_{h+1,\,q}^k}{di} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos i}{\sin i\sqrt{1-e^2}} \frac{dA_{h,\,q}^k}{de} B_{h+1,\,q}^k\right),$$

$$H^{(\Omega)}_{hkpq} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}\sin i} J_{hq} N_{hq} A^k_{hq} \frac{dB^k_{h+1,\,q}}{di},$$

$$H^{(M)}_{hkpq} = -naJ_{hq}N_{hq}\left[\frac{1-e^2}{e}\frac{dA^k_{hq}}{de} - 2(h+1)A^k_{hq} + \right.$$

$$\left. + \frac{3np}{\nu_{kpq}} A^k_{hq}\right] B^k_{h+1,\,q},$$

а $\nu_{kpq}$ дается формулой (6.7.11)

Рассмотрим подробнее структуру возмущений. Прежде всего из уравнений (4.9.1) и формул (6.7.1), (6.7.3) и (6.7.5)—(6.7.8) следует, что если $\nu_{kpq} \neq 0$, то возмущения всех элементов содержат только периодические члены. Амплитуды этих членов существенно зависят от величины знаменателя $\nu_{kpq}$.

Рассмотрим сначала случай близких спутников, когда отношение $n$ к $n_\oplus$ равно примерно $15 \div 10$. Поскольку отношения $n'$ и $n''$ к $n$ имеют порядок $10^{-3}$, то амплитуды и периоды возмущений определяет в основном величина $pn - qn_\oplus$.

Пусть $p \neq 0$. Тогда гармоники низших порядков дадут короткопериодические неравенства с амплитудами порядка $J_{nq}$. Гармоники высших порядков наряду с короткопериодическими возмущениями дадут также и долгопериодические неравенства, когда

$$\frac{q}{p} \approx \frac{n}{n_\oplus}.$$

Например, для $n/n_\oplus = 12$ долгопериодические неравенства будут вызывать гармоники с индексами 12,12; 13,12; 14,12 и т. д. Амплитуды этих неравенств будут пропорциональны $J_{nq}\varepsilon^{-2}$.

Пусть $p = 0$. Тогда мы будем иметь возмущения с общим периодом около суток. Неравенства этого типа от низших гармоник были рассмотрены в § 6.2 и 6.3. Наибольшие амплитуды этих неравенств будут при $q = 1; 2$. При бóльших $q$ эти неравенства по величине мало отличаются от короткопериодических неравенств. Заметим, что такие неравенства не содержатся в возмущениях большой полуоси.

Рассмотрим теперь далекие спутники, когда $n/n_\oplus < 10$. В этом случае короткопериодические неравенства и воз-

мущения с периодом около суток будут малыми. Самым значительным возмущениям будут подвергаться только спутники, для которых отношение $n$ к $n_\oplus$ близко к отношению целых чисел. Главное отличие этого случая от случая близких спутников заключается в том, что долгопериодические возмущения здесь вызывают не только высшие гармоники, но и гармоники низших порядков.

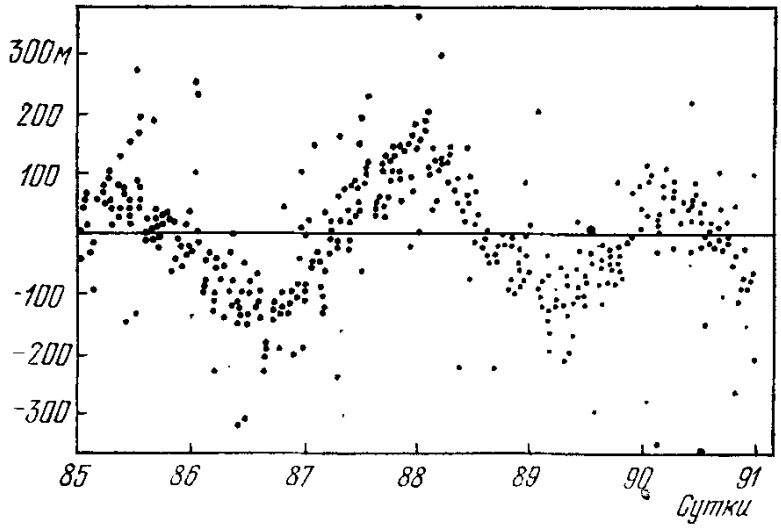


Рис. 20. Долгопериодические возмущения вдоль орбиты спутника 1963 49В.

Так, например, для спутника с периодом около 12 часов долгопериодические возмущения будет вызывать вторая секториальная гармоника ($q = 2$, $p = 1$), а для спутника с периодом около 8 часов — третья секториальная гармоника ($q = 3$, $p = 1$).

Итак, все неравенства можно разделить на три типа:

1. Короткопериодические неравенства.
2. Неравенства с периодом около суток.
3. Долгопериодические или резонансные неравенства.

Неравенства первого и второго типов существенны только для близких спутников. При этом амплитуды неравенств второго типа отличаются от амплитуд неравенств первого типа множителем $n/n_\oplus$. Наиболее значительными, конечно, являются долгопериодические или резонансные возмущения. Для спутника 1963 49В они показаны на рис. 20.

## § 6.8. Замечания

Первые исследования возмущений от долготной части геопотенциала были выполнены О'Кифом и Бэтчлором [4], Л. Сехналом [5] и автором [6]. Они касались лишь второй секториальной гармоники. Затем И. Козаи [1] и автор [7] нашли возмущения с периодом около суток от всех гармоник до четвертого порядка. При этом в работе [1] рассмотрен случай малых эксцентриситетов, а в работе [7] на эксцентриситет не накладывалось ограничений.

Разложение возмущающей функции в общем виде и общие выражения для возмущений элементов, учитывающие любое число гармоник, были получены В. Каулой [8]. Важной для практики является работа А. Шаля и И. Лаклавери [2], в которой были найдены рекуррентные соотношения для функций наклона и функций эксцентриситета. Возмущения, вызываемые любой гармоникой, в случае малых эксцентриситетов в удобном для практических расчетов виде были найдены также С. Н. Яшкиным [9].

Из других работ, посвященных этой проблеме, следует отметить работу Ю. В. Батракова и Л. Л. Филенко [10], в которой получены явные выражения возмущений первого порядка от всех гармоник до четвертого порядка включительно с точностью до $e^4$, и работу Л. Л. Филенко [11], в которой разработана методика вычисления возмущений от любой гармоники с точностью до $e^6$.

Специальную задачу в теории возмущений от тессеральных и секториальных гармоник представляет исследование резонансных неравенств. Наиболее интенсивно эта задача разрабатывалась применительно к суточному спутнику. Ей посвящены статьи Л. Сехнала [12], Б. Морандо [13]—[15], Р. Аллана [16], С. Г. Журавлева [17], [18], М. А. Вашковьяка [19], [20]. Резонансные эффекты в движении близких спутников рассматривались в работах С. Н. Яшкина [21] и Р. Аллана [22].

Нужно заметить, что задача о резонансных возмущениях является весьма сложной, поскольку классические методы здесь не применимы. Но она представляет большой интерес не только для теории, но и для практики, ибо резонансные эффекты дают прекрасную возможность определять коэффициенты геопотенциала по наблюдениям спутников. Поэтому она требует дальнейшей разработки.

ГЛАВА VII

# ЛУННО-СОЛНЕЧНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

## § 7.1. Постановка задачи

В этой главе мы рассмотрим возмущения в движении спутника, обусловленные притяжением Луны и Солнца.

Пусть, как и раньше, $Oxyz$ — прямоугольная геоцентрическая система координат, плоскость $xy$ которой совпадает с плоскостью экватора, ось $Oz$ направлена в северный полюс, а ось $Ox$ — в точку весеннего равноденствия. Обозначим через $x'$, $y'$, $z'$ координаты возмущающего тела (Луны или Солнца) относительно этой системы координат. Тогда возмущающая функция $R$, обусловленная притяжением внешнего тела, будет определяться формулой [1]

$$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right), \tag{7.1.1}$$

где $m'$ — масса возмущающего тела,

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Обозначим через $H$ угол между радиусами-векторами спутника и возмущающего тела. Тогда

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}, \tag{7.1.2}$$

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H}.$$

Поэтому

$$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right).$$

Разлагая функцию $R$ в ряд по степеням отношения $r/r'$ и отбрасывая при этом член, не зависящий от координат

спутника, мы получим

$$R = \frac{fm'}{r'} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^k P_k(\cos H). \qquad (7.1.3)$$

Разложение (7.1.3) сходится для всех $r < r'$. В случае Солнца оно сходится настолько быстро, что можно ограничиться только первым членом. Но в случае Луны эта сходимость более медленна, поскольку отношение $r$ к $r'$ может быть и не малой величиной. Однако для близких спутников это отношение действительно невелико и мы можем в разложении (7.1.3) отбросить члены, зависящие от параллакса. Поэтому мы примем, что функция $R$ дается формулой

$$R = \frac{fm'}{r'} \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2(\cos H). \qquad (7.1.4)$$

Итак, если отбросить параллактические члены, то возмущающая функция, обусловленная притяжением спутника Луной и Солнцем, будет равна

$$R = \frac{fm_L}{r_L} \left(\frac{r}{r_L}\right)^2 P_2(\cos H_L) + \frac{fm_S}{r_S} \left(\frac{r}{r_S}\right)^2 P_2(\cos H_S),$$

где индекс «$L$» относится к Луне, а «$S$»— к Солнцу.

Как и ранее, мы будем пренебрегать в выражении для $R$ членами, пропорциональными $\varepsilon^2$ и $\varepsilon\sigma$. Поэтому вместо координат спутника и координат возмущающего тела будем подставлять в (7.1.4) следующие выражения (см. § 4.13):

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos u \cos\Omega - \cos i \sin u \sin\Omega, \\ \frac{y}{r} &= \cos u \sin\Omega + \cos i \sin u \cos\Omega, \\ \frac{z}{r} &= \sin i \sin u, \\ \frac{p}{r} &= 1 + e\cos v, \end{aligned}\right\} \qquad (7.1.5)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x'}{r'} &= \cos u' \cos \Omega' - \cos i' \sin u' \sin \Omega', \\
\frac{y'}{r'} &= \cos u' \sin \Omega' + \cos i' \sin u' \cos \Omega', \\
\frac{z'}{r'} &= \sin i \sin u', \\
\frac{p'}{r'} &= 1 + e' \cos v',
\end{aligned}\right\} \qquad (7.1.6)$$

где $p'$, $e'$, $i'$, $u'$, $v'$, $\Omega'$ — параметр, эксцентриситет, наклон, аргумент широты, истинная аномалия и долгота узла орбиты возмущающего тела соответственно.

## § 7.2. Выражения для $K'$, $F'$, $\Phi'$

Подставим формулы (7.1.5) и (7.1.6) в равенство (7.1.2). Тогда

$$\begin{aligned}
\cos H = {} & \frac{1}{4}(1-\alpha)(1-\alpha')\cos(u-u'-\widetilde{\Omega}) + \\
& + \frac{1}{4}(1+\alpha)(1-\alpha')\cos(u+u'+\widetilde{\Omega}) + \\
& + \frac{1}{4}(1+\alpha)(1+\alpha')\cos(u-u'+\widetilde{\Omega}) + \\
& + \frac{1}{4}(1-\alpha)(1+\alpha')\cos(u+u'-\widetilde{\Omega}) + \\
& + \frac{1}{2}ss'\cos(u-u') - \frac{1}{2}ss'\cos(u+u'),
\end{aligned} \qquad (7.2.1)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \cos i, \quad \alpha' = \cos i', \\
s &= \sin i, \quad s' = \sin i',
\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.2)$$

$$\widetilde{\Omega} = \Omega - \Omega'. \qquad (7.2.3)$$

Далее находим

$$\begin{aligned}
P_2(\cos H) &= \frac{3}{2}\cos^2 H - \frac{1}{2} = \\
&= \sum_{k,\ j,\ h} (k,\ j,\ h)\cos(ku' + ju + h\widetilde{\Omega}),
\end{aligned} \qquad (7.2.4)$$

где коэффициенты $(k, j, h)$ определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
(0, 0, 0) &= \frac{1}{16}(2-3s^2)(2-3s'^2),\\
(0, 2, 0) &= \frac{3}{16}s^2(2-3s'^2),\\
(0, 2, -1) &= \frac{3}{8}s(1-\alpha)s'\alpha',\\
(0, 2, 1) &= -\frac{3}{8}s(1+\alpha)s'\alpha',\\
(0, 2, -2) &= \frac{3}{32}(1-\alpha)^2 s'^2,\\
(0, 2, 2) &= \frac{3}{32}(1+\alpha)^2 s'^2,\\
(0, 0, 1) &= \frac{3}{4}\alpha s\alpha' s',\\
(0, 0, 2) &= \frac{3}{16}s^2 s'^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.5)$$

Остальные коэффициенты приводятся в табл. 14.

Таблица 14

**Коэффициенты $(2, j, h)$**

| $h$ \ $j$ | 0 | −2 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{3}{16}(2-3s^2)s'^2$ | $\frac{9}{32}s^2s'^2$ | $\frac{9}{32}s^2s'^2$ |
| −1 | $-\frac{3}{8}s\alpha s'(1+\alpha')$ | $\frac{3}{16}s(1+\alpha)s'(1+\alpha')$ | $-\frac{3}{16}s(1-\alpha)s'(1+\alpha')$ |
| 1 | $\frac{3}{8}s\alpha s'(1-\alpha')$ | $\frac{3}{16}s(1-\alpha)s'(1-\alpha')$ | $-\frac{3}{16}s(1+\alpha)s'(1-\alpha')$ |
| −2 | $\frac{3}{32}s^2(1+\alpha')^2$ | $\frac{3}{64}(1+\alpha)^2(1+\alpha')^2$ | $\frac{3}{64}(1-\alpha)^2(1+\alpha')^2$ |
| 2 | $\frac{3}{32}s^2(1-\alpha')^2$ | $\frac{3}{64}(1-\alpha)^2(1-\alpha')^2$ | $\frac{3}{64}(1+\alpha)^2(1-\alpha')^2$ |

Мы будем пренебрегать эксцентриситетом $e'$ возмущающего тела. Поэтому

$$r' = a', \quad u' = M' + \omega', \tag{7.2.6}$$

$$M' = n'(t - t_0) + M'_0, \tag{7.2.7}$$

$$\omega' = n'\nu'(t - t_0) + \omega'_0, \tag{7.2.8}$$

$$\Omega' = n'\mu'(t - t_0) + \Omega'_0, \tag{7.2.9}$$

где $a'$, $n'$, $n'\nu'$, $n'\mu'$ — соответственно большая полуось, среднее движение, среднее движение перигея, среднее движение узла возмущающего тела, а $M'_0$, $\omega'_0$ и $\Omega'_0$ — средняя аномалия, угловое расстояние перигея от узла и долгота узла возмущающего тела для момента $t = t_0$.

Найдем теперь явные выражения функций $R'$, $F'$ и $\Phi'$ через элементы промежуточной орбиты. Согласно § 4.11

$$R' = \frac{R}{fm}, \quad F' = \left(\frac{r}{p}\right)^2 R', \quad \Phi' = (2 + e\cos v)\sin v \cdot F'.$$

Поэтому нам прежде всего нужно выразить через элементы орбиты следующие функции:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^2, \quad \left(\frac{r}{p}\right)^4, \quad \left(\frac{r}{p}\right)^4 (2 + e\cos v)\sin v.$$

Разлагая эти функции в ряды Фурье, получим

$$\left(\frac{r}{p}\right)^2 = M_{-2}^{(0)} + 2\sum_{k=1}^{\infty} M_{-2}^{(k)} \cos kv, \tag{7.2.10}$$

$$\left(\frac{r}{p}\right)^4 = M_{-4}^{(0)} + 2\sum_{k=1}^{\infty} M_{-4}^{(k)} \cos kv, \tag{7.2.11}$$

$$\left(\frac{r}{p}\right)^4 (2 + e\cos v)\sin v = 2\sum_{k=1}^{\infty} N_{-4}^{(k)} \sin kv, \tag{7.2.12}$$

где

$$M_{-n}^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 + e\cos v)^{-n} \cos kv\, dv, \tag{7.2.13}$$

$$N_{-n}^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 + e\cos v)^{-n} (2 + e\cos v)\sin v \sin kv\, dv. \tag{7.2.14}$$

Заметим, что для коэффициентов $M_{-n}^{(k)}$ можно вывести общие формулы, а также рекуррентные соотношения подобно тому, как это было сделано в § 5.2 для коэффициентов $M_n^{(k)}$. Однако, нам потребуются лишь некоторые из коэффициентов $M_{-n}^{(k)}$ и $N_{-n}^{(k)}$, а именно

$$M_{-2}^{(0)},\quad M_{-2}^{(2)},\quad M_{-4}^{(0)},\quad M_{-4}^{(2)},\quad N_{-4}^{(2)}. \tag{7.2.15}$$

Эти коэффициенты определяются непосредственным вычислением интегралов (7.2.13) и (7.2.14). В результате будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
M_{-2}^{(0)} &= (1-e^2)^{-3/2},\\
M_{-2}^{(2)} &= e^2(1-e^2)^{-3/2}\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2},\\
M_{-4}^{(0)} &= \frac{1}{2}(2+3e^2)(1-e^2)^{-7/2},\\
M_{-4}^{(2)} &= \frac{5}{2}e^2(1-e^2)^{-7/2},\\
N_{-4}^{(2)} &= -e\frac{3-2e^2+(4-2e^2)\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1+e^2})^2(1-e^2)^{5/2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.2.16}$$

Используя теперь формулы (7.2.10)—(7.2.12), равенства (7.2.4) и (7.1.4), найдем

$$pR' = \frac{m'}{m}\left(\frac{p}{a'}\right)^3\left\{M_{-2}^{(0)}\sum(k,\ j,\ h)\cos(ku'+ju+h\widetilde{\Omega})+\right.$$
$$\left.+2\sum_{k=1}^{\infty}M_{-2}^{(k)}\cos kv\sum(k,\ j,\ h)\cos(ku'+ju+h\widetilde{\Omega})\right\},$$

$$pF' = \frac{m'}{m}\left(\frac{p}{a'}\right)^3\left\{M_{-4}^{(0)}\sum(k,\ j,\ h)\cos(ku'+ju+h\widetilde{\Omega})+\right.$$
$$\left.+2\sum_{k=1}^{\infty}M_{-4}^{(k)}\cos kv\sum(k,\ j,\ h)\cos(ku'+ju+h\widetilde{\Omega})\right\},$$

$$p\Phi' = 2\frac{m'}{m}\left(\frac{p}{a'}\right)^3\sum_{k=1}^{\infty}N_{-4}^{(k)}\sin kv\sum(k,\ j,\ h)\cos(ku'+ju+h\widetilde{\Omega}).$$

Так как $j$ принимает значения 0 и $\pm 2$, то, чтобы сохранить в $R'$, $F'$ и $\Phi'$ только вековые и долгопериодические члены, нам действительно достаточно знать лишь коэффициенты (7.2.15).

Отбрасывая короткопериодические члены, мы окончательно будем иметь

$$pR' = \beta'^2 M_{-2}^{(0)} \left(\frac{p}{a}\right)^3 \sum (k, 0, h) \cos(ku' + h\widetilde{\Omega}) -$$

$$-\beta'^2 M_{-2}^{(2)} \left(\frac{p}{a}\right)^3 \sum (k, j, h) \cos(ku' + j\omega^* + h\widetilde{\Omega}), \quad (7.2.17)$$

$$pF' = \beta'^2 M_{-4}^{(0)} \left(\frac{p}{a}\right)^3 \sum (k, 0, h) \cos(ku' + h\widetilde{\Omega}) -$$

$$-\beta'^2 M_{-4}^{(2)} \left(\frac{p}{a}\right)^3 \sum (k, j, h) \cos(ku' + j\omega^* + h\widetilde{\Omega}), \quad (7.2.18)$$

$$p\Phi' = \beta'^2 N_{-4}^{(2)} \left(\frac{p}{a}\right)^3 \sum (k, j, h) \sin(ku' + j\omega^* + h\widetilde{\Omega}), \quad (7.2.19)$$

где

$$\beta'^2 = \frac{m'}{m} \left(\frac{a}{a'}\right)^3, \quad (7.2.20)$$

$$\omega^* = u - v - \frac{\pi}{2}. \quad (7.2.21)$$

В формулах (7.2.17)—(7.2.19) $j = \pm 2$, $k = 0,2$. В первых строках для $R'$ и $F'$ $h = 0, 1, 2$, когда $k = 0$, и $h = 0, \pm 1, \pm 2$, когда $k = 2$.

В выражении для $\Phi'$ и во вторых строках выражений для $R'$ и $F'$ $h = 0, \pm 1, \pm 2$. Таким образом, функции $R'$ и $F'$ содержат по 23 члена, а функция $\Phi'$ содержит 15 членов.

## § 7.3. Дифференциальные уравнения для возмущений эйлеровых элементов

На основании § 4.11 и (7.2.17) дифференциальные уравнения для элементов $a$, $e$, $s$, $\Omega$ и $\omega$ будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{dv} = 0,\\
&\frac{de}{dv} = -\frac{p}{e}(1-e^2)\frac{\partial F'}{\partial \omega^*},\\
&\frac{ds}{dv} = \frac{p\alpha}{s}\left(\alpha\frac{\partial F'}{\partial \omega^*} - \frac{\partial F'}{\partial \widetilde{\Omega}}\right),\\
&\frac{d\Omega}{dv} = \mu + \frac{p\alpha}{s}\frac{\partial F'}{\partial s},\\
&\frac{d\omega}{dv} = \nu - \frac{p\alpha^2}{s}\frac{\partial F'}{\partial s} + \frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e} + \frac{\partial \Phi'}{\partial \omega^*}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (7.3.1)$$

где $\nu$ и $\mu$ определяются формулами (3.7.15) и (3.9.3), а $\omega^* = \omega - \frac{\pi}{2}$.

Уравнения (7.3.1) могут быть легко проинтегрированы, если исключить из функций $R'$, $F'$ и $\Phi'$ время $t$, которое входит в них посредством $u'$ и $\widetilde{\Omega}$. При исключении $t$ из $u'$ и $\widetilde{\Omega}$ мы воспользуемся тем же методом, который был использован в случае тессеральных гармоник.

В промежуточном движении мы имеем

$$n(t - t_0) + M_0 = v + \Psi, \tag{7.3.2}$$

где $\Psi$ содержит только периодические члены. Если отбросить малые порядка $\varepsilon^2$, то, очевидно, — $\Psi$ представляет собой уравнение центра, т. е. [2]

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(e) \sin kM,$$

где

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

причем

$$n = n_0(1 + \lambda),$$

а $n_0$ и $\lambda$ определяются формулами (3.8.7) и (3.8.9).

Подставляя (7.3.2) в формулы (7.2.7)—(7.2.9), мы получим

$$M' = \lambda' v + M_0' - \lambda' M_0 + \lambda' \Psi, \tag{7.3.3}$$

$$\omega' = \lambda' \nu' v + \omega_0' - \lambda' \nu' M_0 + \lambda' \nu' \Psi, \tag{7.3.4}$$

$$\Omega' = \lambda' \mu' v + \Omega_0' - \lambda' \mu' M_0 + \lambda' \mu' \Psi, \tag{7.3.5}$$

где

$$\lambda' = \frac{n'}{n}. \tag{7.3.6}$$

Поскольку для близких спутников величина $\lambda'$ мала, в выражениях $R'$, $F'$ и $\Phi'$ можно пренебречь периодическими членами порядка $\beta'^2\lambda'$. Тогда с принятой точностью мы можем считать, что в формулах (7.2.17)—(7.2.19) величины $u'$ и $\Omega'$ определяются уравнениями

$$u' = \lambda'(1 + \nu') v + u_0', \tag{7.3.7}$$

$$\Omega' = \lambda' \mu' v + \Omega_0'. \tag{7.3.8}$$

Далее имеем

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\mu} v + \widetilde{\Omega}_0, \tag{7.3.9}$$

$$\omega^* = \nu v + \omega_0^*, \tag{7.3.10}$$

где

$$\widetilde{\mu} = \mu - \lambda' \mu', \tag{7.3.11}$$

$$\widetilde{\Omega}_0 = \Omega_0 - \Omega_0', \quad \omega_0^* = \omega_0 - \frac{\pi}{2}. \tag{7.3.12}$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнения (7.3.1), мы воспользуемся методом последовательных приближений, рассмотренным нами в § 4.13. Вычислив частные производные $R'$, $F'$ и $\Phi'$ по элементам и подставив их в уравнения (7.3.1), мы найдем правые части как функции $a$, $e$, $s$ и $u'$, $\widetilde{\Omega}$, $\omega^*$. Интегрирование этих уравнений при условии

$$a = a_0, \; e = e_0, \; s = s_0,$$

где $a_0$, $e_0$, $s_0$ — постоянные, а $u'$, $\widetilde{\Omega}$ и $\omega^*$ суть линейные функции $v$, определяемые формулами (7.3.7)—(7.3.10), даст нам возмущения элементов.

Заметим, что при вычислении возмущений элементов $\Omega$ и $\omega$ необходимо подставить в $\nu$ и $\mu$ возмущенные значения величин $e$ и $s$.

## § 7.4. Вековые возмущения

Поскольку переменные $u'$, $\omega^*$ и $\widetilde{\Omega}$ входят в $R'$, $F'$, $\Phi'$ только посредством тригонометрических функций, элементы $a$, $e$, $s$ не будут содержать вековых возмущений. Вековые возмущения элементов $\Omega$ и $\omega$ находятся без особого труда и оказываются равными

$$\Delta\Omega = -\frac{3}{16}\beta'^2 \frac{2+3e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}}(2-3s'^2)\,\alpha_0 \cdot v, \tag{7.4.1}$$

$$\Delta\omega = \frac{3}{16}\beta'^2 \frac{2-3s'^2}{\sqrt{1-e_0^2}}(4-5s_0^2+e_0^2)\cdot v, \tag{7.4.2}$$

где

$$\beta'^2 = \frac{m'}{m}\left(\frac{a_0}{a'}\right)^3. \tag{7.4.3}$$

Таким образом, если через $\Delta\dot{\Omega}$ и $\Delta\dot{\omega}$ обозначить поправки к средним движениям узла и перигея спутника, обус-

ловленные притяжением Луны и Солнца, то они будут даваться формулами

$$\Delta\dot{\Omega} = -\frac{3}{16} n \frac{m_L}{m} \left(\frac{a_0}{a_L}\right)^3 \frac{2+3e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}} (2-3s_L^2)\cos i_0 - \\ -\frac{3}{16} n \frac{m_S}{m} \left(\frac{a_0}{a_S}\right)^3 \frac{2+3e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}} (2-3s_S^2)\cos i_0, \quad (7.4.4)$$

$$\Delta\dot{\omega} = \frac{3}{16} n \frac{m_L}{m} \left(\frac{a_0}{a_L}\right)^3 \frac{4-5s_0^2+e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}} (2-3s_L^2) + \\ +\frac{3}{16} n \frac{m_S}{m} \left(\frac{a_0}{a_S}\right)^3 \frac{4-5s_0^2+e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}} (2-3s_S^2), \quad (7.4.5)$$

где $m_L$, $a_L$ и $s_L$ — соответственно масса, большая полуось и синус наклона орбиты Луны; $m_S$, $a_S$ и $s_S$ — соответствующие величины, относящиеся к Солнцу, а $n$ — среднее движение спутника.

Заметим, что вековые возмущения существенным образом зависят от элементов $a_0$, $e_0$ и $i_0$. Они возрастают при увеличении $a_0$ как $a_0^{3/2}$. Они тем больше, чем больше $e_0$. Интересным является тот факт, что при $i_0 = 90°$ элемент $\Omega$ не имеет вековых возмущений. Из формулы (7.4.2) следует, что постоянными $a_0$, $e_0$, $i_0$ можно распорядиться так, чтобы вековой член в элементе $\omega$ был равен нулю. При малых $e_0$ это имеет место, когда

$$\sin i_0 \approx \sqrt{\frac{4}{5}},$$

т. е. в случае критического наклона.

## § 7.5. Долгопериодические возмущения первого класса

В зависимости от периода мы разобьем все периодические возмущения на четыре класса. К первому классу отнесем те из них, общий период которых по $v$ равен $\frac{2\pi}{\mu}$. Эти возмущения соответствуют тем членам в $R'$, $F'$, $\Phi'$, для которых $k = 0$, $j = 0$.

1. Возмущения элементов $a$ и $e$:

$$\delta a = 0, \quad \delta e = 0.$$

2. Возмущения элемента $i$:

$$\delta i = \frac{2+3e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}} \{\gamma_{0,1} b_{0,1} \cos \widetilde{\Omega} + \gamma_{0,2} b_{0,2} \cos 2\widetilde{\Omega}\}, \quad (7.5.1)$$

где

$$\gamma_{0,1} = \frac{\beta'^2 s' \alpha'}{\mu}, \quad \gamma_{0,2} = \frac{\beta'^2 s'^2}{2\mu}, \quad (7.5.2)$$

$$b_{0,1} = -\frac{3}{8}\alpha_0, \quad b_{0,2} = -\frac{3}{16} s_0, \quad (7.5.3)$$

$$\widetilde{\Omega} = \Omega - \Omega'. \quad (7.5.4)$$

3. Возмущения элемента $\Omega$:

$$\delta\Omega = \frac{2+3e_0^2}{s_0\sqrt{1-e_0^2}} \{(\gamma_{0,1} c_{0,1} + \bar{\gamma}_{0,1} \bar{c}_{0,1}) \sin \widetilde{\Omega} + (\gamma_{0,2} c_{0,2} + \bar{\gamma}_{0,2} \bar{c}_{0,2}) \sin 2\widetilde{\Omega}\}, \quad (7.5.5)$$

где

$$\bar{\gamma}_{0,1} = \frac{\beta'^2 \varepsilon_0^2 s' \alpha'}{\mu^2}, \quad \bar{\gamma}_{0,2} = \frac{\beta'^2 \varepsilon_0^2 s'^2}{4\mu^2}, \quad (7.5.6)$$

$$c_{0,1} = \frac{3}{8}(1-2s_0^2), \quad c_{0,2} = \frac{3}{16}\alpha_0 s_0, \quad (7.5.7)$$

$$\bar{c}_{0,1} = -\frac{9}{16}\alpha_0 s_0^2, \quad \bar{c}_{0,2} = -\frac{9}{32} s_0^3, \quad (7.5.8)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{c}{a_0(1-e_0^2)}, \quad (7.5.9)$$

а $\widetilde{\Omega}$, $\gamma_{0,1}$ и $\gamma_{0,2}$ определяются формулами (7.5.4) и (7.5.2).

4. Возмущения элемента $\omega$:

$$\delta\omega = -\alpha_0 \delta\Omega + \sqrt{1-e_0^2} \{\gamma_{0,1} d_{0,1} \sin \widetilde{\Omega} + \gamma_{0,2} d_{0,2} \sin 2\widetilde{\Omega}\} + \frac{2+3e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}} \{\bar{\gamma}_{0,1} \bar{d}_{0,1} \sin \widetilde{\Omega} + \bar{\gamma}_{0,2} \bar{d}_{0,2} \sin 2\widetilde{\Omega}\}, \quad (7.5.10)$$

где

$$d_{0,1} = \frac{9}{4}\alpha_0 s_0, \quad d_{0,2} = \frac{9}{16} s_0^2, \quad (7.5.11)$$

$$\bar{d}_{0,1} = \frac{9}{4}\alpha_0^2 s_0, \quad \bar{d}_{0,2} = \frac{9}{8}\alpha_0 s_0^2, \quad (7.5.12)$$

а $\bar{\gamma}_{0,1}$ и $\bar{\gamma}_{0,2}$ даются формулами (7.5.6).

## § 7.6. Долгопериодические возмущения второго класса

Возмущения, период которых по $v$ равен $\frac{2\pi}{2\nu + h\mu}$, где $h = 0, \pm 1, \pm 2$, назовем возмущениями второго класса. Они соответствуют тем членам в $R'$, $F'$, $\Phi'$, для которых $k = 0$.

Введем обозначения:

$$\gamma_{2,h} = \frac{\beta'^2 l_{2,h}}{2\nu + h\mu} \qquad (h = 0, \pm 1, \pm 2), \tag{7.6.1}$$

$$\bar{\gamma}_{2,h} = \frac{\beta'^2 \varepsilon_0^2 l_{2,h}}{(2\nu + h\mu)^2} \qquad (h = 0, \pm 1, \pm 2), \tag{7.6.2}$$

где

$$l_{2,0} = 2 - 3s'^2, \quad l_{2,-1} = l_{21} = s'\alpha', \quad l_{2,-2} = l_{22} = s'^2. \tag{7.6.3}$$

1. Возмущения элемента $a$:

$$\delta a = 0.$$

2. Возмущения элемента $e$:

$$\delta e = e_0 \sqrt{1 - e_0^2} \sum_h{}' \gamma_{2,h} a_{2,h} \cos(2g' + h\widetilde{\Omega}) \tag{7.6.4}$$

$$(h = 0, \pm 1, \pm 2).$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} a_{2,0} &= \frac{15}{16} s_0^2, \\ a_{2,-1} &= \frac{15}{8} s_0 (1 - \alpha_0), \quad a_{2,1} = -\frac{15}{8} s_0 (1 + \alpha_0), \\ a_{2,-2} &= \frac{15}{32} (1 - \alpha_0)^2, \quad a_{2,2} = \frac{15}{32} (1 + \alpha_0)^2, \end{aligned}\right\} \tag{7.6.5}$$

$$g' = \nu v + \omega_0^*. \tag{7.6.6}$$

3. Возмущения элемента $i$:

$$\delta i = \frac{e_0^2}{\sqrt{1 - e_0^2}} \sum_h{}' \gamma_{2,h} b_{2,h} \cos(2g' + h\widetilde{\Omega}) \tag{7.6.7}$$

$$(h = 0, \pm 1, \pm 2),$$

где

$$\left.\begin{aligned} b_{2,0} &= -\frac{15}{16}\alpha_0 s_0, \\ b_{2,-1} &= -\frac{15}{16}(1-\alpha_0)(1+2\alpha_0), \\ b_{2,-2} &= -\frac{15}{32}s_0(1-\alpha_0), \\ b_{2,1} &= -\frac{15}{16}(1+\alpha_0)(1-2\alpha_0), \\ b_{2,2} &= \frac{15}{32}s_0(1+\alpha_0). \end{aligned}\right\} \qquad (7.6.8)$$

4. Возмущения элемента $\Omega$:

$$\delta\Omega = \frac{e_0^2}{s_0\sqrt{1-e_0^2}}\sum(\gamma_{2,h}c_{2,h} + \bar{\gamma}_{2,h}\bar{c}_{2,h})\sin(2g' + h\tilde{\Omega}) \qquad (7.6.9)$$

$$(h = 0, \pm 1, \pm 2),$$

где

$$\left.\begin{aligned} c_{2,0} &= -\frac{15}{16}\alpha_0 s_0, \\ c_{2,-1} &= -\frac{15}{16}(1+\alpha_0-2\alpha_0^2), \\ c_{2,1} &= -\frac{15}{16}(1-\alpha_0-2\alpha_0^2), \\ c_{2,-2} &= -\frac{15}{32}s_0(1-\alpha_0), \\ c_{2,2} &= \frac{15}{32}s_0(1+\alpha_0), \\ \bar{c}_{2,0} &= -\frac{225}{32}\alpha_0 s_0^3, \\ \bar{c}_{2,-1} &= -\frac{45}{32}s_0^2(1+9\alpha_0-10\alpha_0^2), \\ \bar{c}_{2,1} &= -\frac{45}{32}s_0^2(1-9\alpha_0-10\alpha_0^2), \\ \bar{c}_{2,-2} &= -\frac{45}{64}s_0(1-\alpha_0)^2(1+5\alpha_0), \\ \bar{c}_{2,2} &= \frac{45}{64}s_0(1+\alpha_0)^2(1-5\alpha_0). \end{aligned}\right\} \qquad (7.6.10)$$

5. Возмущения элемента ω:

$$\delta\omega = -\alpha_0\delta\Omega + \sqrt{1-e_0^2}\sum \gamma_{2,h} d_{2,h} \sin(2g' + h\widetilde{\Omega}) + \\ + \frac{e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}} \sum \bar{\gamma}_{2,h} \bar{d}_{2,h} \sin(2g' + h\widetilde{\Omega}) \quad (7.6.11)$$

$$(h = 0, \pm 1, \pm 2),$$

где

$$\left.\begin{aligned}
d_{2,0} &= -\frac{15}{16} s_0^2, \\
d_{2,-1} &= -\frac{15}{8} s_0 (1-\alpha_0), \\
d_{2,1} &= \frac{15}{8} s_0 (1+\alpha_0), \\
d_{2,-2} &= -\frac{15}{32} (1-\alpha_0)^2, \\
d_{2,2} &= -\frac{15}{32} (1+\alpha_0)^2, \\
\bar{d}_{2,0} &= -\frac{45}{16} s_0^2 (1-5\alpha_0^2), \\
\bar{d}_{2,-1} &= -\frac{45}{8} s_0 (1-\alpha_0)(1-\alpha_0-5\alpha_0^2), \\
\bar{d}_{2,1} &= \frac{45}{8} s_0 (1+\alpha_0)(1+\alpha_0-5\alpha_0^2), \\
\bar{d}_{2,-2} &= -\frac{45}{32} (1-\alpha_0)^2 (1-2\alpha_0-5\alpha_0^2), \\
\bar{d}_{2,2} &= -\frac{45}{32} (1+\alpha_0)^2 (1+2\alpha_0-5\alpha_0^2).
\end{aligned}\right\} \quad (7.6.12)$$

## § 7.7. Долгопериодические возмущения третьего класса

Возмущения, период по $v$ которых равен $\frac{2\pi}{2\lambda' + h\mu}$, где $h = 0, \pm 1, \pm 2$, назовем возмущениями третьего класса. Они соответствуют тем членам в $R'$, $F'$, $\Phi'$, для которых $j = 0$.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^{(2)}_{0,h} &= \frac{\beta'^2 l^{(2)}_{0,h}}{2\lambda' + h\mu} \\ \bar{\gamma}^{(2)}_{0,h} &= \frac{\beta'^2 \varepsilon_0^2 l^{(2)}_{0,h}}{(2\lambda' + h\mu)^2}, \end{aligned} \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2), \right\} \tag{7.7.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} l^{(2)}_{0,0} &= s'^2, \\ l^{(2)}_{0,-1} &= s'(1+\alpha'), \qquad l^{(2)}_{0,1} = s'(1-\alpha'), \\ l^{(2)}_{0,-2} &= (1+\alpha')^2, \qquad l^{(2)}_{0,2} = (1-\alpha')^2. \end{aligned} \right\} \tag{7.7.2}$$

1. Возмущения элементов $a$ и $e$:

$$\delta a = 0, \quad \delta e = 0.$$

2. Возмущения элемента $i$:

$$\delta i = \frac{2+3e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}} \sum \gamma^{(2)}_{0,h} b^{(2)}_{0,h} \cos(2u' + h\widetilde{\Omega}) \tag{7.7.3}$$

$$(h = \pm 1, \pm 2),$$

где

$$\left.\begin{aligned} b^{(2)}_{0,-1} &= -\frac{3}{16}\alpha_0, \qquad b^{(2)}_{0,1} = -\frac{3}{16}\alpha_0, \\ b^{(2)}_{0,-2} &= \frac{3}{32}s_0, \qquad b^{(2)}_{0,2} = -\frac{3}{32}s_0, \end{aligned} \right\} \tag{7.7.4}$$

а $u'$ определяется формулой (7.3.7).

3. Возмущения элемента $\Omega$:

$$\delta\Omega = \frac{2+3e_0^2}{s_0\sqrt{1-e_0^2}} \sum (\gamma^{(2)}_{0,h} c^{(2)}_{0,h} + \bar{\gamma}^{(2)}_{0,h} \bar{c}^{(2)}_{0,h}) \sin(2u' + h\widetilde{\Omega}) \tag{7.7.5}$$

$$(h = 0, \pm 1, \pm 2).$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} c^{(2)}_{0,0} &= -\frac{9}{16}\alpha_0 s_0, \\ c^{(2)}_{0,-1} &= -\frac{3}{16}(1-2s_0^2), \qquad c^{(2)}_{0,1} = \frac{3}{16}(1-2s_0^2), \\ c^{(2)}_{0,-2} &= \frac{3}{32}\alpha_0 s_0, \qquad c^{(2)}_{0,2} = \frac{3}{32}\alpha_0 s_0, \end{aligned} \right\} \tag{7.7.6}$$

а $\bar{c}^{(2)}_{0,h}$ определяются формулой

$$\bar{c}^{(2)}_{0,0}=0, \quad \bar{c}^{(2)}_{0,h}=\frac{3}{2}s_0^2 b^{(2)}_{0,h}. \tag{7.7.7}$$

4. Возмущения элемента $\omega$:

$$\delta\omega=-\alpha_0\delta\Omega+\sqrt{1-e_0^2}\sum\gamma^{(2)}_{0,h}d^{(2)}_{0,h}\sin(2u'+h\tilde{\Omega})+$$
$$+\frac{2+3e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}}\sum\bar{\gamma}^{(2)}_{0,h}\bar{d}^{(2)}_{0,h}\sin(2u'+h\tilde{\Omega}) \tag{7.7.8}$$
$$(h=0,\pm1,\pm2).$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} d^{(2)}_{0,0}&=\frac{9}{16}(2-3s_0^2),\\ d^{(2)}_{0,-1}&=-\frac{9}{8}\alpha_0 s_0, & d^{(2)}_{0,1}&=\frac{9}{8}\alpha_0 s_0,\\ d^{(2)}_{0,-2}&=\frac{9}{32}s_0^2, & d^{(2)}_{0,2}&=\frac{9}{32}s_0^2, \end{aligned}\right\} \tag{7.7.9}$$

а коэффициенты $\bar{d}^{(2)}_{0,h}$ даются формулой

$$\bar{d}^{(2)}_{0,0}=0, \quad \bar{d}^{(2)}_{0,h}=-6s_0 b^{(2)}_{0,h}. \tag{7.7.10}$$

## § 7.8. Долгопериодические возмущения четвертого класса

К последнему, четвертому классу возмущений отнесем те возмущения, период которых по $v$ равен $\frac{2\pi}{2\nu+k\lambda'+h\mu}$, где $k=\pm2$; $h=0,\pm1,\pm2$.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma_{2,h}=\frac{\beta'^2 l^{(k)}_{2,h}}{2\nu+k\lambda'+h\mu}, \tag{7.8.1}$$

$$\bar{\gamma}_{2,h}=\frac{\beta'^2\varepsilon_0^2 l^{(k)}_{2,h}}{(2\nu+k\lambda'+h\mu)^2}, \tag{7.8.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} l^{(-2)}_{2,0}&=s'^2,\\ l^{(-2)}_{2,-1}&=s'(1-\alpha'), & l^{(-2)}_{2,1}&=s'(1+\alpha'),\\ l^{(-2)}_{2,-2}&=(1-\alpha')^2, & l^{(-2)}_{2,2}&=(1+\alpha')^2 \end{aligned}\right\} \tag{7.8.3}$$

и

$$l^{(2)}_{2,\,h} = l^{(2)}_{0,\,h}.$$

Тогда формулы для возмущений можно записать в следующем виде:

$$\delta a = 0, \tag{7.8.4}$$

$$\delta e = e_0 \sqrt{1-e_0^2} \sum \gamma^{(k)}_{2,\,h} a^{(k)}_{2,\,h} \cos(2g' + ku' + h\widetilde{\Omega}), \tag{7.8.5}$$

$$\delta i = \frac{e_0^2}{\alpha_0 \sqrt{1-e_0^2}} \sum \gamma^{(k)}_{2,\,h} b^{(k)}_{2,\,h} \cos(2g' + ku' + h\widetilde{\Omega}), \tag{7.8.6}$$

$$\delta\Omega = \frac{e_0^2}{s_0 \sqrt{1-e_0^2}} \sum (\gamma^{(k)}_{2,\,h} c^{(k)}_{2,\,h} + \bar{\gamma}^{(k)}_{2,\,h} \bar{c}^{(k)}_{2,\,h}) \sin(2g' + ku' + h\widetilde{\Omega}), \tag{7.8.7}$$

$$\delta\omega = -\alpha_0 \delta\Omega + \sqrt{1-e_0^2} \sum \gamma^{(k)}_{2,\,h} d^{(k)}_{2,\,h} \sin(2g' + ku' + h\widetilde{\Omega}) + \frac{e_0^2}{\sqrt{1-e_0^2}} \sum \bar{\gamma}^{(k)}_{2,\,h} \bar{d}^{(k)}_{2,\,h} \sin(2g' + ku' + h\widetilde{\Omega}). \tag{7.8.8}$$

Здесь

$$k = \pm 2; \quad h = 0, \pm 1, \pm 2,$$

а коэффициенты $a^{(k)}_{2,\,h}$, $b^{(k)}_{2,\,h}$, $c^{(k)}_{2,\,h}$ и $d^{(k)}_{2,\,h}$ приведены в таблицах 15—18. Что касается коэффициентов $\bar{c}^{(k)}_{2,\,h}$ и $\bar{d}^{(k)}_{2,\,h}$, то они

Таблица 15

**Коэффициенты $a^{(k)}_{2,\,h}$**

| $h$ \ $k$ | −2 | 2 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{45}{32} s_0^2$ | $\frac{45}{32} s_0^2$ |
| −1 | $\frac{15}{16} s_0 (1-\alpha_0)$ | $-\frac{15}{16} s_0 (1-\alpha_0)$ |
| 1 | $\frac{15}{16} s_0 (1+\alpha_0)$ | $-\frac{15}{16} s_0 (1+\alpha_0)$ |
| −2 | $\frac{15}{64} (1-\alpha_0)^2$ | $\frac{15}{64} (1-\alpha_0)^2$ |
| 2 | $\frac{15}{64} (1+\alpha_0)^2$ | $\frac{15}{64} (1+\alpha_0)^2$ |

Таблица 16

**Коэффициенты** $b_{2,h}^{(k)}$

| $h$ \ $k$ | $-2$ | $2$ |
|---|---|---|
| 0 | $-\frac{45}{32}\alpha_0^2 s_0$ | $-\frac{45}{32}\alpha_0^2 s_0$ |
| $-1$ | $-\frac{15}{32}\alpha_0(1-\alpha_0)(1+2\alpha_0)$ | $\frac{15}{32}\alpha_0(1-\alpha_0)(1+2\alpha_0)$ |
| 1 | $\frac{15}{32}\alpha_0(1+\alpha_0)(1-2\alpha_0)$ | $-\frac{15}{32}\alpha_0(1+\alpha_0)(1-2\alpha_0)$ |
| $-2$ | $-\frac{15}{64}s_0\alpha_0(1-\alpha_0)$ | $-\frac{15}{64}s_0\alpha_0(1-\alpha_0)$ |
| 2 | $-\frac{15}{64}s_0\alpha_0(1+\alpha_0)$ | $-\frac{15}{64}s_0\alpha_0(1+\alpha_0)$ |

Таблица 17

**Коэффициенты** $c_{2,h}^{(k)}$

| $h$ \ $k$ | $-2$ | $2$ |
|---|---|---|
| 0 | $-\frac{45}{32}\alpha_0 s_0$ | $-\frac{45}{32}\alpha_0 s_0$ |
| $-1$ | $-\frac{15}{32}(1+\alpha_0-2\alpha_0^2)$ | $\frac{15}{32}(1+\alpha_0-2\alpha_0^2)$ |
| 1 | $\frac{15}{32}(1-\alpha_0-2\alpha_0^2)$ | $-\frac{15}{32}(1-\alpha_0-2\alpha_0^2)$ |
| $-2$ | $-\frac{15}{64}s_0(1-\alpha_0)$ | $-\frac{15}{64}s_0(1-\alpha_0)$ |
| 2 | $\frac{15}{64}s_0(1+\alpha_0)$ | $\frac{15}{64}s_0(1+\alpha_0)$ |

выражаются через $a_{2,h}^{(k)}$ и $b_{2,h}^{(k)}$ такими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}_{2,h}^{(k)} &= \frac{3}{2}\frac{s_0^2}{\alpha_0} b_{2,h}^{(k)} - 6s_0\alpha_0 a_{2,h}^{(k)}, \\ \bar{d}_{2,h}^{(k)} &= (6-9s_0^2)\, a_{2,h}^{(k)} - 6s_0 b_{2,h}^{(k)}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.8.9)$$

Таблица 18

**Коэффициенты** $d^{(k)}_{2,\,h}$

| $h$ \ $k$ | $-2$ | $2$ |
|---|---|---|
| 0 | $-\frac{45}{32}s_0^2$ | $-\frac{45}{32}s_0^2$ |
| $-1$ | $-\frac{15}{16}s_0(1-\alpha_0)$ | $\frac{15}{16}s_0(1-\alpha_0)$ |
| $+1$ | $-\frac{15}{16}s_0(1+\alpha_0)$ | $\frac{15}{16}s_0(1+\alpha_0)$ |
| $-2$ | $-\frac{15}{64}(1-\alpha_0)^2$ | $-\frac{15}{64}(1-\alpha_0)^2$ |
| $+2$ | $-\frac{15}{64}(1+\alpha_0)^2$ | $-\frac{15}{64}(1+\alpha_0)^2$ |

## § 7.9. Возмущения элемента $M$

Согласно (4.11.14) и (4.11.15) время $t$ связано с переменной $v$ следующим уравнением:

$$\frac{dt}{dv}=\frac{\xi^2+c^2\eta^2}{m_2}\left\{1+\frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e}+\frac{\partial \Phi'}{\partial u'}\right)\right\}, \qquad (7.9.1)$$

где $m_2$ дается формулой (3.17.16).

Применяя метод, уже использованный нами в случае зональных и тессеральных гармоник, мы можем легко получить следующую формулу для возмущений в $t$:

$$n_0^{(0)}\delta t=-\frac{2+e_0\cos v}{(1+e_0\cos v)^2}\sqrt{1-e_0^2}\sin v\,\delta e+$$
$$+\frac{p_0}{e_0}(1-e_0^2)^{3/2}\int\frac{\partial F'}{\partial e_0}\,dv-3a_0\lambda'\int\int\frac{\partial R'}{\partial u'}\,dv\,dv, \qquad (7.9.2)$$

где $n_0^{(0)}$ — среднее аномалистическое движение для промежуточной орбиты.

1. Вековой член в $n_0^{(0)}\delta t$. Обозначим через $\lambda''$ коэффициент при вековом члене в $n_0^{(0)}\,\delta t$. Тогда из (7.9.2) найдем

$$\lambda''=\frac{\beta'^2}{32}(8+15e_0^2)(2-3s'^2)(2-3s_0^2), \qquad (7.9.3)$$

где, как и раньше, $\beta'^2$ определяется формулой (7.4.3).

2. Периодические члены. Прежде всего имеем

$$\frac{p_0}{e_0}\int\frac{\partial F'}{\partial e_0}\,dv=\beta'^2\bar b_0\sum\frac{(k,\,0,\,h)}{k\lambda'+h\mu}\sin(ku'+h\widetilde\Omega)+$$
$$+\beta'^2\bar b_2\sum\frac{(k\quad j,\,h)}{k\lambda'+j\nu+h\mu}\sin(ku'+jg'+h\widetilde\Omega),\qquad(7.9.4)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\bar b_0&=\frac{5}{2}(4+3e_0^2)(1-e_0^2)^{-3/2},\\ \bar b_2&=-\frac{5}{2}(2+5e_0^2)(1-e_0^2)^{-3/2}.\end{aligned}\right\}\qquad(7.9.5)$$

Далее находим

$$-3\,\frac{a_0\lambda'}{(1-e_0^2)^{3/2}}\int\int\frac{\partial R'}{\partial u'}\,dv\,dv=$$
$$=\beta'^2\lambda'\bar a_0\sum\frac{(2,\,0,\,h)}{(2\lambda'+h\mu)^2}\sin(2u'+h\widetilde\Omega)+$$
$$+\beta'^2\lambda'\bar a_2\sum\frac{(2,\,j,\,h)}{(2\lambda'+j\nu+h\mu)^2}\sin(2u'+jg'+h\widetilde\Omega).\qquad(7.9.6)$$

Здесь $j=\pm2$, а

$$\bar a_0=-6(1-e_0^2)^{-1},\ \bar a_2=6e_0^2\frac{1+2\sqrt{1-e_0^2}}{1+\sqrt{1-e_0^2}}(1-e_0^2)^{-1}.\qquad(7.9.7)$$

Перейдем теперь согласно § 4.13 от возмущений в $t$ к возмущениям в $v$, а затем к $M$. Тогда будем иметь

$$\delta M=\sum q_{0,\,h}\sin h\widetilde\Omega+\sum q_{2,\,h}\sin(2g'+h\widetilde\Omega)+$$
$$+\sum q^{(2)}_{0,\,h}\sin(2u'+h\widetilde\Omega)+\sum q^{(2)}_{j,\,h}\sin(2u'+jg'+h\widetilde\Omega),\qquad(7.9.8)$$

где

$$q_{0,\,h}=\beta'^2\bar b_0\,\frac{(0,\,0,\,h)}{h\mu}\qquad(h=1,\,2),\qquad(7.9.9)$$

$$q_{2,\,h}=\beta'^2\bar b_2\,\frac{(0,\,2,\,h)}{2\nu+h\mu}\qquad(h=0,\,\pm1,\,\pm2),\qquad(7.9.10)$$

$$q^{(2)}_{0,\,h}=\beta'^2(2,\,0,\,h)\left\{\frac{\bar b_0}{2\lambda'+h\mu}+\frac{\lambda'\bar a_0}{(2\lambda'+h\mu)^2}\right\}\qquad(7.9.11)$$
$$(h=0,\,\pm1,\,\pm2),$$

$$q^{(2)}_{j,\,h}=\beta'^2(2,\,j,\,h)\left\{\frac{\bar b_2}{2\lambda'+j\nu+h\mu}+\frac{\lambda'\bar a_2}{(2\lambda'+j\nu+h\mu)^2}\right\}\qquad(7.9.12)$$
$$(h=0,\,\pm1,\,\pm2)\quad(j=\pm2),$$

причем коэффициенты $(k, j, h)$ определяются формулами (7.2.5) и табл. 14.

Заметим, что под $\delta M$ здесь понимается только совокупность чисто периодических членов. Что касается векового члена в $v$ или $M$, то его можно ввести сразу в формулы промежуточного движения, заменяя $\lambda$ на $\lambda - \lambda''$.

В заключение этого параграфа рассмотрим величины $g'$ и $\widetilde{\Omega}$, которые входят аргументами в формулы для возмущений. Согласно (7.6.6) и (7.2.3) $g'$ и $\widetilde{\Omega}$ определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} g' &= \nu v + \omega_0^*, \\ \widetilde{\Omega} &= \mu v + \Omega_0 - \Omega', \\ \omega_0^* &= \omega_0 - \frac{\pi}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.9.13)$$

где $\Omega'$ — долгота Луны или Солнца, отсчитываемая в плоскости экватора Земли от точки весеннего равноденствия.

Заменяя в (7.9.13) $v$ на $M = n(t - t_0) + M_0$, мы получим

$$\left.\begin{aligned} g' &= \nu n (t - t_0) + g_0', \\ \widetilde{\Omega} &= \mu n (t - t_0) + h_0 - \Omega', \end{aligned}\right\} \qquad (7.9.14)$$

где

$$\left.\begin{aligned} g_0' &= \omega_0 + \nu M_0 - \frac{\pi}{2}, \\ h_0 &= \Omega_0 + \mu M_0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.9.15)$$

Вопрос об определении $u'$ и $\Omega'$ мы рассмотрим в следующем параграфе.

## § 7.10. Определение элементов Луны и Солнца

В формулы для возмущений элементов помимо масс и больших полуосей возмущающих тел входят также наклоны, долготы узлов и перигеев Луны и Солнца, отнесенные к плоскости экватора.

Рассмотрим сначала вопрос о вычислении указанных величин, связанных с Солнцем. В этом случае, очевидно,

$\Omega' = 0$ и $i' = \varepsilon'$, где $\varepsilon'$ — наклон эклиптики к экватору. Поскольку движение перигелия Земли очень мало́ (годичное изменение равно примерно 1″), то можно принять, что $\nu' = 0$ и, следовательно, $u' = \lambda_\odot$, где $\lambda_\odot$ — средняя долгота Солнца. Таким образом, в случае Солнца мы имеем

$$i' = \varepsilon', \; u' = \lambda_\odot, \; \Omega' = 0. \quad (7.10.1)$$

При этом для вычисления $\lambda_\odot$ может служить формула, которая приводится в Астрономическом Ежегоднике.

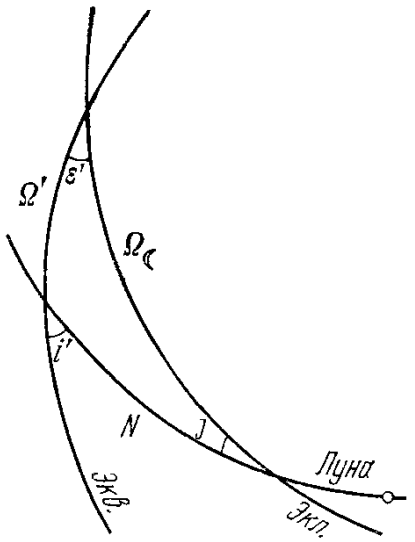


Рис. 21. Элементы орбиты Луны.

Перейдем теперь к случаю Луны. На рис. 21 через $J$ и $\Omega_\leftmoon$ обозначены наклон и долгота узла Луны, отнесенные к плоскости эклиптики, а через $N$ обозначена дуга лунной орбиты от точки пересечения ее с экватором до точки пересечения с эклиптикой. Из сферического треугольника находим

$$\cos i' = \cos\varepsilon' \cos J - \sin\varepsilon' \sin J \cos\Omega_\leftmoon, \quad (7.10.2)$$

$$\sin\Omega' = \frac{\sin J}{\sin i'} \sin\Omega_\leftmoon, \quad (7.10.3)$$

$$\sin N = \frac{\sin\varepsilon'}{\sin i'} \sin\Omega_\leftmoon. \quad (7.10.4)$$

Так как $\varepsilon'$, $J$ и $\Omega_\leftmoon$ приводятся в Астрономическом ежегоднике, то формулы (7.10.2)—(7.10.4) дают возможность определить $i'$, $\Omega'$ и $N$. Что касается аргумента перигея Луны $u'$, то он может быть найден из равенства

$$u' = \lambda_\leftmoon - \Omega_\leftmoon + N, \quad (7.10.5)$$

где $\lambda_\leftmoon$ — средняя долгота Луны, значения которой также приводятся в Астрономическом Ежегоднике.

Заметим, что поскольку $\varepsilon'$ и $J$ мало изменяются с временем и $J$ — малая величина, то на промежутке времени около одного года $i'$ может рассматриваться как величина постоянная.

## § 7.11. Некоторые свойства возмущений

Полученные в предыдущих параграфах формулы для возмущений справедливы при всех $e_0 < 1$, в том числе и при $e_0 = 0$. Величина возмущений, как правило, быстро растет при возрастании $e_0$.

С принятой точностью элемент $a$ является постоянным, а элементы $e$ и $i$ не имеют вековых возмущений. Вековые члены содержатся только в возмущениях элементов $\Omega$, $\omega$ и $M$.

Все периодические возмущения в зависимости от периода разделены на четыре класса. Период возмущений первого класса полностью определяется средним движением элемента $\Omega$. Эти возмущения тем значительнее, чем ближе $i_0$ к 90°. Они не обращаются в нуль при $e_0 = 0$, за исключением возмущений элементов $a$ и $e$, которые для всех $e_0$ равны нулю.

Период возмущений второго класса определяется средними движениями элементов $\Omega$ и $\omega$. Возмущения этого класса в элементах $e$, $i$, $\Omega$ и $e\cos\omega$ и $e\sin\omega$ обращаются в нуль при $e_0 = 0$.

Периоды возмущений третьего и четвертого классов в случае Солнца мало отличаются от периодов возмущений первого и второго классов. В случае Луны период этих возмущений близок к половине периода обращения Луны относительно Земли. Эти возмущения, таким образом, имеют гораздо меньший период, чем все перечисленные выше возмущения. Зависимость возмущений третьего и четвертого классов от $e_0$ аналогична зависимости в случае возмущений первого и второго классов соответственно.

Все возмущения очень быстро возрастают с увеличением $a_0$. Вековые неравенства возрастают как $a_0^{3/2}$, а долгопериодические — как $a_0^5$.

Более сложной оказывается зависимость возмущений от $i_0$. Рассмотрим возмущения первого и второго классов. Амплитуды этих возмущений содержат в знаменателях величины

$$j\nu + n\mu,$$

где $j$ и $n$ — целые числа. При некоторых $i_0$ эти величины могут быть сколь угодно малыми. Табл. 19 содержит значения $i_0$, при которых знаменатели амплитуд возмущений первого и второго классов близки к нулю.

Таблица 19

**Критические значения $i_0$**

| $j$, $n$ | $i_0$ | $j$, $n$ | $i_0$ |
|---|---|---|---|
| 0, $n$ | 90° | 2, +1 | 54°00′ 111°00′ |
| 2, 0 | 63°30′ 116°30′ | 2, −2 | 73°10′ 133°40′ |
| 2, −1 | 69°00′ 126°00′ | 2, +2 | 46°20′ 106°50′ |

При этих значениях $i_0$ как амплитуды, так и периоды возмущений становятся очень большими величинами. Поведение возмущений в критических случаях необходимо рассмотреть отдельно.

Критические значения $i_0$ для возмущений третьего и четвертого классов существенно зависят от величины $a_0$.

Величина возмущений зависит главным образом от следующих характеристик:

$$\beta'^2,\ \varepsilon_0^2,\ \lambda'.$$

В табл. 20 приведены значения этих величин для различных значений $a_0$. Эта таблица дает представление о порядке возмущений. Так, $\beta'^2$ характеризует порядок вековых возмущений, а $\frac{\beta'^2}{\varepsilon_0^2}$ и $\frac{\beta'^2}{\lambda'}$ характеризуют различные долгопериодические возмущения.

Таблица 20

**Значения $\beta'^2$, $\lambda'$ и $\varepsilon_0^2$**

| № | $a_0$ (км) | $\beta'^2 \cdot 10^6$ | | $\lambda' \cdot 10^3$ | | $\varepsilon_0 \cdot 10^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Луна | Солнце | Луна | Солнце | $e_0^2 = 0$ |
| 1 | 7 000 | 0,071 | 0,034 | 2,4 | 0,18 | 0,90 |
| 2 | 8 000 | 0,112 | 0,048 | 3,1 | 0,22 | 0,67 |
| 3 | 10 000 | 0,216 | 0,098 | 4,2 | 0,31 | 0,44 |
| 4 | 20 000 | 1,81 | 0,72 | 12,0 | 0,85 | 0,11 |

Рассмотрим теперь конкретные примеры. Таблицы 21 и 22 содержат результаты вычислений по формулам § 7.4

Таблица 21

**Вековые возмущения Ω**

| № | $\Delta\dot{\Omega}_{☾}$ | $\Delta\dot{\Omega}_{\odot}$ | $\Delta\dot{\Omega}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | —0°,00024 | —0°,00013 | —0°,00037 |
| 2 | —0,00027 | —0,00013 | —0,00040 |
| 3 | —0,00031 | —0,00016 | —0,00047 |
| 4 | —0,00009 | —0,00004 | —0,00013 |
| 5 | 0,00004 | 0,00002 | 0,00006 |

Таблица 22

**Вековые возмущения ω**

| № | $\Delta\dot{\omega}_{☾}$ | $\Delta\dot{\omega}_{\odot}$ | $\Delta\dot{\omega}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0°,00034 | 0°,00018 | 0°,00052 |
| 2 | 0,00027 | 0,00014 | 0,00041 |
| 3 | 0,00028 | 0,00014 | 0,00042 |
| 4 | —0,00002 | —0,00001 | —0,00004 |
| 5 | —0,00017 | —0,00008 | —0,00025 |

вековых возмущений для пяти спутников, элементы которых приведены в табл. 6 § 3.16. Вторые и третьи столбцы этих таблиц дают суточные изменения элементов Ω и ω, обусловленные Луной и Солнцем. Суммарные возмущения от Луны и Солнца приводятся в четвертых столбцах.

Из этих таблиц видно, во-первых, что вклад Солнца в суточные изменения элементов Ω и ω приблизительно в два раза меньше соответствующего вклада Луны. Во-вторых, лунно-солнечные возмущения имеют тот же порядок малости, что и возмущения от зональных гармоник (не считая второй).

Рассмотрим теперь долгопериодические возмущения. Для спутника 1960 $j_2$ из наблюдений были выявлены изменения элемента $i$ на промежутке времени, равном около 5,5 месяцев. Из наблюдаемых значений были вычтены все возмущения, кроме возмущений, вызываемых притяжением Луны и Солнца и световым давлением. Для

данного спутника по формулам этой главы была получена теоретическая кривая изменения $i$ с временем. Эта кривая

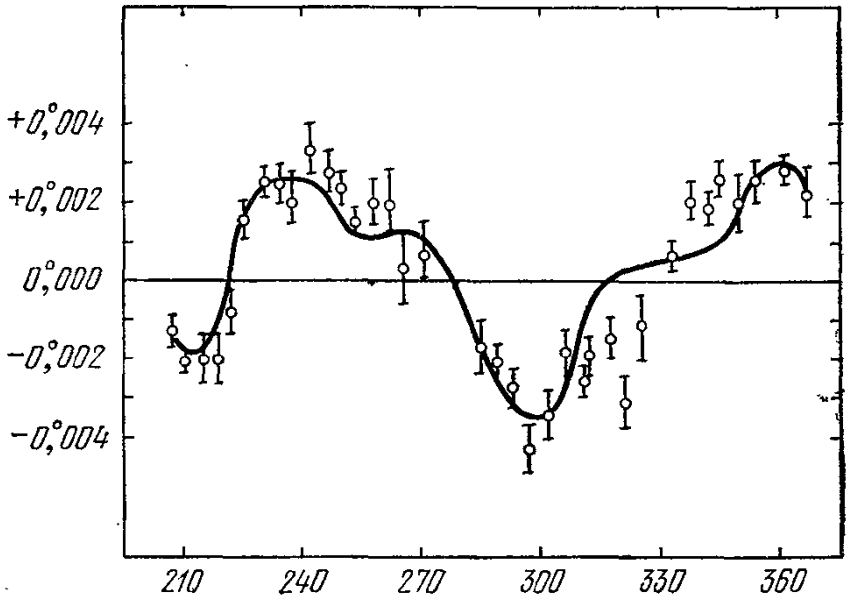


Рис. 22. Лунно-солнечные возмущения наклона орбиты спутника 1960 $j_2$.

изображена на рис. 22, на котором также нанесены наблюдаемые значения $i$ вместе со стандартными ошибками.

## § 7.12. Замечания

В этой главе мы изложили теорию лунно-солнечных возмущений, основанную на работе [3]. Она содержит вековые и долгопериодические неравенства. Короткопериодические возмущения, которые можно найти в работе И. Козаи [4], для близких спутников малы. Так, амплитуды короткопериодических возмущений в большой полуоси могут достигать только 1—2 метров.

Приведенные здесь формулы не содержат возмущений, зависящих от параллаксов и эксцентриситетов возмущающих тел. Что касается параллактических неравенств, то их нужно принимать во внимание лишь в случае Луны и для достаточно далеких спутников. Они получены в работах В. С. Уральской [5] и П. Мюзена [6]. Неравен-

ства, связанные с эксцентриситетом возмущающего тела, можно взять из работы С. Н. Вашковьяк [7] *).

Развитая в перечисленных работах теория является чисто тригонометрической, ибо она не содержит вековых членов ни в эксцентриситете, ни в наклоне орбиты спутника, и ею можно пользоваться на больших промежутках времени. Нетригонометрическая теория построена в работах А. В. Егоровой [8] и В. П. Долгачева [9]. Эта теория весьма компактна и может быть использована при изучении движения спутника на небольших временны́х интервалах.

При выводе формул для возмущений обычно предполагают, что элементы орбит Луны и Солнца постоянны, за исключением долгот узла и перигея, которые рассматриваются как линейные функции времени. Такие предположения обоснованы в случае Солнца. Что касается Луны, то ее эксцентриситет изменяется от 0,045 до 0,065, а наклон к эклиптике — от 4°57′ до 5°20′, что вносит поправку в долготу Луны в десятых долях градуса. В связи с этим И. Козаи [4] предложил использовать комбинированный численно-аналитический метод для вычисления лунно-солнечных возмущений. Короткопериодические возмущения учитываются аналитически, а для получения возмущений долгого периода численно интегрируются уравнения в вариациях для элементов орбиты спутника. При этом координаты Луны и Солнца берутся из Астрономического Ежегодника.

Качественный анализ эволюции орбиты спутника под действием внешнего возмущающего тела был проведен в интересной работе М. Л. Лидова [10]. Для этого им была использована двукратно осредненная ограниченная круговая задача трех тел, которая, как известно, интегрируется в квадратурах [11].

---

*) Работа С. Н. Вашковьяк посвящена теории движения спутников Марса, но поскольку построенная в ней теория является буквенной, она может быть использована и для изучения движения искусственных спутников Земли.

ГЛАВА VIII

# ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

## § 8.1. Введение

В предыдущих главах были рассмотрены возмущения элементов орбиты спутника, вызываемые зональными и тессеральными гармониками геопотенциала и притяжением Луны и Солнца, т. е. силами, имеющими гравитационную природу. Характерной особенностью влияния этих сил является то, что в возмущенном движении *неугловые элементы* имеют вид

$$\left.\begin{matrix} a \\ e \\ i \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} a_0 \\ e_0 \\ i_0 \end{matrix}\right\} + \text{период. члены},$$

а *угловые элементы* могут быть представлены так

$$\left.\begin{matrix} M \\ \omega \\ \Omega \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} M_0 \\ \omega_0 \\ \Omega_0 \end{matrix}\right\} + \alpha t + \text{период. члены},$$

где $a_0$, $e_0$, $i_0$, $M_0$, $\omega_0$, $\Omega_0$ и $\alpha$ — постоянные.

Хотя мы оставили в стороне вопрос о сходимости рядов для возмущений, но на основании результатов, полученных в последнее время А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом [1], можно думать, что эти ряды сходятся для большинства начальных условий из интересующей нас области движения спутника. Во всяком случае, если иметь в виду ограниченные промежутки времени, то, как показывает сравнение теоретических выводов с наблюдениями, построенная в таком виде теория хорошо представляет движение спутника на достаточно больших временны́х интервалах.

В этой главе мы рассмотрим возмущения в движении спутника, которые обусловлены сопротивлением атмосферы. Как мы вскоре увидим, влияние этой возмущающей силы качественно отличается от действия гравитационных сил. Если в случае гравитационных сил элементы $a$, $e$, $i$,

полностью определяющие область пространства, где происходит движение спутника, подвержены только периодическим колебаниям, то сопротивление атмосферы вызывает в них вековые возмущения. Именно эти возмущения — причина того, что близкие спутники имеют лишь ограниченный срок жизни. Что касается угловых элементов, то они подвержены возмущениям, пропорциональным квадрату времени.

Рассматриваемая задача имеет еще одну особенность. Если определение возмущений от гравитационных сил представляет собой главным образом математическую проблему, и точность теории зависит от совершенства применяемых методов и порядка учтенных в возмущающей функции членов, то здесь мы сталкиваемся прежде всего с трудностями физического характера, главными из которых являются не поддающиеся точному прогнозу колебания плотности атмосферы и неточные сведения о некоторых физических характеристиках, входящих в выражение для силы сопротивления. Эти трудности и накладывают серьезные ограничения на точность теории и на промежуток времени, на котором ею можно пользоваться.

Однако, несмотря на это, оказывается возможным нарисовать не только качественную картину, но и построить такую теорию возмущений от сопротивления атмосферы, которая, как показывает практика, дает вполне удовлетворительные результаты при изучении движения спутника на небольших промежутках времени.

## § 8.2. Плотность атмосферы

Плотность воздуха верхней атмосферы определяется как непосредственно, при помощи аппаратуры, установленной на спутниках и ракетах, так и косвенным путем, при помощи изучения возмущений в движении спутника, вызываемых сопротивлением атмосферы. В последние годы наиболее плодотворным оказался второй метод. Он позволил нарисовать подробную картину изменения плотности воздуха с высотой и с временем.

На рис. 23 приводится распределение плотности $\rho$ в зависимости от высоты $h$ для 1961 г., полученное Кинг-Хили и др. [2]. Поскольку на этом рисунке шкала значений плотности логарифмическая, то прямая линия строго

соответствует экспоненциальному закону изменения плотности с высотой.

Изменение плотности воздуха с временем характеризуется следующими основными эффектами:

1. Суточный эффект. В зависимости от времени суток плотность воздуха на данной высоте различна. Максимум плотности наблюдается примерно через 2 часа после полудня, а минимум — между полуночью и рассветом. Этот эффект обусловлен изменением температуры

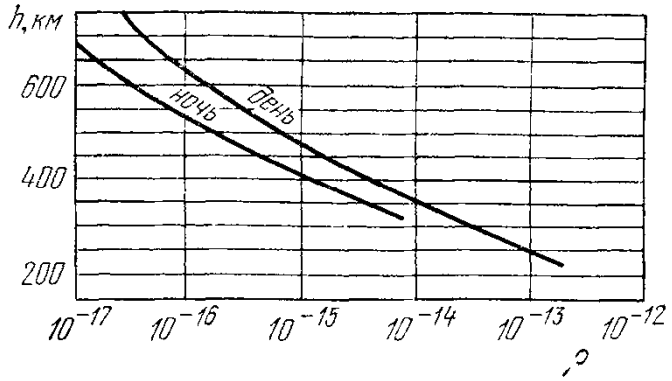


Рис. 23. Плотность воздуха ρ в $г/см^3$ в зависимости от высоты для 1961 г.

в зависимости от высоты Солнца над горизонтом. Днем массы воздуха поднимаются вверх и поверхности постоянной плотности образуют горб, направленный к Солнцу. При $h = 500$ *км* этот горб имеет высоту около 100 *км*, так что дневные значения плотности на высоте 600 *км* примерно равны ночным значениям на высоте 500 *км*. Для высоты 650 *км* максимальные значения плотности могут в 10 раз превосходить минимальные значения. Разница между дневными и ночными значениями плотности для $h = 200$ *км* мала, но и она может составлять 40% средней плотности на данной высоте.

2. Колебания плотности с периодом 27 суток. Этот эффект, период которого равен периоду вращения Солнца вокруг своей оси по отношению к Земле, связан с количеством и активностью солнечных пятен на видимой стороне Солнца. Амплитуда колебаний плотности с таким периодом на высоте 200 *км* может составлять 20%, а на высоте 600 *км* — 70% от средней плотности.

3. 6-месячные колебания. Плотность воздуха подвержена колебаниям с периодом около 6 месяцев и амплитудой, достигающей на высоте 350 *км* около 40% от средней плотности. Максимумы этих колебаний бывают в апреле и октябре, а минимумы — в январе и июне. Этот эффект связывают с наклоном оси вращения Солнца к плоскости эклиптики.

4. 11-летний цикл. Самые большие вариации плотности связаны с 11-летним циклом солнечной деятельности (рис. 24). Между максимумами и минимумами

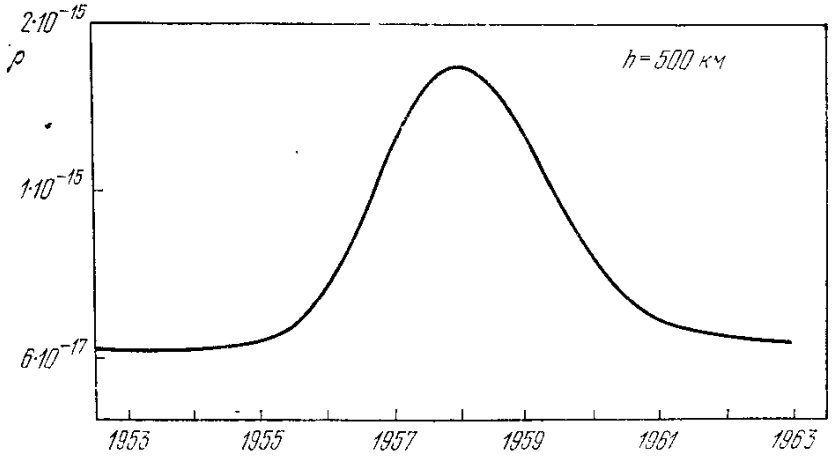


Рис. 24. Одиннадцатилетний цикл.

солнечной активности плотность воздуха убывает на высоте 300 *км*, примерно в три раза, а на высоте 600 *км* в 20 раз.

5. Иррегулярные изменения плотности. Имеются спорадические изменения плотности воздуха, связанные в первую очередь также с деятельностью Солнца. Эти изменения, которые трудно предсказать, могут длиться малое время (несколько суток или несколько часов), но могут достигать достаточно большой величины (рис. 25).

Нарисованная здесь картина, по-видимому, не является полной, ибо можно думать, что существуют и другие вариации плотности, такие, например, как приливные колебания, широтный эффект и т. д.

Таким образом, атмосфера имеет весьма сложную структуру и построение необходимой для теории достаточно полной *аналитической модели* атмосферы является делом

чрезвычайно сложным. Такая модель должна основываться на табличной *динамической модели*, которая дает зависимость плотности не только от высоты, но и от времени. Примером динамической модели может служить модель CIRA, 1965 [3] *).

Эта модель представляет собой совокупность таблиц, дающих плотность как функцию высоты в зависимости от

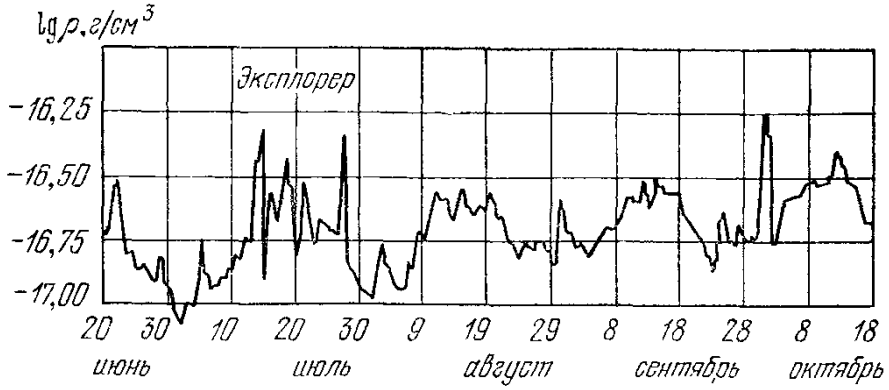


Рис. 25. Иррегулярные изменения плотности.

местного времени и одного из параметров $\overline{F}$, характеризующего среднюю на протяжении года солнечную активность. В качестве примера в Приложении (табл. 36) приводятся значения плотности для случая слабой солнечной активности в зависимости от высоты и местного времени. На рис. 26 приведены графики изменения $\lg \rho$ от высоты для момента времени, равного $4^h$, в случае слабой ($\overline{F} = 75$) и в случае сильной ($\overline{F} = 200$) солнечной активности. На рис. 27 представлена зависимость $\lg \rho$ от местного времени для разных высот.

Более полные сведения о плотности воздуха содержатся в *Стандартной атмосфере* CIRA, 1972 [4]. Эта модель дается таблицами и формулами, позволяющими находить плотность на данной высоте для данного момента времени. Основными входными данными Стандартной атмосферы, помимо высоты $h$ и местного солнечного времени, являются широта точки $\varphi$, в которой определяется плотность, склонение Солнца $\delta_\odot$, индексы $F_{10,7}$ и $\overline{F}_{10,7}$, характеризующие поток солнечного излучения на волне 10,7 *см*, и геомагнитный индекс $K_p$.

*) Cospar International Reference Atmosphere, 1965.

В силу весьма сложной зависимости плотности от времени, мы должны сначала пойти путем неизбежных упрощений. Прежде всего вместо динамической модели мы возьмем сначала *статическую модель*, дающую плотность как функцию одной высоты. Подходящую статическую модель мы можем выбрать, исходя из данных о солнечной активности и из момента местного времени, когда местный меридиан пересекает точку перигея орбиты. Примеры статических моделей содержит уже упомянутая табл. 36.

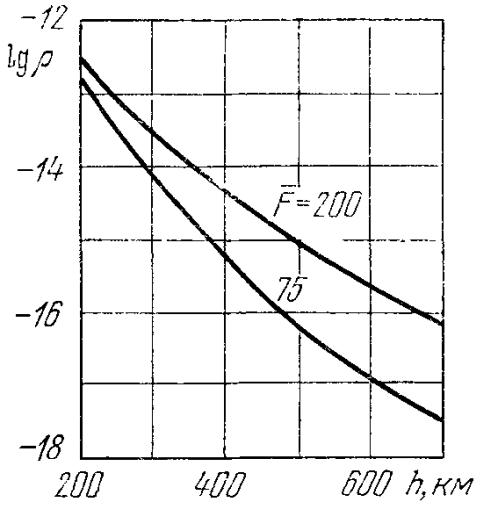


Рис. 26. Зависимость lg ρ от $h$ в случае слабой и в случае сильной солнечной активности.

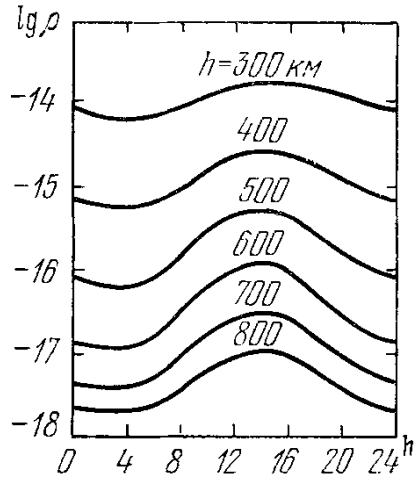


Рис. 27. Зависимость lg ρ от местного времени.

Сделаем дополнительные упрощения. Поскольку в теории движения спутника нас интересует только та область высот, в которой находится его орбита, то мы можем пользоваться *локальной моделью*, дающей поведение плотности в некотором ограниченном слое. Но, как показывают рис. 24 и 26, в первом приближении можно принять для плотности экспоненциальный закон:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \qquad (8.2.1)$$

где $H$ — постоянная, а $\rho_0$ — значение плотности в исходной точке. Если взять за эту точку перигей орбиты спутника, то высоту $h$ нужно отсчитывать от перигея.

Величина $H$, называемая *шкалой высот*, в свою очередь является функцией высоты. На рис. 28 приводятся

графики изменения $H$ с высотой для модели атмосферы CIRA, 1965 *). При изменении высоты от 200 до 800 *км* шкала высот $H$ возрастает примерно от 20 до 200 *км*. Таким образом, формула (8.2.1) тем лучше описывает распределение плотности, чем более тонкий слой рассматривается.

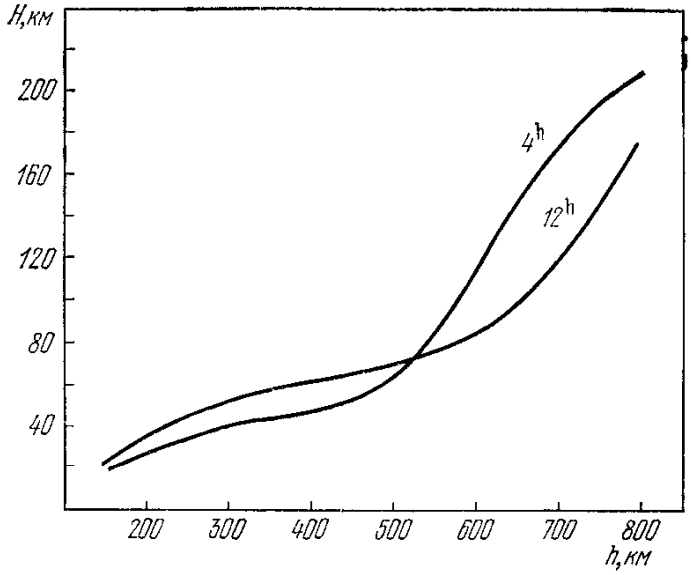


Рис. 28. Зависимость шкалы высот $H$ от $h$.

Взяв за основу формулу (8.2.1), мы можем найти главнейшие возмущения в движении спутника, вызываемые сопротивлением атмосферы. Изучив их, можно перейти к исследованию более тонких эффектов. Так, полагая в (8.2.1)

$$H = H_0 + \mu' h, \tag{8.2.2}$$

где $H_0$ и $\mu'$ — постоянные, можно найти неравенства, обусловленные изменением шкалы высот.

Далее, можно учесть суточный эффект, если воспользоваться формулой [5]

$$\rho = \rho_0 \left(1 + a' \cos^{n'} \frac{\psi'}{2}\right) \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \tag{8.2.3}$$

в которой $a'$ и $n'$ — постоянные, а $\psi'$ — угол между радиусом-вектором спутника и осью атмосферного горба.

*) См. также Приложение (табл. 37).

Так, шаг за шагом усложняя *аналитическую модель* атмосферы, мы можем добиться вполне удовлетворительного согласия теории с наблюдениями.

## § 8.3. Сила сопротивления атмосферы

При изучении поступательного движения спутника принимают во внимание лишь ту компоненту $\hat{F}$ аэродинамических сил, направление которой противоположно вектору относительной скорости спутника. Выражение для $\hat{F}$ записывают в виде

$$\hat{F} = \frac{1}{2}\rho V'^2 A C_D, \tag{8.3.1}$$

где $\rho$ — плотность воздуха, $V'$ — скорость спутника относительно атмосферы, $A$ — *площадь миделева сечения*, а $C_D$ — *аэродинамический коэффициент лобового сопротивления* (безразмерный).

Если средняя длина свободного пробега молекул воздуха значительно превосходит геометрические размеры спутника, то коэффициент $C_D$ близок к 2. В противоположном случае он мало отличается от единицы. Средняя длина свободного пробега молекул на высотах свыше 160 *км* составляет около 50 *м*. Поэтому для большинства спутников $C_D \approx 2$.

Для сферических спутников, движущихся по орбитам с высотой перигея от 180 до 500 *км*, значение $C_D$ оказывается равным 2,1—2,2. Для цилиндрических спутников, движущихся по тем же орбитам, $C_D$ может принимать значения между 2,10 и 2,25. Поэтому с ошибкой, не превосходящей 5%, можно принять, что среднее значение $C_D$ равно 2,2.

Площадь поперечного сечения $A$ для несферических спутников является величиной переменной. Поэтому, строго говоря, для изучения поступательного движения спутника необходимо знать его вращательное движение. Однако, если предположить, что при вращении спутника вокруг центра масс различные его положения равновероятны, то для $A$ можно взять среднее значение, равное 0,25 площади внешней поверхности спутника.

Из предыдущего следует, что мы не можем с высокой степенью точности знать величины $A$ и $C_D$. Но нужно иметь

в виду, что произведение $A \cdot C_D$ может определяться непосредственно из наблюдений. Что касается теории, то для нее важно то, чтобы это произведение было постоянным. Это требование имеет особое значение при определении короткопериодических возмущений и едва ли сколько-нибудь существенно при изучении долгопериодических и вековых неравенств.

## § 8.4. Функции Бесселя мнимого аргумента

Важным математическим аппаратом в теории возмущений от сопротивления атмосферы оказались *функции Бесселя мнимого аргумента*, основные свойства которых мы кратко изложим в этом параграфе.

Функция Бесселя порядка $n$ от чисто мнимого аргумента, обозначаемая через $I_n(\zeta)$, может быть определена следующим образом. Пусть $J_n(\zeta)$ — обычная функция Бесселя первого рода порядка $n$. Тогда

$$I_n(\zeta) = (-\sqrt{-1})^n J_n(\sqrt{-1}\cdot\zeta).$$

Поэтому все свойства функции $I_n(\zeta)$ могут быть легко выведены из соответствующих свойств обычных функций Бесселя [6].

Функция $I_n(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 I_n(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dI_n(\zeta)}{d\zeta} - \left(1 + \frac{n^2}{\zeta^2}\right) I_n(\zeta) = 0$$

и разлагается в следующий ряд:

$$I_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}.$$

При больших $\zeta$ для вычисления $I_n(\zeta)$ можно воспользоваться следующим асимптотическим разложением:

$$I_n(\zeta) \sim \frac{\exp(\zeta)}{\sqrt{2\pi\zeta}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(8\zeta)^k}(4n^2 - 1^2) \times \right.$$

$$\left. \times (4n^2 - 3^2) \ldots [4n^2 - (2k-1)^2]\right\}.$$

В частности, для $I_0(\zeta)$ и $I_1(\zeta)$ имеем

$$\left.\begin{aligned} I_0(\zeta) &\sim \frac{\exp(\zeta)}{\sqrt{2\pi\zeta}}\left(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\zeta}+\right.\\ &\qquad \left.+\frac{9}{128}\cdot\frac{1}{\zeta^2}+\frac{75}{1024}\cdot\frac{1}{\zeta^3}+\dots\right),\\ I_1(\zeta) &\sim \frac{\exp(\zeta)}{\sqrt{2\pi\zeta}}\left(1-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\zeta}-\right.\\ &\qquad \left.-\frac{15}{128}\cdot\frac{1}{\zeta^2}-\frac{105}{1024}\cdot\frac{1}{\zeta^3}+\dots\right). \end{aligned}\right\} \qquad (8.4.1)$$

Заметим, что при $\zeta > \frac{3}{2}$ выписанные члены в разложениях (8.4.1) обеспечивают точность в определении $I_0(\zeta)$ и $I_1(\zeta)$ до 1%.

Для функций Бесселя мнимого аргумента справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$I_{n-1}(\zeta) - I_{n+1}(\zeta) = \frac{2n}{\zeta} I_n(\zeta), \qquad (8.4.2)$$

$$I_{n-1}(\zeta) + I_{n+1}(\zeta) = 2I_n'(\zeta), \qquad (8.4.3)$$

где штрих означает производную по $\zeta$.

Весьма важным для приложений является интегральное представление $I_n(\zeta)$:

$$I_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(\zeta\cos E)\cos nE\, dE. \qquad (8.4.4)$$

Из этой формулы имеем следующее разложение в ряд Фурье функции $\exp(\zeta\cos E)$:

$$\exp(\zeta\cos E) = I_0(\zeta) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(\zeta)\cos nE. \qquad (8.4.5)$$

Другие свойства этих функций можно найти в уже упомянутой монографии [6].

## § 8.5. Уравнения для возмущений элементов $a$, $p$, $i$

Мы будем исходить из уравнений для элементов $\hat{a}$, $\hat{p}$, $\hat{s}$, полученных в § 4.10. Эти уравнения позволят нам найти возмущения, обусловленные не только сопротивлением атмосферы, но и совместным, комбинированным влиянием сопротивления и сжатия Земли.

Предположим сначала, что атмосфера не вращается относительно инерциальной системы координат. Тогда направление силы сопротивления будет противоположным направлению вектора орбитальной скорости $V$. Разложим эту силу по двум направлениям: по радиусу-вектору $\bar{r}$ и по нормали к нему. Обозначая в соответствии с § 4.10 компоненты возмущающего ускорения через $S$ и $T$, мы будем иметь

$$S = -F\frac{\dot{r}}{V}, \quad T = -F\frac{\sqrt{V^2-\dot{r}^2}}{V}, \tag{8.5.1}$$

где $F$ — величина возмущающего ускорения.

Так как вектор $\boldsymbol{B}$ перпендикулярен к вектору орбитальной скорости, то третья компонента $B$ будет равна нулю.

Подставим формулы (8.5.1) в уравнения (4.10.15) для элементов $\hat{a}$, $\hat{p}$, $\hat{s}$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\hat{a}}{dt} &= -\frac{2\hat{a}^2}{fm}VF,\\
\frac{d\hat{p}}{dt} &= \left(-2\hat{p}+\frac{2Q}{fm}\right)\frac{F}{V},\\
\frac{d\hat{s}}{dt} &= \frac{1-\hat{s}^2}{\hat{s}\,\hat{p}}\,\frac{Q}{fm}\,\frac{F}{V},
\end{aligned}\right\} \tag{8.5.2}$$

где $f$ — постоянная притяжения, $m$ — масса Земли.

Орбитальная скорость $V$ и величина $Q$ определяются формулами

$$V^2 = -\frac{fm}{\hat{a}}+\frac{2fm\,(\xi-c\sigma\eta)}{\xi^2+c^2\eta^2}, \tag{8.5.3}$$

$$Q = \frac{2fm\xi\eta\,(c^2\eta+c\sigma\xi)}{\xi^2+c^2\eta^2}. \tag{8.5.4}$$

Входящие в уравнения (8.5.2)—(8.5.4) величины $\xi$, $\eta$ даются формулами промежуточного движения:

$$\xi = a\,(1-e\cos E), \tag{8.5.5}$$

$$\eta = \frac{s\sin\theta+\gamma}{1+d\sin\theta}, \tag{8.5.6}$$

где $\theta$ и $\psi$ определяются из равенств

$$\theta = \psi + \omega - \frac{k_2^2}{8}\sin 2\psi + \frac{k_1^2}{8}\sin 2(\psi+\omega), \tag{8.5.7}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{8.5.8}$$

$$M = E - e^*\sin E + \lambda_2\sin 2(\psi+\omega), \tag{8.5.9}$$

$$M = n(t-t_0) + M_0,$$

причем

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = -\varepsilon\sigma(1-2s^2); \quad d = \varepsilon\sigma s,\\ &\bar{e} = e[1+\varepsilon^2(1-e^2)(1-2s^2)],\\ &e^* = e[1-\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2)],\\ &k_1^2 = \varepsilon^2 s^2(1-e^2), \quad k_2^2 = \varepsilon^2 s^2 e^2,\\ &\lambda_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon^2 s^2(1-e^2)^{3/2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.5.10}$$

приведем также выражения для $n$, $\nu$ и $\mu$:

$$\left.\begin{aligned} &n = \sqrt{\frac{fm}{a^3}}\left\{1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2)\right\},\\ &\nu = \frac{\varepsilon^2}{4}(12-15s^2), \quad \mu = -\frac{3}{2}\varepsilon^2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{8.5.11}$$

Здесь мы отбросили члены порядка $\varepsilon^4$.

Поскольку в формулы промежуточного движения входят вместо элементов $\hat{a}$, $\hat{p}$, $\hat{s}$ элементы $a$, $e$, $i$, связанные с ними равенствами (3.18.13)—(3.18.15), то три уравнения (8.5.2) следует заменить уравнениями для элементов $a$, $p$, $i$. Дифференцируя (3.18.13)—(3.18.15) и используя (8.5.2), находим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{da}{dt} = -2a^2[1+2\varepsilon^2\alpha^2(1-e^2)]\frac{FV}{fm} - 2\varepsilon^2\alpha^2 p\frac{F}{V},\\ &\frac{dp}{dt} = -2\left[p - \frac{Q}{fm} + 2\varepsilon^2\alpha^2 p(3+e^2)\right]\frac{F}{V} + \\ &\qquad\qquad + 4\varepsilon^2 p^2\alpha^2\frac{FV}{fm},\\ &\frac{di}{dt} = \frac{\alpha}{s}\left[\frac{Q}{fmp} - \varepsilon^2 s^2(1-e^2)\right]\frac{F}{V} - \varepsilon^2 s\alpha p\frac{FV}{fm}, \end{aligned}\right\} \tag{8.5.12}$$

где

$$\alpha = \cos i, \quad s = \sin i, \quad p = a(1 - e^2).$$

В дальнейшем нам потребуются формулы для $V^2$ и производной $E$ по $t$. Эти формулы легко получаются из (8.5.3)—(8.5.9), и мы имеем

$$V^2 = \frac{fm}{a}\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\left\{1 - \frac{Q}{fma(1-e^2\cos^2 E)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon^2(1-e^2)\alpha^2(1-e\cos E)}{1+e\cos E}\right\}, \qquad (8.5.13)$$

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{fm}{a^3}}(1-e\cos E)^{-1}\left\{1 - \frac{2\lambda_2\sqrt{1-e^2}\cos 2\theta}{(1-e\cos E)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon^2(1-e^2)\alpha^2(3-e\cos E)}{2(1-e\cos E)}\right\}, \qquad (8.5.14)$$

где $Q$ определяется из равенства (8.5.4).

## § 8.6. Уравнения для вековых возмущений элементов $a$, $p$, $i$

Будем считать, что возмущающее ускорение, сообщаемое спутнику сопротивлением атмосферы, дается формулой (см. § 8.3)

$$F = \frac{AC_D}{2m_0}\rho V^2, \qquad (8.6.1)$$

в которой $A$ и $m_0$ — площадь миделева сечения и масса спутника, $C_D$ — коэффициент сопротивления, $\rho$ — плотность воздуха.

Как отмечалось в § 8.2, в первом приближении мы можем принять, что плотность $\rho$ зависит от геоцентрического расстояния $r$ по экспоненциальному закону. Мы не внесем в этот закон существенных изменений, если заменим радиус-вектор $r$ координатой $\xi$, поскольку при $\xi = \text{const}$ мы получаем сжатый эллипсоид, мало отличающийся от сферы радиуса $r$. Очевидно, в результате такой замены мы будем частично учитывать сплюснутость атмосферы у полюсов.

Итак, пусть

$$\rho = \rho_0 \exp\frac{\xi_0 - \xi}{H}, \qquad (8.6.2)$$

где $\xi_0 = a_0(1 - e_0)$ соответствует внутреннему ограничивающему эллипсоиду, $\rho_0$ — значение плотности на этом эллипсоиде, а $H$ — шкала высот.

Заменяя $\xi$ его значением из (8.5.5) и полагая

$$k = \exp\left(\frac{a_0 - a - a_0 e_0}{H}\right), \tag{8.6.3}$$

мы можем представить формулу (8.6.2) в виде

$$\rho = \rho_0 k \exp\left(\frac{ae}{H}\cos E\right).$$

Если далее ввести обозначения

$$\zeta = \frac{ae}{H}, \quad \varkappa = \frac{AC_D}{m_0}, \tag{8.6.4}$$

то для ускорения $F$ найдем

$$F = \frac{1}{2} k\varkappa\rho_0 V^2 \exp(\zeta\cos E). \tag{8.6.5}$$

Подставим теперь равенства (8.6.5) и (8.5.13) в уравнения (8.5.12), а затем разделим правые части полученных уравнений на (8.5.14) и умножим их на $\dot{E}$. Тогда, если отбросить члены, заведомо приводящие к периодическим неравенствам, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -a^2\varkappa\rho_0 k \frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}} \Phi \exp(\zeta\cos E)\frac{dE}{dt},\\
\frac{dp}{dt} &= -ap\varkappa\rho_0 k \frac{(1+e\cos E)^{1/2}}{(1-e\cos E)^{-1/2}} \Phi \exp(\zeta\cos E)\frac{dE}{dt},\\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{2} a\varkappa\rho_0 k\varepsilon^2(1-e^2)s\alpha \times\\
&\qquad \times\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{1/2} \exp(\zeta\cos E)\frac{dE}{dt},
\end{aligned}\right\} \tag{8.6.6}$$

где с точностью до $\varepsilon^2 e$ включительно

$$\Phi = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(12 - 15s^2) - \frac{\varepsilon^2 e}{2}(8 - 5s^2)\cos E. \tag{8.6.7}$$

Поскольку нас интересуют только вековые возмущения, мы проделаем с уравнениями (8.6.6) следующие преобразования. Мы осредним правые части этих уравнений по $t$ на промежутке времени, равном одному аномалисти-

ческому периоду обращения спутника $T$. Обозначая через $[a]$, $[p]$, $[i]$ осредненные значения правых частей, мы будем иметь

$$[a] = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{da}{dt}\, dt.$$

Для вычисления интеграла перейдем от $t$ к новой независимой переменной $E$. Тогда, имея в виду, что при изменении $t$ от 0 до $T$ переменная $E$ изменяется от 0 до $2\pi$, найдем

$$[a] = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{da}{dt} \frac{dt}{dE}\, dE.$$

Подставляя сюда вместо $\frac{da}{dt}$ его выражение из (8.6.6) и замечая, что $T = \frac{2\pi}{n}$, получим

$$[a] = -\frac{na^2\rho_0 \varkappa k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}} \Phi \exp(\zeta \cos E)\, dE. \quad (8.6.8)$$

Чтобы вычислить интеграл (8.6.8), воспользуемся следующей процедурой. Прежде всего согласно (8.4.5) имеем

$$\exp(\zeta \cos E) = I_0(\zeta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\zeta) \cos nE. \quad (8.6.9)$$

Далее легко находим

$$(1+e\cos E)^{3/2}(1-e\cos E)^{-1/2} = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \left(2e + \frac{3}{4}e^3\right)\cos E + \frac{3}{4}e^2 \cos 2E + \frac{e^3}{4}\cos 3E + \ldots, \quad (8.6.10)$$

где невыписанные члены имеют порядок $e^4$.

Подставляя (8.6.7), (8.6.9) и (8.6.10) в (8.6.8) и интегрируя, получим

$$[a] = -na^2\rho_0 \varkappa k \left\{ \left(1 + \frac{3}{4}e^2\right) I_0 + e\left(2 + \frac{3}{4}e^2\right) I_1 + \frac{3}{4}e^2 I_2 + \frac{e^3}{4} I_3 + \frac{\varepsilon^2}{2}(12 - 15s^2) I_0 + \frac{\varepsilon^2 e}{2}(16 - 25s^2) I_1 \right\}. \quad (8.6.11)$$

Аналогичным образом найдем

$$[p] = -na^2\rho_0 \varkappa k \left\{ \left(1 - \frac{5}{4} e^2\right) I_0 - \frac{e^2}{4} I_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon^2}{2} (12 - 15s^2) I_0 - \frac{\varepsilon^2 e}{2} (8 - 5s^2) I_1 \right\}, \qquad (8.6.12)$$

$$[i] = -\frac{1}{2} na\rho_0 \varkappa k \varepsilon^2 s\alpha \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} e^2\right) I_0 + \right.$$
$$\left. + e \left(1 - \frac{5}{8} e^2\right) I_1 + \frac{e^2}{4} I_2 + \frac{e^3}{8} I_3 \right\}. \qquad (8.6.13)$$

В формулах для $[a]$ и $[p]$ мы сохранили члены порядка $\varepsilon^0 e^3$ и $\varepsilon^2 e$, а в формуле для $[i]$ члены, пропорциональные $\varepsilon^2 e^3$. Дифференциальные уравнения для $a$, $p$, $i$ теперь запишутся в виде

$$\frac{da}{dt} = [a], \quad \frac{dp}{dt} = [p], \quad \frac{di}{dt} = [i]. \qquad (8.6.14)$$

Правые части уравнений (8.6.14) являются функциями элементов $a$, $p$, $i$, а при $\varepsilon = 0$ — функциями элементов $a$ и $p$. Поэтому естественным способом решения этих уравнений является следующий. Отбрасывая сначала малые члены с $\varepsilon^2$, мы получим систему двух уравнений для $a$ и $p$, которая не содержит явно времени, вследствие чего она легко сводится к одному уравнению первого порядка. Его интегрирование даст нам зависимость $a$ от $p$. После этого находим связь $p$, а затем и $a$, с временем $t$. Подставляя найденные формулы для $a$ и $p$ в слагаемые, пропорциональные $\varepsilon^2$, можно учесть и эти малые члены.

Такой способ полностью оправдан, если мы хотим проследить изменение элементов на большом промежутке времени, близком ко всему времени жизни спутника. Этим способом мы воспользуемся в § 8.14. Однако, когда речь идет о небольших временных интервалах, охватывающих несколько суток, можно воспользоваться обычным методом последовательных приближений и в случае не очень близких спутников ограничиться лишь первым приближением.

Если обозначить через $\Delta a$, $\Delta p$, $\Delta i$ возмущения элементов $a$, $p$, $i$, то в этом случае будем иметь

$$\Delta a = [a]_0 (t - t_0), \quad \Delta p = [p]_0 (t - t_0), \quad \Delta i = [i]_0 (t - t_0), \qquad (8.6.15)$$

где $[a]_0$, $[e]_0$ и $[i]_0$ даются формулами (8.6.11)—(8.6.13), в которых $a$, $e$, $i$ должны быть заменены их начальными значениями: $a_0$, $e_0$, $i_0$.

## § 8.7. Асимптотические формулы для возмущений элементов $a$, $p$, $e$, $i$, $n$

Полученные в предыдущем параграфе формулы дают точность до 1%, если $e < 0{,}2$. В случае бо́льших эксцентриситетов в этих формулах необходимо сохранить члены высших степеней $e$, а при очень больших эксцентриситетах необходимо, по-видимому, использовать другой метод. С другой стороны, при $e < 0{,}2$ формулы § 8.6 можно существенно упростить, если воспользоваться асимптотическими разложениями для функций Бесселя. Для этого, однако, необходимо наложить ограничения на величину $\zeta$, а именно при сохранении точности в 1% нужно, чтобы $\zeta > 3$. Но тогда из формулы (8.6.4) будет следовать, что $e > 0{,}02$. Случай

$$0{,}02 < e < 0{,}2$$

представляет наибольший интерес для практики и мы его рассмотрим подробнее.

Подставляя (8.4.1) и (8.4.2) в формулы (8.6.11) — (8.6.13), мы легко находим следующие выражения для коэффициентов вековых возмущений элементов $a$, $p$, $i$:

$$[a]_0 = -\frac{n_0 a_0^2 \rho_0 \varkappa}{\sqrt{2\pi\zeta_0}} \left\{ 1 + 2e_0 + \frac{3}{2} e_0^2 + e_0^3 + \right.$$
$$+ \frac{1}{8\zeta_0} \left(1 - 6e_0 - \frac{21}{2} e_0^2\right) + \frac{3}{128\zeta_0^2} (3 - 10e_0) +$$
$$+ \frac{75}{1024\zeta_0^3} + \frac{\varepsilon_0^2}{2} (12 - 15s_0^2) \left(1 + \frac{1}{8\zeta_0}\right) +$$
$$\left. + \frac{\varepsilon_0^2 e_0}{2} (16 - 25s_0^2) \right\}, \qquad (8.7.1)$$

$$[p]_0 = -\frac{n_0 a_0^2 \rho_0 \varkappa}{\sqrt{2\pi\zeta_0}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} e_0^2 + \frac{1}{8\zeta_0} \left(1 + \frac{5}{2} e_0^2\right) + \frac{9}{128\zeta_0^2} + \right.$$
$$+ \frac{75}{1024\zeta_0^3} + \frac{\varepsilon_0^2}{2} (12 - 15s_0^2) \left(1 + \frac{1}{8\zeta_0}\right) -$$
$$\left. - \frac{\varepsilon_0^2 e_0}{2} (8 - 5s_0^2) \right\}, \qquad (8.7.2)$$

$$[i]_0 = -\frac{n_0 a_0 \rho_0 \varkappa}{2\sqrt{2\pi\zeta_0}} \varepsilon_0^2 s_0 \alpha_0 \left\{1 + e_0 - \frac{e_0^2}{2} - \frac{e_0^3}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8\zeta_0}\left(1 - 3e_0 - \frac{9}{2}e_0^2\right) + \frac{3}{128\zeta_0^2}(3 - 5e_0) + \frac{75}{1024\zeta_0^3}\right\}, \quad (8.7.3)$$

где

$$\zeta_0 = \frac{a_0 e_0}{H}. \quad (8.7.4)$$

Зная изменения элементов $a$ и $p$, можно найти формулу для изменения элемента $e$. Действительно, так как

$$e^2 = 1 - \frac{p}{a},$$

то

$$2e\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{a}\frac{da}{dt} - \frac{1}{a}\frac{dp}{dt}.$$

Следовательно, если положить

$$\Delta e = [e]_0 (t - t_0), \quad (8.7.5)$$

то для $[e]_0$ будем иметь

$$[e]_0 = -\frac{n_0 a_0 \rho_0 \varkappa}{\sqrt{2\pi\zeta_0}} \left\{1 + e_0 - \frac{e_0^2}{2} - \frac{e_0^3}{2} - \right.$$

$$- \frac{1}{8\zeta_0}\left(3 + 7e_0 + \frac{5}{2}e_0^2\right) - \frac{3}{128\zeta_0^2}(5 - 19e_0) - \frac{105}{1024\zeta_0^3} +$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_0^2}{2}(12 - 15s_0^2)\left(1 - \frac{3}{8\zeta_0}\right) + 2\varepsilon_0^2 e_0\left(1 - \frac{5}{2}s_0^2\right)\right\}. \quad (8.7.6)$$

Аналогичным образом можно найти формулу, дающую изменение элемента $n$. Пусть

$$\Delta n = \hat{k}(t - t_0). \quad (8.7.7)$$

Тогда

$$\hat{k} = \frac{3n_0^2 a_0 \rho_0 \varkappa}{2\sqrt{2\pi\zeta_0}} \left\{1 + 2e_0 + \frac{3}{2}e_0^2 + e_0^3 + \frac{2 - 12e_0 - 21e_0^2}{16\zeta_0} + \right.$$

$$+ \frac{3(3 - 10e_0)}{128\zeta_0^2} + \frac{75}{1024\zeta_0^3} + \frac{\varepsilon_0^2}{2}(8 - 11s_0^2)\left(1 + \frac{1}{8\zeta_0}\right) +$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_0^2 e_0}{2}(12 - 21s_0^2)\right\}. \quad (8.7.8)$$

Напомним, что в приведенных формулах $\rho_0$ означает плотность на поверхности внутреннего ограничивающего эллипсоида, а $\varkappa$ определяется равенством (8.6.4).

## § 8.8. Вывод уравнений для возмущений угловых элементов

Возьмем теперь уравнения (4.10.17) для элементов $M$, $\omega$ и $\Omega$. Как уже отмечалось в § 4.10, в правых частях этих уравнений в коэффициентах при проекциях возмущающего ускорения были отброшены члены порядка $\varepsilon^2$. Оказывается, что эти члены не приводят к вековым возмущениям [7]. Легко также убедиться в том, что вторые слагаемые правых частей уравнений (4.10.17) приводят лишь к периодическим неравенствам. Поэтому вековые возмущения угловых элементов могут быть определены из уравнений

$$\frac{dM}{dt} = n, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \mu\dot{\psi}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \nu\dot{\psi}, \tag{8.8.1}$$

где $n$, $\mu$ и $\nu$ даются формулами (8.5.11).

Найдем сначала возмущение элемента $M$. Так как согласно (8.7.7)

$$n = n_0 + \hat{k}(t - t_0),$$

то первое уравнение (8.8.1) дает

$$\Delta M = \frac{\hat{k}}{2}(t - t_0)^2. \tag{8.8.2}$$

Перейдем к выводу формулы для возмущений элемента $\Omega$. Введем во втором уравнении (8.8.1) вместо времени $t$ новую независимую переменную $\psi$. Тогда

$$\frac{d\Omega}{d\psi} = \mu. \tag{8.8.3}$$

Поскольку $\mu$ есть функция элементов $a$, $e$, $i$, то ее изменение за время $t - t_0$ определяется формулой

$$\Delta\mu = \left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 \Delta a + \left(\frac{\partial\mu}{\partial e}\right)_0 \Delta e + \left(\frac{\partial\mu}{\partial i}\right)_0 \Delta i,$$

где индекс «0» означает, что частные производные должны быть вычислены при начальных значениях элементов. Так как $\Delta i$ имеет порядок $\varepsilon^2$, то последний член в этой формуле можно отбросить. Поэтому из уравнения (8.8.3) находим

$$\Delta\Omega = \int_{\psi_0}^{\psi} \left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0 \Delta a + \left(\frac{\partial\mu}{\partial e}\right)_0 \Delta e\right] d\psi, \tag{8.8.4}$$

где $\psi_0$ есть значение $\psi$ при $t = t_0$.

Вычислим первый из интегралов (8.8.4). Мы имеем

$$\int_{\psi_0}^{\psi}\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0\Delta a\cdot d\psi=\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0[a]_0\int_{\psi_0}^{\psi}(t-t_0)\,d\psi=$$

$$=\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0\frac{[a]_0}{n_0}\left\{\int_{\psi_0}^{\psi}(\psi-\psi_0)\,d\psi+\int_{\psi_0}^{\psi}(\psi_0-M_0)\,d\psi+\right.$$

$$\left.+\int_{\psi_0}^{\psi}[n_0(t-t_0)+M_0-\psi]\,d\psi\right\}.$$

Но согласно (8.5.8) и (8.5.9) разность

$$n_0(t-t_0)+M_0-\psi$$

содержит лишь периодические члены, вследствие чего последний интеграл не даст вековых возмущений. Поэтому

$$\int_{\psi_0}^{\psi}\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0\Delta a\cdot d\psi=$$

$$=\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0\frac{[a]_0}{n_0}\left\{\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2}+(\psi_0-M_0)(\psi-\psi_0)\right\}. \quad (8.8.5)$$

Заметим, что мы можем выбрать начальный момент $t_0$ таким образом, чтобы второй член в (8.8.5) был равен нулю. Действительно, взяв в качестве $t_0$ момент времени, когда спутник касается внутреннего ограничивающего эллипсоида, мы будем иметь $\psi_0=0$ и $M_0=0$. Однако и при произвольном $t_0$ преобладающим в формуле (8.8.5) является первый член. Так, уже на промежутке времени около суток второе слагаемое примерно в 100 раз меньше первого. Поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать вторым членом.

Вычисление второго интеграла в формуле (8.8.4) производится аналогичным образом. В результате находим

$$\Delta\Omega=\left[[a]_0\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)_0+[e]_0\left(\frac{\partial\mu}{\partial e}\right)_0\right]\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2n_0}. \quad (8.8.6)$$

Проделав подобные преобразования с третьим уравнением (8.8.1) мы получим следующую формулу для $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega=\left[[a]_0\left(\frac{\partial\nu}{\partial a}\right)_0+[e]_0\left(\frac{\partial\nu}{\partial e}\right)_0\right]\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2n_0}. \quad (8.8.7)$$

Вычислив теперь частные производные величин $\mu$ и $\nu$ по $a$ и $e$ и подставив их в (8.8.6) и (8.8.7), окончательно найдем

$$\left.\begin{aligned}\Delta\Omega &= \frac{2}{3}\frac{\mu_0\hat{k}}{n_0^2}(1-2e_0)(\psi-\psi_0)^2,\\ \Delta\omega &= \frac{2}{3}\frac{\nu_0\hat{k}}{n_0^2}(1-2e_0)(\psi-\psi_0)^2,\end{aligned}\right\} \tag{8.8.8}$$

где $\hat{k}$ определяется формулой (8.7.8).

## § 8.9. Сводка окончательных результатов

Результаты, полученные в § 8.7 и 8.8, могут быть представлены в следующем виде:

$$n = n_0 + \hat{k}(t-t_0), \tag{8.9.1}$$

$$a = a_0 + \dot{a}(t-t_0), \tag{8.9.2}$$

$$e = e_0 + \dot{e}(t-t_0), \tag{8.9.3}$$

$$i = i_0 + \dot{i}(t-t_0), \tag{8.9.4}$$

$$M = M_0 + n_0(t-t_0) + \frac{\hat{k}}{2}(t-t_0)^2, \tag{8.9.5}$$

$$\Omega = \Omega_0' + \mu_0(\psi-\psi_0) + \mu'(\psi-\psi_0)^2, \tag{8.9.6}$$

$$\omega = \omega_0' + \nu_0(\psi-\psi_0) + \nu'(\psi-\psi_0)^2, \tag{8.9.7}$$

где $n_0$, $a_0$, $e_0$, $i_0$, $M_0$, $\Omega_0'$ и $\omega_0'$ — значения элементов орбиты в начальный момент $t = t_0$, $n_0$, $\mu_0$ и $\nu_0$ — значения $n$, $\mu$ и $\nu$ при $t = t_0$, а $\dot{a}$, $\dot{e}$, $\dot{i}$, $\mu'$ и $\nu'$ определяются формулами

$$\dot{a} = -\frac{2}{3}a_0\frac{\hat{k}}{n_0}\{1+2\varepsilon_0^2\alpha_0^2(1-e_0)\}, \tag{8.9.8}$$

$$\dot{e} = -\frac{2}{3}\frac{\hat{k}}{n_0}\left\{1-e_0-\frac{1-2e_0+2e_0^2}{2\zeta_0}-\right.$$
$$\left.-\frac{1-4e_0}{8\zeta_0^2}-\frac{1}{8\zeta_0^3}+2\varepsilon_0^2\alpha_0^2\left(1-2e_0-\frac{1}{2\zeta_0}\right)\right\}, \tag{8.9.9}$$

$$\dot{i} = -\frac{\varepsilon_0^2}{3}\alpha_0 s_0\frac{\hat{k}}{n_0}\left\{1-e_0+\frac{e_0-2e_0^2}{2\zeta_0}+\frac{e_0}{8\zeta_0^2}\right\}, \tag{8.9.10}$$

$$\mu' = \frac{2}{3}\frac{\mu_0\hat{k}}{n_0^2}(1-2e_0), \tag{8.9.11}$$

$$\nu' = \frac{2}{3}\frac{\nu_0\hat{k}}{n_0^2}(1-2e_0). \tag{8.9.12}$$

Здесь $\hat{k}$ дается формулой (8.7.8), $\zeta_0$— формулой (8.7.4), а

$$\alpha_0 = \cos i_0, \quad s = \sin i_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{c}{a_0(1-e_0^2)}.$$

Заметим, что постоянные $\Omega_0'$ и $\omega_0'$ связаны с обычно используемыми постоянными $\Omega_0$ и $\omega_0$ равенствами

$$\Omega_0' = \Omega_0 + \mu_0\psi_0, \quad \omega_0 = \omega_0 + \nu_0\psi_0.$$

Полезно также здесь привести формулы для возмущений канонических элементов $g$ и $h$, которые были введены в § 4.5 вместо $\Omega$ и $\omega$. Мы имеем

$$\Delta g = \frac{7-8e_0}{6}\nu_0\hat{k}(t-t_0)^2,$$

$$\Delta h = \frac{7-8e_0}{6}\mu_0\hat{k}(t-t_0)^2.$$

Очень важным параметром, который входит во все формулы для возмущений, является $\hat{k}$. Он зависит как от элементов орбиты, массы и формы спутника, так и от плотности в начальной точке и шкалы высот. Знание

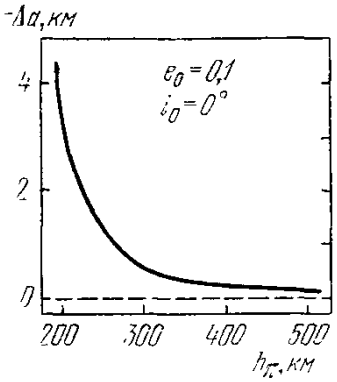


Рис. 29. Суточные изменения большой полуоси в зависимости от высоты перигея $h_\pi$.

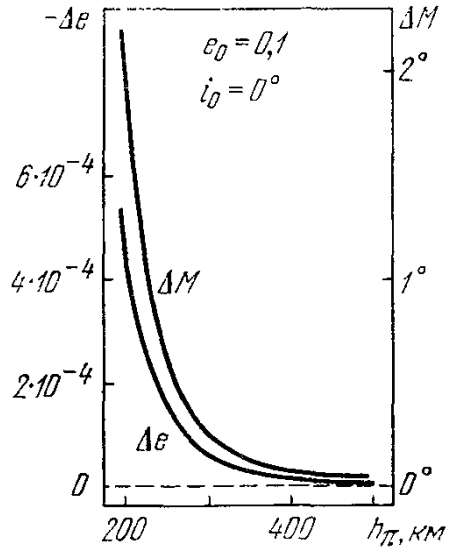


Рис. 30. Суточные изменения элементов $e$ и $M$ в зависимости от $h_\pi$.

этого параметра позволяет не только прогнозировать движение спутника, но и дает возможность получить ценную информацию о плотности воздуха (см. § 8.13). Именно поэтому величина $\hat{k}$ должна определяться непосредственно из

наблюдений и по мере накопления наблюдательного материала непрерывно уточняться.

Рассмотрим теперь численные значения возмущений. В качестве примера возьмем спутник, для которого $\varkappa = 0{,}16$ *см*$^2$/*г* *). Результаты вычислений представлены графиками на рис. 29 и 30, которые дают суточные изменения элементов $a$, $e$ и $M$ в зависимости от высоты перигея $h_п$. В табл. 23 приведены суточные изменения этих элементов для $h_п = 500$ *км* и разных значений $e_0$.

Таблица 23

**Суточные изменения элементов для $h_п = 500$ *км***

| $e_0$ | $\Delta a$ (*м*) | $\Delta e$ | $\Delta M$ |
|---|---|---|---|
| 0,03 | —40,8 | $-0{,}468 \cdot 10^{-5}$ | 0°,02266 |
| 0,10 | —24,8 | $-0{,}281 \cdot 10^{-5}$ | 0°,01140 |
| 0,20 | —21,0 | $-0{,}193 \cdot 10^{-5}$ | 0°,00721 |

Рисунки 29 и 30 показывают, что абсолютные величины возмущений очень быстро убывают с возрастанием высоты перигея $h_п$. Так, для $h_п = 200$ *км* суточное изменение $a$ равно — 4,2 *км*, а для $h_п = 500$ *км* оно составляет лишь — 25 *м*. Из табл. 23 следует, что на высоте 500 *км* наибольшим возмущениям подвержен элемент $M$. Таким образом, для далеких спутников, когда не требуется очень высокая точность, можно ограничиться только учетом изменения $M$.

## § 8.10. Комбинированное влияние сопротивления атмосферы и сжатия Земли

В формулах предыдущего параграфа члены, пропорциональные $\varepsilon_0^2$, представляют собой возмущения, вызываемые комбинированным влиянием сопротивления атмосферы и несферичности Земли. Рассмотрим численные значения этих возмущений на примере спутника, для которого коэффициент $\varkappa$ равен 0,16 *см*$^2$/*г*.

*) Такое значение $\varkappa$ характерно для многих спутников, запущенных до настоящего времени.

На рисунках 31—35 дано поведение комбинированных возмущений элементов за одни сутки для высоты перигея,

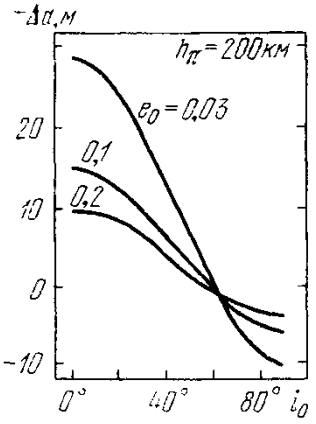


Рис. 31. Комбинированные возмущения элемента $a$ в зависимости от наклона $i_0$.

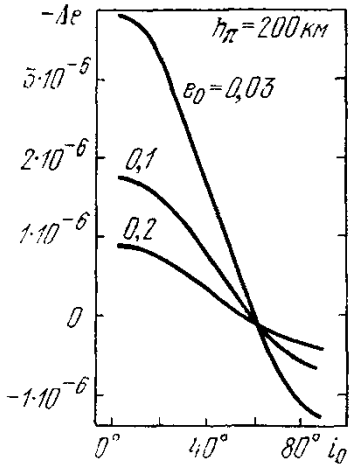


Рис. 32. Комбинированные возмущения элемента $e$ в зависимости от $i_0$.

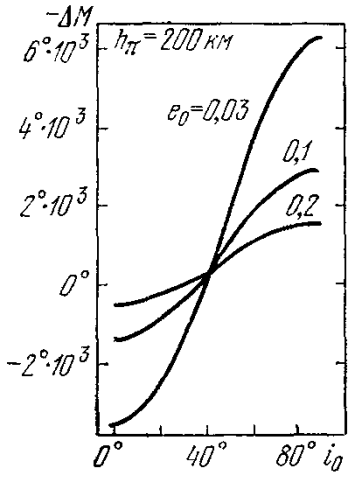


Рис. 33. Комбинированные возмущения элемента $M$ в зависимости от $i_0$.

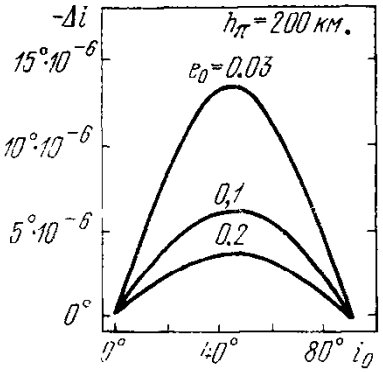


Рис. 34. Комбинированные возмущения элемента $i$ в зависимости от $i_0$.

равной 200 км, в зависимости от наклона $i_0$. Как и следовало ожидать, эти возмущения малы. Максимальные значения комбинированных возмущений при $e = 0{,}03$ равны: для $a$ около $-30$ м, для $e$ около $-4 \cdot 10^{-6}$, для $M$ около $-6° \cdot 10^{-3}$, т. е. их вклад в полную величину возмущений (см. § 8.9) может составлять лишь около 1%. Поэтому для элементов $a$, $e$, $M$ эти возмущения едва ли можно обнару-

Таблица 24

**Комбинированные возмущения для $h_п = 500$ км**

| $e_0$ | $\Delta a$ ($i_0 = 0°$) | $\Delta e$ ($i_0 = 0°$) | $\Delta M$ ($i_0 = 90°$) |
|---|---|---|---|
| 0,03 | —0,16 м | $-0{,}180 \cdot 10^{-7}$ | $-0°{,}306 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,20 | —0,05 м | $-0{,}045 \cdot 10^{-7}$ | $-0°{,}077 \cdot 10^{-4}$ |

Таблица 25

**Комбинированные возмущения для $h_п = 500$ км**

| $e_0$ | $\Delta i$ ($i_0 = 45°$) | $\Delta\omega$ ($i_0 = 0°$) | $\Delta\Omega$ ($i_0 = 0°$) |
|---|---|---|---|
| 0,03 | $-0°{,}703 \cdot 10^{-7}$ | $0°{,}750 \cdot 10^{-4}$ | $-0°{,}374 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,20 | $-0°{,}182 \cdot 10^{-7}$ | $0°{,}112 \cdot 10^{-4}$ | $-0°{,}056 \cdot 10^{-4}$ |

жить из наблюдений. В случае элементов $i$, $\omega$ и $\Omega$ максимальные изменения соответственно равны $-1°$, $4 \cdot 10^{-5}$, $6° \cdot 10^{-3}$ и $-3° \cdot 10^{-3}$. Поскольку комбинированные возмущения этих элементов (в рамках данной модели атмосферы) представляют собой суммарные возмущения от сопротивления воздуха, то при точных исследованиях их необходимо принимать во внимание.

Таблицы 24 и 25 дают представление о максимальных значениях комбинированных возмущений для высоты перигея, равной 500 км.

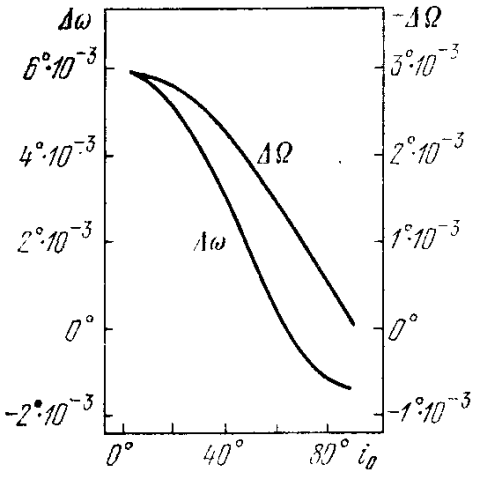


Рис. 35. Комбинированные возмущения элементов $\omega$ и $\Omega$ в зависимости от $i_0$ ($e_0 = 0{,}1$).

## §8.11. Влияние вращения атмосферы

Результаты, изложенные в предыдущих параграфах, были получены в предположении, что атмосфера неподвижна относительно инерциальной системы координат. Рассмотрим теперь те эффекты в движении спутника,

которые вызываются вращением атмосферы. Мы предположим, что частицы воздуха вращаются вокруг земной оси с запада на восток со скоростью $V_A$ по закону

$$V_A = rw \cos \varphi, \qquad (8.11.1)$$

где $w$ — угловая скорость, а $\varphi$ — геоцентрическая широта.

Поскольку возмущения, обусловленные вращением атмосферы, малы, мы проведем здесь только приближенный анализ. Во-первых, в дифференциальных уравнениях для элементов мы отбросим малые члены, пропорциональные $\varepsilon^2$, во-вторых, будем пренебрегать членами порядка $w^2$ и, в-третьих, рассмотрим лишь случай малых $e$.

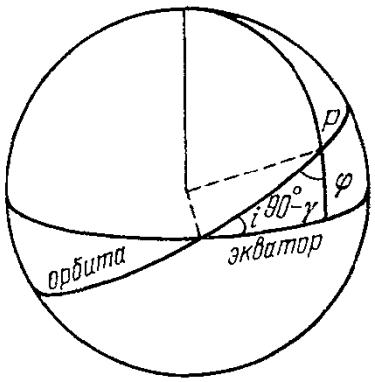

Рис. 36. Углы $i$ и $\varphi$.

Обозначим через $V$ орбитальную скорость спутника, а через $V'$ его скорость относительно атмосферы. Тогда

$$V'^2 = V^2 + V_A^2 - 2VV_A \cos \beta,$$

где $\beta$ — угол между векторами $\boldsymbol{V}_A$ и $\boldsymbol{V}$.

Найдем проекции скоростей $V$, $V_A$ и $V'$ на направления $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{B}$. Очевидно, в случае $V$ они соответственно равны

$$\dot{r}, \quad \sqrt{V^2 - \dot{r}^2}, \quad 0.$$

Так как для малых $e$ радиальная составляющая скорости $\dot{r}$ мала по сравнению с $V$, то можно заменить угол $\beta$ углом $\beta'$ между $\boldsymbol{V}_A$ и проекцией скорости спутника, перпендикулярной к радиусу-вектору. Тогда составляющие скорости $V_A$ будут равны

$$0, \quad V_A \cos \beta', \quad -V_A \sin \beta'.$$

Следовательно, для проекций $V'$ будем иметь

$$\dot{r}, \quad \sqrt{V^2 - \dot{r}^2} - V_A \cos \beta', \quad V_A \sin \beta'.$$

Рассмотрим теперь сферический треугольник на рис. 36, в котором

$$\theta = (1 + \nu)\psi + \omega_0.$$

Из этого треугольника находим

$$\cos\varphi \cos\beta' = \cos i,$$
$$\cos\varphi \sin\beta' = \sin i \cos\theta.$$

Поэтому проекции относительной скорости будут

$$\dot{r}, \quad \sqrt{V^2 - \dot{r}^2} - rw\cos i, \quad rw \sin i \cos\theta,$$

а величина скорости $V'$ определится по формуле

$$V' = \sqrt{V^2 - 2\sqrt{V^2 - \dot{r}^2}\, rw\cos i + r^2w^2(\cos^2 i + \sin^2 i \cos^2\theta)}.$$

Если пренебречь членами с $w^2$ и отношением $\frac{\dot{r}^2}{V^2}$, имеющим порядок $e^2$, то

$$V' = \gamma V, \tag{8.11.2}$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{rw}{V}\cos i. \tag{8.11.3}$$

При помощи (8.11.2) и (8.3.1) для величины возмущающего ускорения, которое обозначим через $F'$, получаем следующую формулу:

$$F' = \gamma^2 F, \tag{8.11.4}$$

где $F$ дается равенством (8.6.1).

Используя выражения для проекций скорости $V'$ и равенство (8.11.2), мы подобно (8.5.1) получим такие формулы для составляющих $S$, $T$, $B$ возмущающего ускорения:

$$\left.\begin{aligned} S &= -\gamma\dot{r}\frac{F}{V}, \\ T &= -\gamma\left[\sqrt{V^2 - \dot{r}^2} - rw\cos i\right]\frac{F}{V}, \\ B &= -rw\sin i\cos\theta\frac{F}{V}. \end{aligned}\right\} \tag{8.11.5}$$

Если в (8.11.5) отбросить члены с $\dot{r}$, которые в уравнениях для элементов дадут члены, пропорциональные $e^2$, то

$$S = 0, \quad T = -\gamma^2 F, \quad B = -\frac{rw\sin i\cos\theta}{V}F. \tag{8.11.6}$$

В случае невращающейся атмосферы (при сделанных в этом параграфе дополнительных предположениях) мы вместо (8.11.6) имели бы

$$S = 0, \quad T = -F, \quad B = 0. \tag{8.11.7}$$

Таким образом, в результате вращения атмосферы, во-первых, возникает компонента $B$ возмущающего ускорения, перпендикулярная к плоскости, в которой лежат радиус-вектор и вектор скорости спутника и, во-вторых, компонента $T$ приобретает множитель $\gamma^2$.

Рассмотрим сначала второй фактор. Множитель $\gamma^2$ согласно (8.11.3) зависит от $w$, $i$, $r$ и $V$. Мы не допустим большой ошибки, если заменим все эти величины некоторыми средними значениями. Поскольку сопротивление атмосферы оказывает наибольшее влияние в окрестности перигея, мы заменим $r$ и $V$ их значениями $r_п$ и $V_п$ на внутреннем ограничивающем эллипсоиде, т. е. положим

$$\gamma^2 = 1 - 2\frac{r_п w}{V_п}\cos i_0. \tag{8.11.8}$$

Если рассматривать область высот движения спутника до 1000 *км*, то $\gamma^2$ будет изменяться в пределах

$$0{,}85 < \gamma^2 < 1{,}15.$$

Таким образом, мы учтем влияние этого фактора, если умножим полученные результаты на постоянный множитель $\gamma^2$. Другими словами, во всех формулах § 8.6—8.9 нужно заменить $\varkappa$ на величину $\varkappa'$:

$$\varkappa' = \gamma^2 \varkappa. \tag{8.11.9}$$

Перейдем теперь к рассмотрению влияния компоненты $B$. Подставляя третью формулу (8.11.6) в уравнения § 4.10 при $\varepsilon^2 = 0$ и производя с ними те же преобразования, что и в § 8.6, мы придем к такому результату:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\,\Delta\Omega}{dt} = -\frac{aw\varkappa\rho_0 k}{4}(I_2 - 2eI_1)\sin 2\omega,\\
&\frac{d\,\Delta i}{dt} = -\frac{aw\varkappa\rho_0 k\sin i}{4}[(I_0 - 2eI_1) + (I_2 - 2eI_1)\cos 2\omega],\\
&\frac{d\,\Delta\omega}{dt} + \cos i\,\frac{d\,\Delta\Omega}{dt} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.11.10}$$

Интегрируя уравнения (8.11.10), получим

$$\Delta i = -A_1 (t - t_0) - s_0 A_2 \sin 2g, \qquad (8.11.11)$$

$$\Delta\Omega = A_2 \cos 2g, \; \Delta\omega = -\alpha_0 A_2 \cos 2g, \qquad (8.11.12)$$

где

$$A_1 = \frac{a_0 w \varkappa \rho_0 k s_0}{4} (I_0 - 2eI_1), \qquad (8.11.13)$$

$$A_2 = \frac{a_0 w \varkappa \rho_0 k}{8 n_0 \nu} (I_2 - 2eI_1), \qquad (8.11.14)$$

$$g = n_0 \nu (t - t_0) + g_0.$$

Здесь $\varkappa$, $k$ и $\nu$ даются формулами (8.6.4), (8.6.3) и (8.5.11) а аргументом функций Бесселя является величина $\zeta_0$, определяемая равенством (8.7.4).

Итак, элементы $i$, $\Omega$ и $\omega$ подвержены долгопериодическим возмущениям, а элемент $i$ к тому же имеет чисто вековое неравенство. Если принять, что угловая скорость вращения атмосферы равна угловой скорости вращения Земли, то в случае спутника, для которого $\varkappa = 0{,}16$ *см*$^2$/*г*, $e = 0{,}1$, $h_\text{п} = 200$ *км*, $i = 90°$, суточное изменение $i$ за счет векового неравенства равно $-0°,0004$.

## § 8.12. Другие возмущения от сопротивления атмосферы

В предыдущих параграфах на основе работы [7] были рассмотрены важнейшие неравенства в движении спутника от сопротивления атмосферы. В предположении, что плотность воздуха изменяется с высотой по экспоненциальному закону с постоянной шкалой высот, были получены вековые возмущения элементов орбиты. Отдельно были изучены возмущения, вызываемые совместным влиянием атмосферы и несферичности Земли, и возмущения, связанные с вращением атмосферы.

Однако, как показывают уравнения (8.5.2), уже в этой постановке элементы орбиты должны иметь, помимо вековых возмущений, короткопериодические и долгопериодические неравенства. Долгопериодические возмущения должны возникать от тех членов дифференциальных уравнений, которые пропорциональны $\varepsilon^2$. При интегрировании этих членов в знаменателях появится величина $\nu$, которая также имеет порядок $\varepsilon^2$. В результате амплитуды

долгопериодических возмущений будут иметь тот же порядок, что и амплитуды короткопериодических возмущений. Поскольку период этих возмущений составляет несколько месяцев, то их очень трудно обнаружить из наблюдений. Что касается короткопериодических возмущений, то они могут сказаться на результатах определения элементов орбит из наблюдений.

В этом параграфе мы дадим краткую характеристику этим и другим возмущениям, связанным с различными эффектами атмосферного торможения.

1. Короткопериодические возмущения. Эти возмущения были изучены в работе Л. Сехнала и С. Миллс [8]. Ими разработан полуаналитический

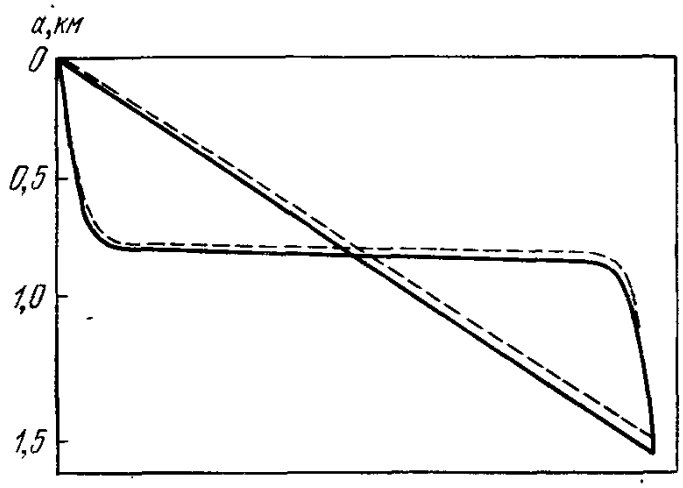


Рис. 37. Характер изменения большой полуоси за один оборот спутника «Эксплорер-3».

метод вычисления короткопериодических возмущений на ЭВМ. Теория этого метода громоздка и здесь мы приведем лишь некоторые численные результаты.

На рисунках 37 и 38 для спутника «Эксплорер-3» даны возмущения элементов $a$ и $\omega$ за один оборот (пунктирная линия соответствует возмущениям без учета суточного эффекта, сплошная — возмущения с учетом этого эффекта). За один оборот спутника большая полуось изменилась на $-1{,}58$ *км*, а короткопериодические возмущения на этом промежутке времени могут давать отклонения в несколько сотен метров. В случае $\omega$ короткопериодические возмущения могут превосходить $0°{,}01$.

Эти рисунки дают представление не только о величине возмущений, но и о характере изменения элементов. Самые быстрые изменения происходят в окрестности перигея, а вдали от него элементы почти постоянны. Получается нечто похожее на удар.

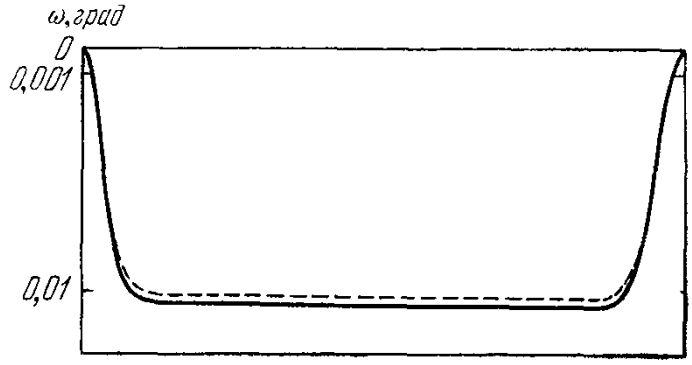


Рис. 38. Характер изменения элемента ω за один оборот спутника «Эксплорер-3».

2. Широтный эффект. Атмосфера Земли не является сферически-симметричной, а обладает некоторым сжатием. На высотах 150—300 *км* поверхности равной плотности близки к эллипсоидам со сжатием, равным сжатию Земли. Поэтому можно предположить, что на данной широте плотность изменяется с высотой над поверхностью Земли по экспоненциальному закону.

Пусть $R_0$ и $\alpha'$ — экваториальный радиус и сжатие эллипсоида. Тогда расстояние от центра Земли до точки эллипсоида определится по формуле

$$R = R_0 (1-\alpha' \sin^2\varphi), \qquad (8.12.1)$$

где $\varphi$ — геоцентрическая широта.

С другой стороны, в промежуточном движении радиус-вектор спутника дается формулой (см. § 3.10)

$$r = \xi + \varepsilon\sigma ps \cdot \sin\theta + \frac{\varepsilon^2 p}{2}(1 - s^2\sin^2\theta)(1 + e\cos\psi). \qquad (8.12.2)$$

Поскольку

$$\sin\varphi = s\sin\theta,$$

то, пренебрегая малыми порядка $\varepsilon^2 e$, из формул (8.12.1) и (8.12.2) находим

$$\frac{r-R}{H} = \frac{\xi-\xi_0}{H} - \lambda_0 - \lambda_1\sin\theta - \lambda_2\cos 2\theta, \qquad (8.12.3)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{R_0 - \xi_0}{H} - \frac{\varepsilon^2 p}{2H} - \lambda_2$$

$$\lambda_1 = -\frac{\varepsilon \sigma p s}{H},$$

$$\lambda_2 = \frac{(2\alpha' R_0 - \varepsilon^2 p)\, s^2}{4H}.$$

Здесь $H$ — шкала высот, $\xi_0$ есть значение $\xi$ для внутреннего ограничивающего эллипсоида, равное $a_0(1 - e_0)$.

Входящую в эти формулы величину $R_0$ следует выбрать из условия, чтобы эллипсоид (8.12.1) проходил через начальную точку перигея орбиты, т. е.

$$R_0 = R_\text{п} (1 - \alpha' \sin^2 \varphi_\text{п})^{-1},$$

где $R_\text{п}$ и $\varphi_\text{п}$ — координаты перигея при $t = t_0$.

В силу нашего предположения плотность $\rho$ должна даваться формулой

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{r - R}{H}\right).$$

Подставляя сюда равенство (8.12.3), получим

$$\rho = \rho_0 \exp(\lambda_0) \exp\left(\frac{\xi_0 - \xi}{H}\right) \exp(\lambda_1 \sin\theta + \lambda_2 \cos 2\theta). \quad (8.12.4)$$

Разложим последний множитель в (8.12.4) в ряд. Тогда, ограничиваясь членами первого порядка относительно $\lambda_1$ и $\lambda_2$, будем иметь

$$\rho = \rho_0 \exp(\lambda_0) \exp\left(\frac{\xi_0 - \xi}{H}\right) \{1 + \lambda_1 \sin\theta + \lambda_2 \cos 2\theta\}. \quad (8.12.5)$$

Сравнивая (8.12.5) с равенством (8.6.2), мы видим, что сжатие атмосферы приводит к появлению в формуле для плотности, во-первых, постоянного, мало отличающегося от единицы, множителя $\exp(\lambda_0)$ и, во-вторых, периодических членов, пропорциональных $\lambda_1$ и $\lambda_2$.

Первый фактор легко учитывается, если в уже полученных формулах для возмущений заменить $\varkappa$ на $\varkappa \exp(\lambda_0)$, а с учетом вращения атмосферы на $\gamma^2 \varkappa \exp(\lambda_0)$.

Периодические члены в (8.12.5) приведут к долгопериодическим возмущениям, амплитуды которых пропорциональны $\frac{\lambda_1}{\varepsilon^2}$ и $\frac{\lambda_2}{\varepsilon^2}$. Поскольку $\lambda_1$ и $\lambda_2$ содержат малую величину $H$ в знаменателях, то эти возмущения будут

более значительными, чем долгопериодические возмущения, указанные в начале параграфа.

3. Изменение шкалы высот. Шкала высот $H$ не является постоянной, как предполагалось ранее, а зависит от высоты. Аналитически, по-видимому, проще всего представить $H$ в виде многочлена относительно высоты $h$. В некоторых случаях, когда интересующий нас слой атмосферы является достаточно тонким, можно рассматривать $H$ как линейную функцию $h$.

Возмущения, вызываемые изменением шкалы высот, были рассмотрены в работе [9] *). Как и раньше, наиболее значительными здесь являются вековые возмущения. Если

$$H = H_0 (1 + \mu' h),$$

где $H_0$ и $\mu'$ — некоторые постоянные, а $h$ — высота, отсчитываемая от начальной точки перигея, то при $e < 0{,}2$ и $\zeta > 3$ для вековых изменений элементов $a$ и $e$ будем иметь

$$\frac{d\Delta a}{dt} = -\frac{n_0 a_0^2 \rho_0 \varkappa}{\sqrt{2\pi\zeta_0}} \cdot \frac{3}{8}\mu' \left(1 + 2e_0 + \frac{5}{8\zeta_0} + \frac{105}{128\zeta_0^2}\right),$$

$$\frac{d\Delta e}{dt} = -\frac{n_0 a_0 \rho_0 \varkappa}{\sqrt{2\pi\zeta_0}} \frac{3}{8}\mu' \left(1 + e_0 - \frac{15}{8\zeta_0} - \frac{175}{128\zeta_0^2}\right),$$

где отброшенные члены имеют порядок $\mu'^2$.

Поскольку $\mu'$ имеет порядок 0,1, то вклад этих изменений в полные возмущения от сопротивления атмосферы, составляет около 5%. Так, для спутника с высотой перигея 200 *км* и $e = 0{,}1$, а $\varkappa = 0{,}16$ *см*$^2$/*г* суточные изменения элементов $a$ и $e$ за счет этого эффекта равны $-153$ *м* и $-0{,}183 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

## § 8.13. Формулы для определения плотности воздуха

Из равенства (8.7.8) для $e < 0{,}2$ и $\zeta > 3$ мы имеем

$$\rho_0 = \frac{2\hat{k}\sqrt{2\pi\zeta_0}}{3n_0^2 a_0 \varkappa} \left\{1 - 2e_0 + \frac{5}{2}e_0^2 - 3e_0^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{8\zeta_0}\left(1 - 10e_0 + \frac{7}{16\zeta_0}\right)\right\}, \qquad (8.13.1)$$

где $\zeta_0$ и $\varkappa$ даются формулами (8.7.4) и (8.6.4).

*) См. также книгу Кинг-Хили [2].

Таким образом, если мы найдем из наблюдений коэффициент $\hat{k}$ и, кроме того, если нам известны шкала высот $H$ и величина $\varkappa$, то формула (8.13.1) позволит вычислить плотность воздуха на высоте перигея. Поскольку параметр $\varkappa$, зависящий от массы и геометрических характеристик спутника, известен обычно с невысокой степенью точности, то в формуле (8.13.1) члены, пропорциональные $\varepsilon^2$, были отброшены.

Пусть теперь $T$ есть аномалистический период обращения спутника. Тогда, поскольку

$$T = \frac{2\pi}{n} \quad \text{и} \quad \frac{dn}{dt} = \hat{k},$$

то

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{2\pi}{n^2}\hat{k}. \tag{8.13.2}$$

Используя (8.13.2) и подставляя в (8.13.1) вместо $\zeta_0$ его значение из (8.7.4), мы можем придать формуле (8.13.1) и такой вид

$$\rho_0 = -\frac{\dot{T}}{3\varkappa}\sqrt{\frac{2e_0}{\pi a_0 H}}\left\{1 - 2e_0 + \frac{5}{2}e_0^2 - 3e_0^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{(1-10e_0)H}{8a_0e_0} - \frac{7H^2}{128a_0^2e_0^2}\right\}. \tag{8.13.3}$$

Для того чтобы найти плотность по этой формуле, нужно знать скорость изменения аномалистического периода обращения спутника.

Формулы (8.13.1) и (8.13.3) выведены в предположении, что атмосфера обладает сферической симметрией, а шкала высот постоянна. Если ввести соответствующие поправки за счет сжатия атмосферы и изменения шкалы высот, то формула (8.13.3) запишется в виде

$$\rho_0 = -\frac{\dot{T}}{3\varkappa}\sqrt{\frac{2e_0}{\pi a_0 H_0}}\left\{1 - 2e_0 + \frac{5}{2}e_0^2 - 3e_0^3 - \right.$$
$$- \frac{(1-10e_0)H_0}{8a_0e_0} - \frac{7H_0^2}{128a_0^2e_0^2} + \frac{\alpha'}{e_0}\sin^2 i_0 \cos 2g -$$
$$\left. - \frac{3\mu'}{8}\left(1 - 2e_0 + \frac{3H_0}{8a_0e_0}\right)\right\}, \tag{8.13.4}$$

где $\alpha'$ — сжатие атмосферы, $\mu'$ — скорость возрастания шкалы высот, $H_0$ — значение шкалы высот в перигее.

Формулы для определения плотности в случае $e > 0{,}2$ или в случае очень малых $e$ и $\zeta < 3$ можно найти в уже упомянутой книге Кинг-Хили [2].

## § 8.14. Продолжительность жизни спутника

Ранее мы видели, что под влиянием сопротивления атмосферы высота перигея, эксцентриситет и период обращения спутника монотонно уменьшаются. Со временем они достигают некоторых критических значений, при которых спутник может совершить одно-два обращения вокруг Земли. Критические значения элементов орбиты зависят от коэффициента $\varkappa$, пропорционального отношению площади поперечного сечения к массе спутника. Чем больше этот коэффициент, тем больше критический период обращения и критическая высота перигея. На практике, однако, можно считать, что спутник прекращает свое существование, когда высота перигея достигает 120—150 *км*, а период обращения равен 86,5—88,0 минут. При этом существенным обстоятельством является то, что в конце своей жизни спутник движется по почти круговой орбите, т. е. критическое значение эксцентриситета оказывается весьма близким к нулю. Поэтому при определении продолжительности жизни спутника можно принять за критический момент тот момент времени, когда эксцентриситет его орбиты тождественно равен нулю.

Таким образом, нам необходимо рассмотреть изменение эксцентриситета от начального значения до нулевого. Ясно, что использованный в предыдущих параграфах способ последовательных приближений, позволяющий построить решение на небольшом промежутке времени, не подходит для решения этой задачи, и мы должны воспользоваться другим методом, который дает возможность проследить эволюцию орбиты на весьма длительных временны́х интервалах. Поэтому излагаемая в этом параграфе теория не только дает ответ на вопрос о продолжительности жизни спутника, но и имеет гораздо большее самостоятельное значение.

Итак, введем безразмерные переменные $\eta$ и $\zeta$ по формулам

$$\eta = \frac{a}{H}, \quad \zeta = \frac{ae}{H}. \tag{8.14.1}$$

Тогда, отбрасывая малые члены с $\varepsilon^2$ в уравнениях (8.6.11) — (8.6.14), найдем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\varkappa\rho_0 n a^2 k}{H}\left\{I_0 + 2eI_1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4}e^2(I_0 + I_2) + \frac{e^3}{4}(3I_1 + I_3)\right\}, \\
\frac{d\zeta}{dt} &= -\frac{\varkappa\rho_0 n a^2 k}{H}\left\{I_1 + \frac{e}{2}(3I_0 + I_2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^2}{8}(11I_1 + I_3) + \frac{e^3}{16}(7I_0 + 8I_2 + I_4)\right\},
\end{aligned}\right\} \qquad (8.14.2)$$

где аргументом функций Бесселя служит величина $\zeta$.

Подставим в уравнения (8.14.2) асимптотические разложения для $I_n$, а затем разделим первое из этих уравнений на второе. Тогда

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{I_0}{I_1} - \frac{1}{\eta} - \frac{3}{2\eta\zeta} + \frac{e^2}{\zeta}, \qquad (8.14.3)$$

где отброшенные члены имеют порядок $e^4$.

Подставляя в (8.14.3) вместо $e$ его выражение из (8.14.1) и используя равенство

$$I_0 = I_1' + \frac{I_1}{\zeta},$$

которое является следствием формул (8.4.2) и (8.4.3), мы окончательно найдем следующее уравнение, связывающее переменные $\eta$ и $\zeta$:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{I_1'}{I_1} + \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\eta} - \frac{3}{2\eta\zeta} + \frac{\zeta}{\eta^2}. \qquad (8.14.4)$$

Это уравнение имеет чрезвычайно важное значение в теории возмущений от сопротивления атмосферы. Его решение является ключом для построения точной теории движения спутника в атмосфере Земли.

В силу того, что отношение $a$ к $H$ велико, три последних члена в (8.14.4) малы. Если ими пренебречь, решение укороченного уравнения можно представить в виде

$$\eta - \eta_0 = \ln\frac{I_1(\zeta)}{I_1(\zeta_0)} + \ln\frac{\zeta}{\zeta_0}, \qquad (8.14.5)$$

где $\eta_0$ и $\zeta_0$ — начальные условия.

Если в формуле (8.14.5) ограничиться линейными членами, то в первом приближении будем иметь

$$\eta = \eta_0 + \zeta - \zeta_0. \tag{8.14.6}$$

Поскольку три последних члена в (8.14.4) малы и величина $\eta$ мало изменяется со временем, то мы в этих членах заменим $\eta$ его выражением из (8.14.6) и сохраним малые первого порядка относительно $\zeta - \zeta_0$. Тогда (8.14.4) примет вид

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{I_1'}{I_1} + \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\eta_0} - \frac{3}{2\eta_0\zeta} + \frac{2\zeta - \zeta_0}{\eta_0^2}. \tag{8.14.7}$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\eta - \eta_0 = \ln \frac{\zeta I_1(\zeta)}{\zeta_0 I_1(\zeta_0)} - \frac{3}{2\eta_0} \ln \frac{\zeta}{\zeta_0} + \frac{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \eta_0)}{\eta_0^2}. \tag{8.14.8}$$

Формула (8.14.8) дает достаточно точное решение уравнения (8.14.4). Ее максимальная (при $e = 0{,}2$) относительная ошибка не превосходит $10^{-4}$.

Заменяя в (8.14.8) величины $\eta$ и $\zeta$ их значениями из (8.14.1), мы получим следующую формулу:

$$\frac{a}{a_0} = 1 - \frac{H}{a_0} \ln \frac{\zeta_0 I_1(\zeta_0)}{\zeta I_1(\zeta)} + \\ + \frac{H}{a_0} \frac{(ae - a_0 e_0)(ae - a_0)}{a_0^2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{a_0^2} \ln \frac{\zeta_0}{\zeta}, \tag{8.14.9}$$

связывающую элементы $a$ и $e$.

Подставим эту формулу во второе уравнение (8.14.2) и заменим функции Бесселя их асимптотическими разложениями. Тогда после довольно громоздких преобразований мы придем к следующему уравнению:

$$\frac{dt}{d\zeta} = -\frac{\zeta}{D\eta_0^2} \left\{ 1 + \frac{e_0}{2} - \frac{7\zeta}{2\eta_0} + \right. \\ \left. + \frac{79\zeta^2 - 42\zeta\zeta_0 + 3\zeta_0^2}{8\eta_0^2} + \frac{7}{4\eta_0} \ln \frac{\zeta_0}{\zeta} \right\}, \tag{8.14.10}$$

где

$$D = \frac{n_0 \varkappa \rho_0 a_0 e_0 I_1(\zeta_0)}{\exp(\zeta_0 + e_0)}. \tag{8.14.11}$$

Интегрируя (8.14.10) в пределах от $\zeta_0$ до $\zeta$ и заменяя затем $\zeta$ его значением из (8.14.1), получим

$$t-t_0=\frac{1}{2D}\left\{e_0^2-e^2+\frac{1}{6}(2e^3+9e^2e_0-11e_0^3)-\right.$$
$$-\frac{1}{16}(15e^4+8e^3e_0+6e^2e_0^2-29e_0^4)-$$
$$\left.-\frac{3}{4}\frac{H}{a_0}e^2\ln\frac{e_0}{e}-\frac{7}{8}\frac{H}{a_0}(e^2-e_0^2)\right\}, \quad (8.14.12)$$

где $t_0$ — начальный момент времени.

Обозначим теперь через $t^*$ *критический момент* времени, т. е. момент времени, когда $e=0$, а через $\tau$ — *продолжительность жизни* спутника, т. е.

$$\tau = t^* - t_0.$$

Тогда, полагая в уравнении (8.14.12) $e=0$, найдем

$$\tau=\frac{e_0^2}{2D}\left(1-\frac{11}{6}e_0+\frac{29}{16}e_0^2+\frac{7}{8}\frac{H}{a_0}\right). \quad (8.14.13)$$

Формулу для продолжительности жизни спутника $\tau$ можно представить в другом, более наглядном виде, если в (8.14.13) подставить (8.14.11), а затем исключить при помощи (8.13.3) плотность $\rho_0$. В результате окончательно будем иметь

$$\tau=\frac{e_0T_0F(e_0)}{|\dot{T}_0|}, \quad (8.14.14)$$

где $\dot{T}_0$ — скорость изменения периода обращения спутника в начальный момент, а

$$F(e_0)=\frac{3}{4}\left[1+\frac{7}{6}e_0+\frac{5}{16}e_0^2+\frac{1}{2}\frac{H}{a_0e_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{11}{24}\frac{H}{a_0}+\frac{3}{8}\frac{H^2}{a_0^2e_0^2}\right]. \quad (8.14.15)$$

Таким образом, для того, чтобы найти продолжительность жизни спутника начиная с некоторого момента $t_0$, нам нужно знать для этого момента элементы $a$, $e$ и скорость изменения периода обращения.

Формула (8.14.14) дает вполне удовлетворительные результаты в случае достаточно близких спутников (ошибка составляет около 5%). Однако для далеких спутников

результаты нужно исправить за счет таких эффектов, как сжатие атмосферы, изменение шкалы высот, вариации плотности, обусловленные солнечной деятельностью. Особенно важно здесь учесть суточные колебания плотности и изменения, связанные с 11-летним циклом. Для этого в качестве $\dot{T}_0$ необходимо взять величину, полученную путем осреднения на промежутке времени в несколько лет.

Вернемся, однако, к уравнению (8.14.12). Разрешая его относительно $e$ и полагая

$$z = \sqrt{1 - \frac{t - t_0}{\tau}},$$

найдем

$$\frac{e}{e_0} = z\left\{1 - \frac{e_0}{6} + \frac{131}{288}e_0^2 + \frac{3}{8}\frac{H}{a_0}\ln z + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{e_0}{6} - \frac{131}{288}e_0^2\right)z - \frac{115e_0^2}{288}z^2\right\}. \quad (8.14.16)$$

Эта формула дает нам качественное представление об изменении $e$ в зависимости от времени $t$.

Если теперь разложить правую часть (8.14.16) в ряд по степеням $t - t_0$, который сходится при всех

$$|t - t_0| < \tau,$$

и ограничиться линейными членами, то мы придем к формулам, полученным в § 8.7. Это разложение показывает, что линейная теория обеспечивает тем бо́льшую точность, чем меньше отношение интересующего нас промежутка времени к оставшемуся времени существования спутника. При помощи формулы (8.14.16) всегда можно оценить отбрасываемые нелинейные члены.

## § 8.15. Общий обзор. Дальнейшее развитие теории

Как и многие другие задачи в теории движения спутника, эта задача начинает свою историю с исследований классиков небесной механики. Первые теоретические результаты по изучению движения в сопротивляющейся среде принадлежат И. Ньютону [10]. Сопротивлением среды астрономы пытались объяснить некоторые особен-

ности в движении кометы Энке и невязки в вековом движении перигелия Меркурия. Эволюция орбит под действием сопротивления среды рассматривалась в многочисленных работах по космогонии.

Поскольку сопротивление среды оказывает чрезвычайно малое влияние на движение естественных небесных тел, эти исследования носили главным образом качественный характер и не ставили своей целью создание строгой количественной теории. Однако развитые классиками методы и сейчас представляют определенный интерес и их влияние весьма заметно в некоторых первых работах, посвященных изучению движения искусственных спутников.

Запуск первых искусственных спутников сразу поставил целый ряд практических вопросов, для решения которых было необходимо построить не только качественную, но и количественную теорию движения спутника в атмосфере Земли. Необходимо было найти основные возмущения в движении спутника, оценить время его жизни, получить формулы для определения плотности воздуха. Первые исследования в этой области принадлежат Д. Е. Охоцимскому, Т. М. Энееву, Г. П. Таратыновой [11], П. Е. Эльясбергу [12], Ю. В. Батракову и В. Ф. Проскурину [13], Е. А. Гребеникову [14], Д. Кинг-Хили [15]. Во всех этих работах предполагалось, что атмосфера неподвижна, стационарна и имеет сферическую структуру (хотя порой и использовались различные аналитические представления плотности в зависимости от высоты). Г. П. Таратынова [16], К. Бозанкэ [17], Т. Штерн [18], Г. Кук, Р. Плиммер [19], П. Е. Эльясберг [6] рассмотрели эффекты, связанные с вращением атмосферы. В работах Бозанкэ [20], П. Е. Эльясберга и В. Д. Ястребова [21], Г. Кука, Д. Кинг-Хили и Д. Уокер [22], Т. Штерна [18] уже предполагалось, что атмосфера обладает сжатием.

История исследования движения спутника в атмосфере являет собой блестящий пример содружества теории и практики. Теоретические результаты использовались для практического определения плотности воздуха. Развитие теории шло параллельно с исследованием структуры атмосферы. По мере того как уточнялись наши знания об атмосфере Земли, теория учитывала все более и более тонкие эффекты. Среди исследований в этом направлении

следует выделить работы Д. Кинг-Хили и его сотрудников, обобщение которых дается в монографии [2]. В ней достаточно подробно анализируются возмущения элементов кеплеровой орбиты спутника с учетом вращения и сплюснутости атмосферы и изменения шкалы высот. Заслуживает особого внимания метод решения основной проблемы, когда предполагается, что атмосфера сферически-симметрична. Большой интерес представляют работы А. М. Фоминова [23] — [25], в которых предложена довольно полная аналитическая модель атмосферы и на базе ее рассмотрены возмущения, вызываемые различными вариациями плотности.

Интересна работа А. М. Фоминова [26], в которой были получены выражения для возмущений большой полуоси и наклона, вызываемых комбинированным влиянием сопротивления атмосферы и сжатия Земли. Для орбит с малыми эксцентриситетами этот эффект изучался также в работе Чонг-Ханг Зи [27]. Б. Н. Носков и автор [7] рассмотрели комбинированные возмущения всех элементов на базе некеплеровой промежуточной орбиты (см. § 8.10).

Нужно заметить, однако, что долгое время основное внимание уделялось главным образом только вековым возмущениям. Была лишь полуаналитическая теория короткопериодических возмущений, развития И. Ижаком [28] и Л. Сехналом и С. Миллс [8]. Долгопериодические возмущения, как правило, трактовались как квазивековые.

В последнее время Б. Н. Носков построил довольно полную аналитическую теорию возмущений элементов промежуточного движения, вызываемых сопротивлением атмосферы. Им подробно рассмотрены короткопериодические и долгопериодические возмущения [29] — [31], найдены вековые и долгопериодические неравенства, вызываемые вращением и сжатием атмосферы [32] — [34].

В заключение отметим еще работы П. Е. Эльясберга, Б. В. Кугаенко [35] и Д. Кинг-Хили, Д. Уокер [36], где рассмотрены возмущения, связанные с суточным эффектом в распределении плотности воздуха.

ГЛАВА IX

# ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

## § 9.1 Давление света

В этом параграфе мы выведем формулу для возмущающего ускорения, вызываемого действием светового давления на спутник. Сначала мы предположим, что спутник имеет сферическую форму и рассмотрим отдельно случаи полного поглощения, зеркального отражения и диффузного рассеивания световой энергии. Затем перейдем к спутникам произвольной формы.

Давление света, экспериментально открытое знаменитым русским ученым П. Н. Лебедевым, довольно просто объясняется квантовой теорией. Согласно этой теории каждый фотон обладает энергией $h\nu$ и импульсом $\frac{h\nu}{c}$, где $h$ — постоянная Планка, $\nu$ — частота и $c$ — скорость света. Пусть на единичную поверхность, нормальную световому потоку, за единицу времени падает $N$ фотонов. Тогда мощность светового потока $E$ и суммарный импульс $p$, сообщаемый единичной площадке, будут равны

$$E = Nh\nu, \quad p = N\frac{h\nu}{c}.$$

Исключая отсюда $N$, находим

$$p = \frac{E}{c}.$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда поверхность полностью поглощает световую энергию. При этом очевидно, что суммарный импульс $p$ и есть давление света на нормальную поверхность.

Если световой поток падает на поверхность под углом $\alpha$ к ее нормали, то на единицу поверхности попадет $N\cos\alpha$ фотонов и проекция силы светового давления на направление световых лучей будет

$$p = \frac{E\cos\alpha}{c}.$$

Предположим теперь, что спутник является шаром радиуса $\rho$. Тогда в силу симметрии направление силы светового давления, действующей на спутник, будет совпадать с направлением светового потока, а ее величина $P$ определится формулой

$$P = \int\limits_{(S)} \frac{E \cos \alpha}{c}\, dS, \tag{9.1.1}$$

где интеграл берется по всей освещенной поверхности спутника.

Обозначим через $E_0$ мощность солнечной радиации на поверхности Земли (без учета поглощения в атмосфере). Тогда на расстоянии $\Delta$ от Солнца мощность светового потока будет

$$E = E_0 \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^2, \tag{9.1.2}$$

где $a'$ — среднее расстояние от Земли до Солнца. Поэтому формула (9.1.1) примет вид

$$P = \frac{E_0}{c} \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^2 \int\limits_{(S)} \cos \alpha\, dS. \tag{9.1.3}$$

Величина $E_0$ называется *солнечной постоянной*. Ее численные значения, взятые из работы [1], приводятся в табл. 26.

Таблица 26

**Значения солнечной постоянной**

| Автор | $E_0$ эрг/см²сек |
|---|---|
| Мун (1940) | $1{,}322 \cdot 10^{-6}$ |
| Аллен (1950) | 1,374 |
| Олдрич (1954) | 1,357 |
| Джонсон (1954) | 1,396 |
| Стаир (1956) | 1,430 |

Интеграл, стоящий в правой части (9.1.3), равен $\pi\rho^2$, т. е. площади миделева сечения спутника $A$. Поэтому в случае полного поглощения величина ускорения, сообщаемого спутнику световым давлением, будет даваться

формулой

$$F = \frac{AE_0}{m_0 c}\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^2, \qquad (9.1.4)$$

где $m_0$ — масса спутника. Направление вектора ускорения совпадает с направлением распространения света.

Рассмотрим теперь случай, когда часть фотонов зеркально отражается от поверхности спутника. Пусть $\varkappa$ есть коэффициент отражения. Тогда отраженные фотоны сообщат единичной нормальной площадке дополнительный импульс $p' = \varkappa \frac{E}{c}$.

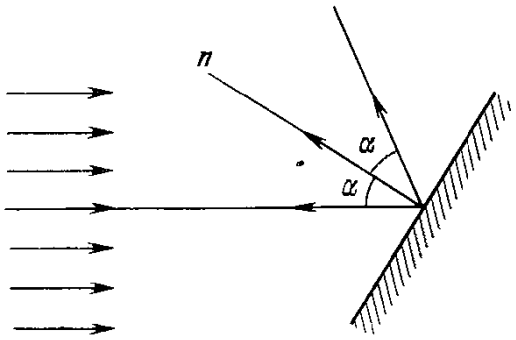


Рис. 39. Случай зеркального отражения.

Если световые лучи падают на поверхность под углом $\alpha$ к нормали, то дополнительный импульс по направлению светового потока, как это видно из рис. 39, будет равен

$$p' = \frac{\varkappa E \cos\alpha}{c}\cos 2\alpha.$$

Для сферического спутника в силу симметрии направление силы реакции отраженных фотонов совпадает с направлением распространения света, а величина этой силы определится формулой

$$P' = \int\limits_{(S)} \frac{\varkappa E \cos\alpha}{c}\cos 2\alpha \, dS,$$

где интеграл берется по поверхности полусферы. Но, как легко проверить

$$\int\limits_{(S)} \cos\alpha \cos 2\alpha \, dS = 0.$$

Поэтому и $P' = 0$.

Таким образом, при зеркальном отражении ускорение силы светового давления, действующее на сферический спутник, будет определяться той же формулой, что и в случае полного поглощения, т. е. формулой (9.1.4).

Рассмотрим, наконец, случай диффузного отражения. Предполагая, что диффузное отражение является полным,

и принимая, что свет рассеивается по закону Ламберта, мы будем иметь [2]

$$dE' = \frac{1}{\pi} E \cos\alpha \cos\gamma \, d\Omega.$$

Здесь $E\cos\alpha$ — мощность потока, падающего на единичную площадку под углом $\alpha$ к ее нормали, $d\Omega$ — некоторый элементарный телесный угол, $\gamma$ — угол между осью этого телесного угла и нормалью к рассматриваемой поверхности, $dE'$ — элемент мощности отраженного потока (рис. 40).

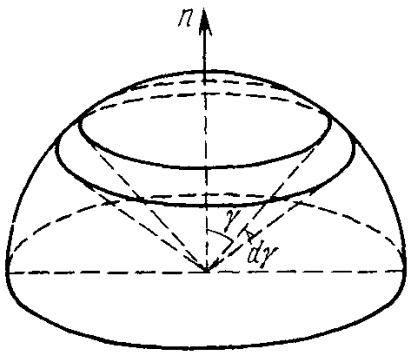

Рис. 40. Случай диффузного отражения.

Возьмем телесный угол, образованный двумя бесконечно близкими круговыми конусами, общая ось которых совпадает с нормалью к отражающей поверхности. Углы между образующими этих конусов и их осью пусть будут $\gamma$ и $\gamma + d\gamma$. Тогда

$$d\Omega = 2\pi \sin\gamma \, d\gamma.$$

Поэтому

$$dE' = 2E \cos\alpha \sin\gamma \cos\gamma \, d\gamma.$$

Так как отраженный поток симметричен относительно нормали, то сила давления, сообщаемая им площадке, будет перпендикулярна к поверхности. Следовательно, величина элементарного импульса будет определяться формулой

$$dp' = \frac{2E\cos\alpha}{c} \sin\gamma \cos^2\gamma \, d\gamma.$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, найдем

$$p' = \frac{2E\cos\alpha}{3c}. \qquad (9.1.5)$$

Из соображений симметрии видно, что в результате диффузного отражения света на спутник действует дополнительная сила $P'$, направление которой совпадает с направлением световых лучей. Чтобы найти величину этой

силы, нужно умножить выражение (9.1.5) на $\cos\alpha$ и проинтегрировать по всей освещенной поверхности спутника. Но поскольку в случае сферы

$$\int\limits_{(S)} \cos^2\alpha\, dS = \frac{2}{3} A,$$

то

$$P' = \frac{4}{9}\frac{EA}{c}.$$

Используя (9.1.2), мы для величины ускорения, сообщаемого отраженным потоком спутнику, находим следующую формулу:

$$F' = \frac{4}{9}\frac{E_0 A}{m_0 c}\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^2. \qquad (9.1.6)$$

Чтобы найти полное выражение для ускорения при диффузном отражении, нужно сложить давления, вызываемые падающим и отраженным потоками. При помощи (9.1.4) и (9.1.6) мы в результате получаем

$$F = 1{,}44\frac{E_0 A}{m_0 c}\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^2. \qquad (9.1.7)$$

Итак, для сферического спутника величина возмущающего ускорения может быть представлена формулой

$$F = kP_0\frac{A}{m_0}\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^2, \qquad (9.1.8)$$

где

$$P_0 = \frac{E_0}{c} = 4{,}65\cdot 10^{-5}\frac{\text{дин}}{\text{см}^2}. \qquad (9.1.9)$$

В случае зеркального отражения и полного поглощения $k = 1$, а для полного диффузного рассеивания $k = 1{,}44$.

В большинстве случаев, встречающихся на практике, нам неизвестны отражательные свойства поверхности спутника, и, следовательно, неизвестно точное значение коэффициента $k$; этот коэффициент должен определяться непосредственно из обработки наблюдений спутника.

Для сферического спутника, таким образом, определение возмущающего ускорения является довольно простой задачей. Гораздо сложнее обстоит дело, когда спутник имеет несферическую форму. Возмущающее ускорение здесь существенно зависит от формы спутника и от отражатель-

ных свойств его поверхности. Однако задача эта во многих отношениях аналогична задаче о сопротивлении атмосферы. Поэтому если предположить, что спутник равновероятно занимает свои положения относительно направления на Солнце, то для возмущающего ускорения мы можем воспользоваться формулой (9.1.8), в которой под $A$ нужно понимать площадь миделева сечения. Так как точные значения величин $A$ и $k$ нам неизвестны, то на практике численное значение коэффициента

$$\delta = kP_0 \frac{A}{m_0} \tag{9.1.10}$$

следует определять из обработки наблюдений спутника.

Нужно заметить, однако, что для некоторых спутников направление вектора возмущающего ускорения не будет совпадать с направлением распространения света. Это замечание нужно иметь в виду, особенно при исследовании движения некоторых специфических спутников (спутники-антенны и др.), когда компоненты возмущающего ускорения, перпендикулярные к световым лучам, могут иметь решающее значение.

## § 9.2. Возмущающая функция

Согласно (9.1.8) и (9.1.10) возмущающее ускорение $F$, обусловленное световым давлением, определяется формулой

$$F = \delta\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^2, \tag{9.2.1}$$

где $a'$ — расстояние от Земли до Солнца, $\Delta$ — расстояние между спутником и Солнцем, $\delta$ — некоторый постоянный коэффициент.

Как и раньше, мы будем пользоваться экваториальной геоцентрической системой координат $Oxyz$, ось $Oz$ которой направлена в северный полюс, а ось $Ox$ — в точку весеннего равноденствия. Поэтому направляющие косинусы возмущающего ускорения относительно осей координат будут

$$\frac{x-x'}{\Delta}, \quad \frac{y-y'}{\Delta}, \quad \frac{z-z'}{\Delta},$$

где $x'$, $y'$, $z'$ — геоцентрические координаты Солнца.

Для проекций возмущающего ускорения находим

$$\delta a'^2 \frac{x-x'}{\Delta^3}, \quad \delta a'^2 \frac{y-y'}{\Delta^3}, \quad \delta a'^2 \frac{z-z'}{\Delta^3}.$$

Следовательно, если ввести функцию $R$

$$R = -\frac{\delta a'^2}{\Delta}, \tag{9.2.2}$$

то она будет возмущающей функцией, ибо ее частные производные по координатам соответственно равны проекциям возмущающего ускорения на координатные оси.

Обозначим через $H$ угол между радиусом-вектором $r$ спутника и радиусом-вектором $a'$ Солнца. Тогда

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{ra'}, \tag{9.2.3}$$

$$\Delta^2 = r^2 + a'^2 - 2ra' \cos H. \tag{9.2.4}$$

Разложим при помощи (9.2.4) функцию $R$ в ряд по степеням отношения $r/a'$. Тогда

$$R = -\delta a' \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a'}\right)^k P_k(\cos H).$$

Поскольку отношение $r/a'$ мало́, мы можем ограничиться в полученном разложении лишь членами первого порядка. Поэтому, если отбросить слагаемое, не зависящее от координат спутника, будем иметь

$$R = -\delta r \cos H. \tag{9.2.5}$$

Выразим теперь $R$ через элементы орбиты спутника. Прежде всего для координат Солнца мы имеем формулы:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a' \cos\theta, \\ y' &= a' \sin\theta \cos\varepsilon', \\ z' &= a' \sin\theta \sin\varepsilon'; \end{aligned}\right\} \tag{9.2.6}$$

$\theta$ — долгота Солнца, $\varepsilon'$ — наклон эклиптики к экватору.

Если в формулах промежуточного движения отбросить периодические члены, пропорциональные параметру $\varepsilon$, то

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned}\right\} \tag{9.2.7}$$

где

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{9.2.8}$$

$$u = (1 + \nu)\, v + \omega_0, \quad \Omega = \mu\nu + \Omega_0, \tag{9.2.9}$$

а величины $\nu$ и $\mu$ даются равенствами (3.7.15) и (3.9.3).

Подставляя равенства (9.2.6)—(9.2.8) в формулы (9.2.5) и (9.2.3), мы найдем

$$R = -\delta p\,(1 + e\cos v)^{-1}\cos H, \tag{9.2.10}$$

$$\cos H = \sum_{r,\,j} A_{rj}\cos(u + r\theta + j\Omega) \quad (r = \pm 1,\ j = 0,\ \pm 1), \tag{9.2.11}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{-1,\,1} &= \tfrac{1}{4}(1+\alpha)(1+\alpha'), \\ A_{1,\,1} &= \tfrac{1}{4}(1+\alpha)(1-\alpha'), \\ A_{-1,\,0} &= \tfrac{1}{2}ss', \quad A_{1,\,0} = -\tfrac{1}{2}ss', \\ A_{-1,\,-1} &= \tfrac{1}{4}(1-\alpha)(1-\alpha'), \\ A_{1,\,-1} &= \tfrac{1}{4}(1-\alpha)(1+\alpha'), \end{aligned}\right\} \tag{9.2.12}$$

причем

$$s = \sin i,\ \alpha = \cos i,\ s' = \sin\varepsilon',\ \alpha' = \cos\varepsilon'.$$

Заметим, что полученное разложение для $R'$ аналогично разложению для возмущающей функции в случае притяжения Солнца, но оно проще и не содержит векового члена.

## § 9.3. Возмущения элементов без учета влияния тени

Предположим, что движение спутника происходит таким образом, что он не заходит в тень Земли. Для вывода формул для возмущений мы, как и раньше, воспользуемся дифференциальными уравнениями (4.11.13).

Используя (9.2.10), мы для функций $R'$, $F'$ и $\Phi'$ находим

$$R' = -\frac{\delta p}{fm}(1+e\cos v)^{-1}\cos H,$$

$$F' = -\frac{\delta p}{fm}(1+e\cos v)^{-3}\cos H,$$

$$\Phi' = -\frac{\delta p}{fm}(1+e\cos v)^{-3}(2+e\cos v)\sin v\cos H,$$

где $m$ — масса Земли.

При выводе формул для возмущений мы отбросим короткопериодические члены, которые в большинстве случаев настолько малы, что ими можно пренебречь. Тогда, если ввести коэффициенты

$$\left.\begin{aligned} M_1^{(1)}(e) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos v\,dv}{1+e\cos v},\\ M_3^{(1)}(e) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos v\,dv}{(1+e\cos v)^3},\\ N_3^{(1)}(e) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(2+e\cos v)\sin^2 v\,dv}{(1+e\cos v)^3} \end{aligned}\right\} \qquad (9.3.1)$$

и воспользоваться формулой (9.2.11), получим

$$\left.\begin{aligned} R' &= -\frac{\delta p}{fm}M_1^{(1)}\sum A_{rj}\cos(\omega+r\theta+j\Omega),\\ F' &= -\frac{\delta p}{fm}M_3^{(1)}\sum A_{rj}\cos(\omega+r\theta+j\Omega),\\ \Phi' &= \frac{\delta p}{fm}N_3^{(1)}\sum A_{rj}\sin(\omega+r\theta+j\Omega), \end{aligned}\right\} \qquad (9.3.2)$$

где $\omega = u - v$, а коэффициенты $A_{rj}$ определяются формулами (9.2.12).

Вычислив интегралы (9.3.1), найдем

$$M_1^{(1)} = -\frac{e}{(1-e^2)(1+\sqrt{1-e^2})},$$

$$M_3^{(1)} = -\frac{3}{2}e(1-e^2)^{-5/2},$$

$$N_3^{(1)} - \frac{dM_1^{(1)}}{de} = \frac{3}{2}(1-e^2)^{-3/2}.$$

Заметим теперь, что функции $R'$, $F'$ и $\Phi'$ по своей структуре аналогичны соответствующим функциям в случае лунно-солнечного притяжения, и для определения возмущений мы, следовательно, можем использовать тот же метод, что и в гл. VII. Поэтому приведем сразу окончательный результат.

Возмущения элементов имеют следующий вид:

$$\delta a = 0,$$

$$\delta e = -\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\sum \gamma_{rj}A_{rj}\cos(g+r\theta+j\Omega), \tag{9.3.3}$$

$$\delta i = \frac{3}{2}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sum \gamma_{rj}B_{rj}\cos(g+r\theta+j\Omega), \tag{9.3.4}$$

$$\delta\Omega = \frac{3}{2}\frac{e}{s\sqrt{1-e^2}}\sum \gamma_{rj}B_{rj}\sin(g+r\theta+j\Omega)+$$
$$+\frac{9}{4}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sum \gamma'_{rj}B'_{rj}\sin(g+r\theta+j\Omega), \tag{9.3.5}$$

$$\delta\omega = -\alpha\delta\Omega+\frac{3}{2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sum \gamma_{rj}A_{rj}\sin(g+r\theta+j\Omega)-$$
$$-\frac{9}{2}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sum \gamma'_{rj}A'_{rj}\sin(g+r\theta+j\Omega), \tag{9.3.6}$$

$$\delta M = -\frac{3}{2}\frac{1+4e^2}{e(1-e^2)^{3/2}}\sum \gamma_{rj}A_{rj}\sin(g+r\theta+j\Omega)-$$
$$-\frac{3e\lambda'}{(1-e^2)^{3/2}(1+\sqrt{1-e^2})}\sum \frac{r\gamma_{rj}A'_{rj}}{\nu+r\lambda'+j\mu}\sin(g+r\theta+j\Omega). \tag{9.3.7}$$

Здесь коэффициенты $B_{rj}$ даются такими формулами:

$$B_{-1,0}=\frac{1}{2}\alpha s', \quad B_{1,0}=-\frac{1}{2}\alpha s',$$
$$B_{-1,1}=-\frac{1}{4}s(1+\alpha'), \quad B_{-1,-1}=\frac{1}{4}s(1-\alpha'),$$
$$B_{1,-1}=\frac{1}{4}s(1+\alpha'), \quad B_{1,1}=-\frac{1}{4}s(1-\alpha'),$$

а коэффициенты $A'_{rj}$ и $B_{rj}$ определяются из равенств

$$A'_{rj}=(4-3s^2)A_{rj}+2\alpha sB_{rj},$$
$$B'_{rj}=4\alpha A_{rj}+sB_{rj},$$

где значок «0» у $\alpha$ и $s$ опущен.

Для $\gamma_{rj}$ и $\gamma'_{rj}$ имеем

$$\gamma_{rj} = \frac{\delta}{n^2 a (\nu + r\lambda' + j\mu)}, \qquad \gamma'_{rj} = \frac{\varepsilon^2 \delta}{n^2 a (\nu + r\lambda' + j\mu)^2},$$

где $\lambda' = \frac{n}{n_\odot}$, причем $n$ — среднее движение спутника, а $n_\odot$ — среднее движение Солнца.

В формулах (9.3.3) — (9.3.7) можно считать, что $\theta$ есть средняя долгота Солнца, а $g$ и $\Omega$ определяются равенствами

$$g = \nu n (t - t_0) + g_0, \quad \Omega = \mu n (t - t_0) + h_0,$$

где $g_0$ и $h_0$ — постоянные.

Сделаем теперь несколько замечаний. Световое давление, если не учитывать эффект тени, не вызывает вековых возмущений. Все элементы, за исключением $a$, имеют лишь долгопериодические возмущения с шестью различными аргументами вида $g + r\theta + j\Omega$, где $r = \pm 1$, $j = 0, \pm 1$. Для некоторых значений $i_0$, $a_0$, $e_0$ эти аргументы могут равняться нулю и мы будем иметь критические члены. Приближенные значения критических наклонов в зависимости от средней высоты $h_{ср}$ движения спутника приводятся в табл. 27.

Таблица 27

**Критические наклоны**

| $h_{ср}$ (км) | $\nu+\lambda'+\mu$ | $\nu-\lambda'-\mu$ | $\nu-\lambda'+\mu$ | $\nu+\lambda'-\mu$ | $\nu+\lambda'$ | $\nu-\lambda'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 49° | 70° | 42° | 76° | 59° | 67° |
| 1000 | 52 | 69 | 40 | 78 | 57 | 68 |
| 2000 | 55 | 67 | 38 | 81 | 56 | 71 |

Подробно критические наклоны исследованы в работе Е. Н. Поляховой [3].

## § 9.4. Теневая функция

В общем случае движение спутника происходит так, что он то освещен Солнцем, то находится в тени Земли. В результате этого сила светового давления является разрывной функцией, и это вызывает основные затруд-

нения при построении аналитической теории возмущений.

В 1963 г. Ферраз-Мелло [4], [5] предложил ввести *теневую функцию*, которая равна единице, когда спутник освещен Солнцем, и равна нулю, когда он находится в тени. Если умножить правые части дифференциальных уравнений для элементов на эту функцию, то они будут описывать движение спутника с учетом теневого эффекта. Ферраз-Мелло представил теневую функцию в виде некоторого ряда Фурье. Позже П. Лала, Л. Сехнал [6] и С. Н. Вашковьяк [7] дали несколько другие аналитические представления теневой функции.

Теневая функция Ферраз-Мелло. Рассмотрим рис. 41, на котором $O$ — центр Земли, $PC$ —

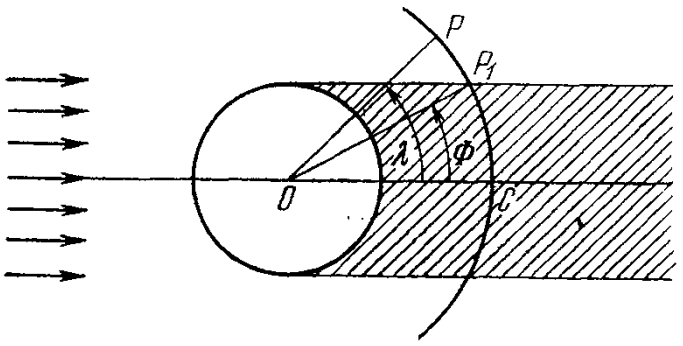


Рис. 41. Геометрическая картина тени.

часть орбиты спутника, $OC$ — ось тени. Предполагая, что тень имеет цилиндрическую форму, мы имеем

$$\sin\Phi = \frac{r_0}{r}, \tag{9.4.1}$$

и, кроме того,

$$\lambda = \pi - H, \tag{9.4.2}$$

где $H$ — угол между радиусом-вектором спутника и радиусом-вектором Солнца, а $r_0$ — средний радиус Земли.

Обозначим через $\Psi$ теневую функцию. Тогда будем иметь

$$\Psi = \begin{cases} 0, & -\Phi < \lambda < \Phi, \\ 1, & -\pi < \lambda < -\Phi, \quad \Phi < \lambda < \pi. \end{cases} \tag{9.4.3}$$

Разложим эту функцию в ряд Фурье:

$$\Psi = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\lambda, \tag{9.4.4}$$

где

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi \cos k\lambda \, d\lambda. \tag{9.4.5}$$

Разбивая промежуток интегрирования $[0, \pi]$ на $[0, \Phi]$ и $[\Phi, \pi]$ и имея в виду (9.4.3), мы из (9.4.5) находим

$$a_0 = \frac{2}{\pi}(\pi - \Phi), \qquad a_k = -\frac{2}{k\pi} \sin k\Phi.$$

Подставляя эти равенства в (9.4.4), получаем следующую формулу для теневой функции:

$$\Psi = 1 - \frac{\Phi}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin k\Phi \cos k\lambda. \tag{9.4.6}$$

Теневая функция П. Лала и Л. Сехнала. Пусть

$$\Psi = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\sin(\lambda - \Phi)}{\sqrt{1 - \cos^2(\lambda - \Phi)}}\right\}. \tag{9.4.7}$$

Эта функция удовлетворяет условию

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \lambda - \Phi < 0, \\ 1, & \lambda - \Phi > 0. \end{cases}$$

П. Лала и Л. Сехнал предложили разложить функцию $\Psi$ в ряд по степеням $\cos\lambda$. Это можно сделать следующим образом. Прежде всего имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\lambda - \Phi)}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos^{2k}(\lambda - \Phi),$$

где

$$b_k = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)}.$$

Но

$$\cos^{2k}(\lambda - \Phi) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_j^k \sin^{2j}(\lambda - \Phi).$$

Поэтому

$$\Psi = \frac{1}{2}\left\{1 + \sum_{j=0}^{\infty} A_j \sin^{2j+1}(\lambda - \Phi)\right\}, \tag{9.4.8}$$

где

$$A_j = \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^j \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2k)} C_j^k.$$

Из (9.4.8) нетрудно теперь получить следующую формулу для $\Psi$:

$$\Psi = \frac{1}{2}\left\{1 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_{jk} \sin^j \Phi \cos^k \lambda\right\}, \qquad (9.4.9)$$

где $B_{jk}$ суть некоторые численные коэффициенты.

Теневая функция С. Н. Вашковьяк. С. Н. Вашковьяк разлагает функцию $\Psi$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k (\cos\lambda). \qquad (9.4.10)$$

Коэффициенты этого ряда, как известно, определяются формулой

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} \Psi P_k (\cos\lambda) \sin\lambda\, d\lambda.$$

Для вычисления коэффициентов $c_k$ разобьем сначала промежуток интегрирования $[0, \pi]$ на два $[0, \Phi]$ и $[\Phi, \pi]$. Тогда, учитывая условия (9.4.3), найдем

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{\Phi}^{\pi} P_k (\cos\lambda) \sin\lambda\, d\lambda.$$

Используя теперь формулу

$$(2k+1) P_k (x) = P'_{k+1}(x) - P'_{k-1}(x),$$

получим

$$c_k = -\frac{1}{2}\int_{\Phi}^{\pi} [P'_{k+1}(\cos\lambda) - P'_{k-1}(\cos\lambda)]\, d\cos\lambda.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $P_n(-1) = (-1)^n$, легко находим

$$c_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos\Phi), \qquad (9.4.11)$$

$$c_k = \frac{1}{2}[P_{k+1}(\cos\Phi) - P_{k-1}(\cos\Phi)]. \qquad (9.4.12)$$

Подставляя (9.4.11) и (9.4.12) в (9.4.10), получаем

$$\Psi = \frac{1}{2}(1+\cos\Phi) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} P_k(\cos\lambda)\, P_{k+1}(\cos\Phi) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} P_k(\cos\lambda)\, P_{k-1}(\cos\Phi). \tag{9.4.13}$$

Разложение (9.4.13) плохо сходится при $\lambda = 0$. Чтобы устранить это, заменим в первой сумме (9.4.13) $k$ на $n-1$,

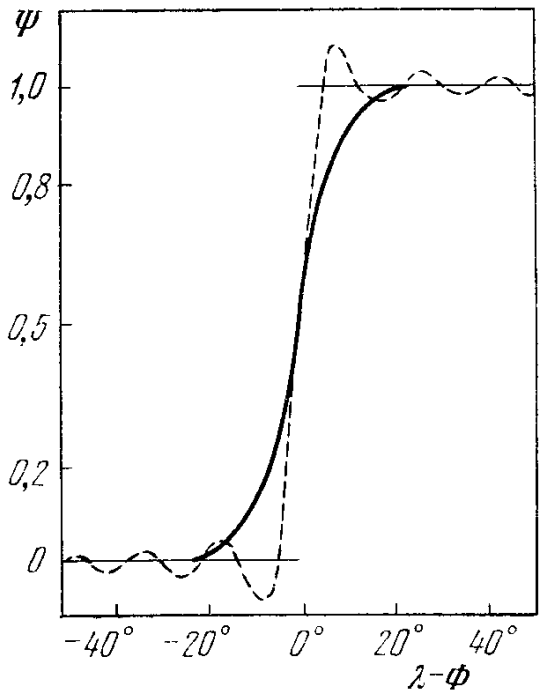


Рис. 42. Теневые функции Ферраз-Мелло и Лалы — Сехнала.

а во второй $k$ на $n+1$. Тогда окончательно найдем следующую формулу для $\Psi$:

$$\Psi = \frac{1}{2}\left\{1 - P_1(\cos\lambda) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos\Phi)\,[P_{n-1}(\cos\lambda) - P_{n+1}(\cos\lambda)]\right\}. \tag{9.4.14}$$

Итак, мы имеем три различные формулы для теневой функции $\Psi$. Графические изображения функции $\Psi$ даны на рис. 42 и 43. На рис. 42 пунктирная линия соответствует

функции Ферраз-Мелло, а сплошная — функции П. Лалы и Л. Сехнала для $i = k = 20$. На рис. 43 изображена теневая функция С. Н. Вашковьяк для $n = 10$ и $n = 20$. Табл. 28 показывает поведение $\Psi$ для $\Phi = 60°$ при разных $n$ (формула (9.4.14)).

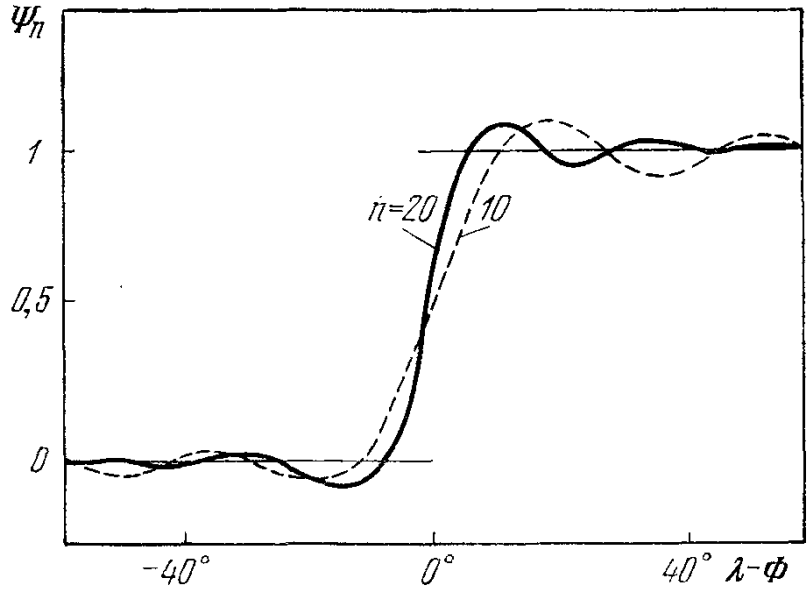


Рис. 43. Теневая функция Вашковьяк.

Наиболее правильно геометрическую картину представляет, по-видимому, формула (9.4.9). Формула (9.4.14) дает картину, аналогичную формуле (9.4.6). Однако функция С. Н. Вашковьяк имеет одно преимущество, которое

Таблица 28

**Значения функции $\Psi$ для $\Phi = 60°$**

| λ \ n | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| 115,0 | 1,048 | 0,991 | 1,013 | 0,992 | 1,002 |
| 101,1 | 0,963 | 1,006 | 1,011 | 1,014 | 1,000 |
| 85,2 | 1,033 | 1,025 | 0,974 | 1,004 | 0,987 |
| 70,2 | 0,991 | 1,075 | 0,977 | 0,966 | 1,028 |
| 60,3 | 0,492 | 0,538 | 0,547 | 0,562 | 0,587 |
| 50,4 | 0,037 | 0,089 | 0,002 | 0,037 | 0,017 |
| 40,5 | 0,057 | 0,041 | 0,025 | 0,008 | 0,004 |
| 25,8 | 0,021 | 0,022 | 0,002 | 0,003 | 0,001 |
| 11,7 | 0,006 | 0,004 | 0,007 | 0,002 | 0,000 |

заключается в том, что она может быть достаточно просто выражена через элементы орбиты спутника. Действительно, наиболее трудно выразить через элементы орбиты те компоненты $\Psi$, которые зависят от $\lambda$. Но поскольку $\cos\lambda$ отличается от $\cos H$ лишь знаком, то для нахождения $P_n(\cos\lambda)$ мы можем использовать результаты, полученные в главе VII. Выражение $P_n(\cos\Phi)$ через элементы, как мы увидим в § 9.6, не вызывает серьезных затруднений.

## § 9.5. Выражение $P_n(\cos\lambda)$ через элементы орбиты

Из формулы (9.4.2) следует, что $\cos\lambda = -\cos H$. Поэтому

$$P_n(\cos\lambda) = (-1)^n P_n(\cos H). \tag{9.5.1}$$

Введем сферические координаты. Тогда

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos w, & x' &= a'\cos\varphi'\cos w',\\ y &= r\cos\varphi\sin w, & y' &= a'\cos\varphi'\sin w',\\ z &= r\sin\varphi, & z' &= a'\sin\varphi', \end{aligned}$$

где $\varphi$ и $\varphi'$ — геоцентрические широты, а $w$ и $w'$ — долготы спутника и Солнца соответственно. Подставляя эти равенства в формулу (9.2.3), находим

$$\cos H = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(w - w').$$

Воспользуемся теперь теоремой сложения для полиномов Лежандра. Тогда получим

$$P_n(\cos H) = \sum_{q=0}^{n} \delta_q \frac{(n-q)!}{(n+q)!} P_n^{(q)}(\sin\varphi) P_n^{(q)}(\sin\varphi')\cos q(w - w'), \tag{9.5.2}$$

где $\delta_0 = 1$ и $\delta_q = 2$, если $q \geqslant 1$.

Введем далее функцию $\overline{R}$ по формуле

$$\overline{R} = \sum_{q=0}^{n} \delta_q \frac{(n-q)!}{(n+q)!} P_n^{(q)}(\sin\varphi) P_n^{(q)}(\sin\varphi') \times \exp\left[\sqrt{-1}\, q(w - w')\right]. \tag{9.5.3}$$

Действительная часть этой функции, очевидно, дает нам $P_n(\cos H)$. Если обозначить

$$R_{nq} = P_n^{(q)}(\sin\varphi)\exp\left(\sqrt{-1}\,qw\right),$$
$$R'_{nq} = P_n^{(q)}(\sin\varphi')\exp\left(-\sqrt{-1}\,qw'\right),$$

то функция $\overline{R}$ представится в виде

$$\overline{R} = \sum_{q=0}^{n} \delta_q \frac{(n-q)!}{(n+q)!} R_{nq} R'_{nq}. \tag{9.5.4}$$

Рассмотрим отдельно функции $R_{nq}$ и $R'_{nq}$. Поскольку согласно (6.1.5) и (6.1.7)

$$w = \Omega + \hat{w},$$

то

$$R_{nq} = \exp\left(\sqrt{-1}\,q\Omega\right) P_n^{(q)}(\sin\varphi)\exp\left(\sqrt{-1}\,q\hat{w}\right).$$

Но, как было показано в § 6.4,

$$P_n^{(q)}(\sin\varphi)\exp\left(\sqrt{-1}\,q\hat{w}\right) =$$
$$= (-1)^{\frac{n-q}{2}} \sum_{k=-n}^{n} A_{nq}^{k}(i)\exp\left(\sqrt{-1}\,ku\right),$$

где $A_{nq}^{k}$ — функции наклона, изученные в § 6.5. Поэтому

$$R_{nq} = (-1)^{\frac{n-q}{2}} \sum_{k=-n}^{n} A_{nq}^{k}(i)\exp\left[\sqrt{-1}\,(ku + q\Omega)\right]. \tag{9.5.5}$$

Найдем теперь выражение для $R'_{nq}$. Так как в случае Солнца $\Omega' = 0$, то

$$w' = \operatorname{Arctg}(\cos\varepsilon'\operatorname{tg} u'),$$

где $\varepsilon'$ — наклон эклиптики к экватору, а $u'$ — аргумент широты Солнца. Поэтому

$$P_n^{(q)}(\sin\varphi')\exp\left(\sqrt{-1}\,qw'\right) =$$
$$= (-1)^{\frac{n-q}{2}} \sum_{h=-n}^{n} A_{nq}^{(h)}(\varepsilon')\exp\left(\sqrt{-1}\,hu'\right)$$

и, следовательно,

$$R'_{nq} = (-1)^{\frac{n-q}{2}} \sum_{h=-n}^{n} A_{nq}^{h}(\varepsilon')\exp\left(-\sqrt{-1}\,hu'\right). \tag{9.5.6}$$

Подставляя (9.5.5) и (9.5.6) в формулу (9.5.4), получим

$$\overline{R} = \sum_{q=0}^{n} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{k'=-n}^{n} (-1)^{n-q} A_{nq}^{k}(i)\, A_{nq}^{k'}(\varepsilon') \times \\ \times \exp\left[\sqrt{-1}\,(ku - k'u' + q\Omega)\right]. \quad (9.5.7)$$

Взяв отсюда действительную часть и воспользовавшись формулой (9.5.1), мы найдем

$$P_n(\cos\lambda) = \sum_{q=0}^{n} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{k'=-n}^{n} (-1)^{q} A_{nq}^{k}(i)\, A_{nq}^{k'}(\varepsilon') \times \\ \times \cos(ku - k'u' + q\Omega). \quad (9.5.8)$$

Полученное выражение для $P_n(\cos\lambda)$ удобно, если при определении возмущений мы будем пользоваться уравнениями (4.11.13), в которых независимой переменной служит $v$. Но если мы захотим использовать канонические уравнения с независимой переменной $t$ или уравнения (4.9.1), то от аргумента широты $u$ нам нужно перейти к средней аномалии $M$. Это можно сделать следующим образом.

Пренебрегая, как и раньше, эксцентриситетом орбиты Солнца, мы можем написать

$$u' = \theta, \quad u = v + \omega,$$

где $\theta$ — средняя долгота Солнца. Поэтому

$$\exp\left[\sqrt{-1}\,(ku + q\Omega - k'u')\right] = \\ = \exp\left(\sqrt{-1}\,kv\right) \exp\left[\sqrt{-1}\,(k\omega + q\Omega - k'\theta)\right]. \quad (9.5.9)$$

Но, как было показано в § 6.4,

$$\exp\left(\sqrt{-1}\,kv\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_{0,\,p}^{k}(e) \exp\left(\sqrt{-1}\,pM\right), \quad (9.5.10)$$

где $B_{0,p}^{k}$ — коэффициенты Ганзена.

Подставим теперь (9.5.10) и (9.5.9) в (9.5.7) и возьмем действительную часть. В результате получим

$$P_n(\cos\lambda) = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{n}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{k'=-n}^{n}(-1)^q B^k_{0,\,p}(e)\,A^k_{nq}(i)\,A^{k'}_{nq}(\varepsilon')\times \times\cos(pM+k\omega+q\Omega-k'\theta). \quad (9.5.11)$$

Методика вычисления функций $B^k_{0,p}$ и $A^k_{nq}$ дается в § 6.5 и 6.6.

## § 9.6. Выражение $P_n(\cos\Phi)$ через элементы орбиты

Чтобы получить разложение теневой функции, нам нужно еще выразить $P_n$ (cos Φ) через элементы орбиты. Согласно (9.4.1) переменная Φ определяется из формулы

$$\sin\Phi = \frac{r_0}{r},$$

где $r_0$ — средний радиус Земли, а

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}.$$

Если положить

$$\sin\Phi_0 = \frac{r_0}{p}, \quad (9.6.1)$$

то для sin Φ найдем

$$\sin\Phi = \sin\Phi_0\,(1+e\cos v).$$

Поэтому

$$\cos\Phi = \cos\Phi_0\,[1-2e\,\mathrm{tg}^2\,\Phi_0\cos v - e^2\,\mathrm{tg}^2\,\Phi_0\cos^2 v]^{1/2}.$$

Разложим полученное выражение в ряд по степеням $e$. Тогда, ограничиваясь членами второго порядка, будем иметь

$$\cos\Phi = \cos\Phi_0 - A_1 e\cos v - A_2 e^2\cos^2 v, \quad (9.6.2)$$

где

$$A_1 = \frac{\sin^2\Phi_0}{\cos\Phi_0}, \quad A_2 = \frac{\sin^2\Phi_0}{2\cos^3\Phi_0}. \quad (9.6.3)$$

Разлагая теперь $P_n(\cos\Phi)$ в ряд по степеням $e$, найдем

$$P_n(\cos\Phi) = P_n(\cos\Phi_0) - P_n'(\cos\Phi_0)[A_1 e\cos v + A_2 e^2\cos^2 v] + \\ + \frac{1}{2}P_n''(\cos\Phi_0)A_1^2 e^2\cos^2 v + \ldots \qquad (9.6.4)$$

Ограничиваясь членами до $e^2$ включительно, мы можем формулу (9.6.4) представить в виде

$$P_n(\cos\Phi) = D_n^{(0)} + e^2 D_n^{(2)} + eD_n^{(1)}\cos v + e^2 D_n^{(2)}\cos 2v, \qquad (9.6.5)$$

где

$$\left.\begin{aligned} D_n^{(0)} &= P_n(\cos\Phi_0), \\ D_n^{(1)} &= -A_1 P_n'(\cos\Phi_0), \\ D_n^{(2)} &= \frac{1}{4}A_1^2 P_n''(\cos\Phi_0) - \frac{1}{2}A_2 P_n'(\cos\Phi_0). \end{aligned}\right\} \qquad (9.6.6)$$

Преобразуем выражения (9.6.6). Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением для полиномов Лежандра (1.2.11) и формулой (1.2.5). Тогда с помощью равенств (9.6.3) для $D_n^{(k)}$ найдем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} D_n^{(0)} &= P_n(\cos\Phi_0), \\ D_n^{(1)} &= nP_n(\cos\Phi_0) - \frac{n}{\cos\Phi_0}P_{n-1}(\cos\Phi_0), \\ D_n^{(2)} &= \frac{n(1-2\sin^2\Phi_0)}{4\cos^3\Phi_0}P_{n-1}(\cos\Phi_0) - \\ &\quad - \frac{n[1-(n-1)\sin^2\Phi_0]}{4\cos^2\Phi_0}P_n(\cos\Phi_0). \end{aligned}\right\} \qquad (9.6.7)$$

При вычислении по формулам (9.6.7) можно использовать рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра, приведенные в § 1.2.

Формула (9.6.5) выражает $P_n(\cos\Phi)$ через промежуточную переменную $v$.

Выразим теперь $P_n(\cos\Phi)$ через переменную $M$. Это можно легко сделать, если воспользоваться уравнением центра:

$$v = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \ldots \qquad (9.6.8)$$

С принятой точностью мы тогда получим

$$P_n(\cos\Phi) = D_n^{(0)} + e^2(D_n^{(2)} - D_n^{(1)}) + \\ + eD_n^{(1)}\cos M + e^2(D_n^{(2)} + D_n^{(1)})\cos 2M, \quad (9.6.9)$$

где $D_n^{(k)}$ определяются формулами (9.6.7).

## § 9.7. Уравнения для возмущений элементов с учетом тени

Развитая в предыдущих параграфах теория теневой функции позволяет получить возмущения элементов орбиты с учетом теневого эффекта. В этом параграфе мы выведем уравнения для возмущений канонических элементов, аналогичных элементам Делоне.

Получим сначала выражение возмущающей функции через эти элементы. С помощью (9.6.8) из формул (9.2.10) и (9.2.11) легко находим

$$R = \delta a \sum_k \sum_{r'} \sum_j B_k A_{r'j} \cos(kM + r'\theta + j\Omega + \omega),$$

где с точностью до $e^2$

$$B_0 = \frac{3}{2}e, \quad B_{-1} = -\frac{e^2}{8}, \quad B_1 = -1 + \frac{e^2}{2},$$

$$B_2 = -\frac{e}{2}, \quad B_3 = -\frac{3}{8}e^2,$$

а $A_{r'j}$ определяются равенствами (9.2.12).

Если в функции $R$ отбросить члены, пропорциональные $\varepsilon^2$, то согласно § 4.5 мы можем принять, что

$$a = \frac{L^2}{fm}, \quad 1 - e^2 = \frac{G^2}{L^2}, \quad \cos i = \frac{H}{G},$$

$$M = l, \quad \omega = g, \quad \Omega = h.$$

Поэтому функция $R$ представится в виде

$$R = \sum_k \sum_{r'} \sum_j N_{k,r',j}(L, G, H)\cos(kl + g + jh + r'\theta), \quad (9.7.1)$$

где

$$N_{k,r',j} = \delta \frac{L^2}{fm} B_k A_{r'j},$$

причем предполагается, что $B_k$ и $A_{r'j}$ выражены через $L$, $G$, $H$.

Результаты, полученные в § 9.4—9.6, позволяют также записать функцию $\Psi$ следующим образом:

$$\Psi = \sum_m \sum_p \sum_q \sum_r T_{m,p,q,r}(L, G, H) \times \\ \times \cos(ml + pg + qh + r\theta). \quad (9.7.2)$$

Мы не будем здесь приводить выражение для коэффициента $T_{m,p,q,r}$. Его нетрудно получить, если воспользоваться формулами (9.6.9), (9.5.11′) и (9.4.14).

Напишем теперь уравнения для элементов. Согласно § 4.5 они будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \Psi \frac{\partial R}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial L} - \Psi \frac{\partial R}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \Psi \frac{\partial R}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial G} - \Psi \frac{\partial R}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \Psi \frac{\partial R}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial H} - \Psi \frac{\partial R}{\partial H}, \end{aligned}\right\} \quad (9.7.3)$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{(fm)^2}{2L^2}\left\{1 - \frac{c^2(1+\sigma^2)(fm)^2}{2LG^3}\left(1 - 3\frac{H^2}{G^2}\right) + O(c^4)\right\}.$$

При $R = 0$ уравнения (9.7.3) дают

$$\left.\begin{aligned} L &= L_0, & l &= n(t - t_0) + l_0, \\ G &= G_0, & g &= n'(t - t_0) + g_0, \\ H &= H_0, & h &= n''(t - t_0) + h_0, \end{aligned}\right\} \quad (9.7.4)$$

где

$$n = \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_0}, \quad n' = \frac{\partial \alpha_1}{\partial G_0}, \quad n'' = \frac{\partial \alpha_1}{\partial H_0},$$

а $L_0$, $G_0$, $H_0$, $l_0$, $g_0$, $h_0$ — постоянные.

Формулы предыдущих параграфов позволяют выразить правые части уравнений (9.7.3) в виде явных функций элементов орбиты и времени $t$. Подстановка в них формул (9.7.4) и последующее интегрирование дают возможность построить в аналитическом виде теорию возмущений от светового давления с учетом теневого эффекта. Такая теория была развита в работах С. Н. Вашковьяк [15], [16]. Она достаточна сложна, однако, использование ЭВМ позволяет довольно быстро проводить все необходимые вычисления.

## § 9.8. Влияние светового давления на движение спутников

Из дифференциальных уравнений (9.7.3) и формул (9.7.1) и (9.7.2) видно, что элементы $L$, $G$, $H$, а следовательно, и $a$, $e$, $i$, не имеют (по крайней мере в первом приближении) вековых возмущений. В то же самое время элементы $l$, $g$, $h$ подвержены вековым изменениям. Им соответствуют те члены в $R$ и $\Psi$, для которых $m = k$, $p = 1$, $q = j$ и $r = r'$.

Численные значения вековых возмущений рассмотрим на примере спутника «Пагеос», элементы орбиты которого равны

$$a = 10600 \text{ км}, \quad e = 0{,}05, \quad i = 86°$$

и отношение $\frac{A}{m_0} = 130 \text{ см}^2/\text{г}$.

Для этого спутника суточные вековые изменения составляют

$$\Delta l = 0°{,}0057, \quad \Delta g = -0°{,}00017, \quad \Delta h = 0°{,}000001.$$

Заметим, что если не учитывать эффект тени, то все элементы не имели бы вековых возмущений.

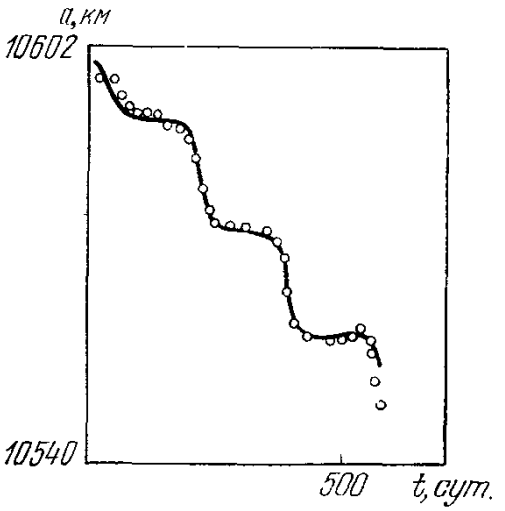


Рис. 44. Изменение большой полуоси орбиты спутника «Пагеос».

Из предыдущего параграфа следует, что все элементы подвержены долгопериодическим возмущениям. Этим возмущениям соответствуют те члены в $R$ и $\Psi$, для которых $m = \pm k$.

Для спутника «Пагеос» на рис. 44—46 показаны изменения элементов $a$, $e$, $\Omega$ на промежутке времени около 500 суток. Эти рисунки показывают, что долгопериодические возмущения для некоторых спутников могут достигать весьма значительной величины.

Конечно, все элементы имеют короткопериодические возмущения с периодом, равным примерно одному периоду обращения спутника. В табл. 29 приводятся максимальные амплитуды таких возмущений четырех спутников [8].

Таблица 29

**Короткопериодические возмущения**

| | «Эхо-1» | «Эхо-2» | «Пагеос» | «Транзит» |
|---|---|---|---|---|
| $a$ (км) | 7780 | 7400 | 10 600 | 7460 |
| $A/m_0$ ($см^2/г$) | 115 | 52 | 130 | 0,1 |
| $\Delta a$ (м) | 120 | 70 | 450 | 0,15 |
| $\Delta e$ ($10^{-6}$) | 10 | 2 | 20 | 0,01 |
| $\Delta i$ (″) | 2 | 0,4 | 4 | 0,002 |
| $\Delta\Omega$ (″) | 2 | 0,4 | 4 | 0,002 |
| $\Delta\omega$ (″) | 32 | 25 | 22 | 0,2 |
| $\Delta M$ (″) | 32 | 25 | 23 | 0,2 |

Изменения элементов $a$ и $e$ спутника «Эхо-1» на промежутке времени, равном одному обороту спутника,

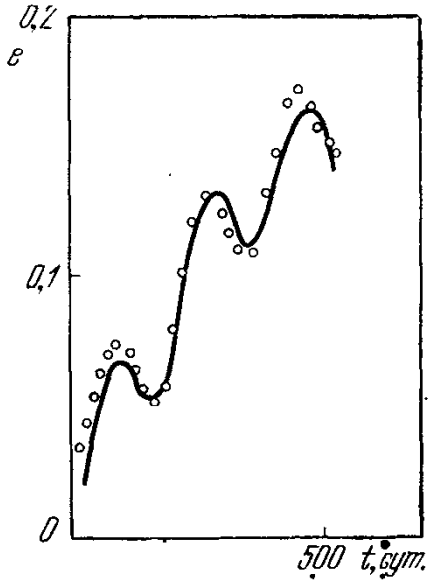


Рис. 45. Изменение эксцентриситета орбиты спутника «Пагеос».

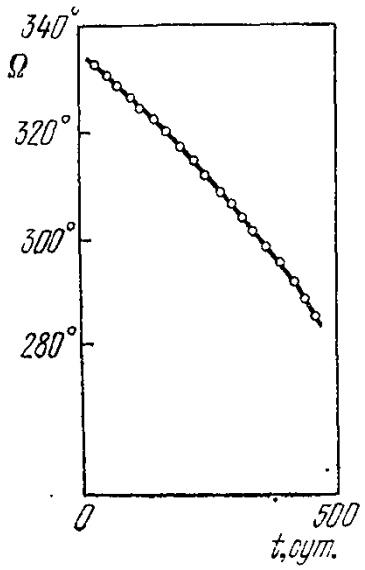


Рис. 46. Изменение элемента Ω в случае спутника «Пагеос».

показаны на рис. 47 и 48. Штрихованная линия соответствует возмущениям без учета тени, сплошная — возмущениям с учетом теневого эффекта.

Изменения эксцентриситета орбиты за один оборот трех спутников приводятся в табл. 30. В этой таблице

Таблица 30

**Возмущения эксцентриситета**

| | «Эхо-1» | «Эхо-2» | «Эксплорер-19» |
|---|---|---|---|
| $\Delta e_0$ | $1{,}6\cdot10^{-5}$ | $-1{,}5\cdot10^{-5}$ | $-4{,}8\cdot10^{-6}$ |
| $\Delta e_c$ | $1{,}7\cdot10^{-5}$ | $-1{,}4\cdot10^{-5}$ | $-5{,}3\cdot10^{-6}$ |
| $\Delta e_s$ | $2{,}1\cdot10^{-5}$ | $-1{,}8\cdot10^{-5}$ | $-6{,}1\cdot10^{-6}$ |

в первой строке приведены результаты наблюдений, во второй — возмущения, вычисленные с учетом тени, в третьей — возмущения, найденные без учета тени.

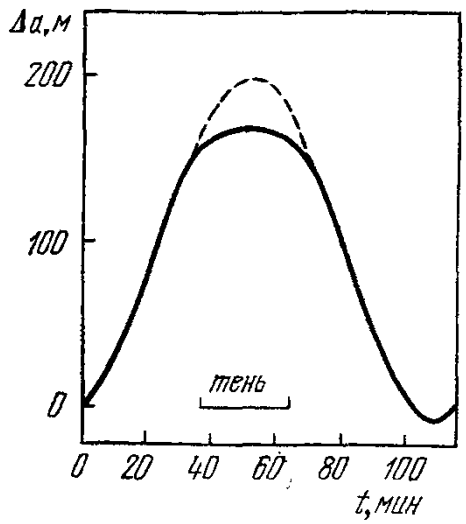


Рис. 47. Короткопериодические возмущения элемента $a$ для спутника «Эхо-1».

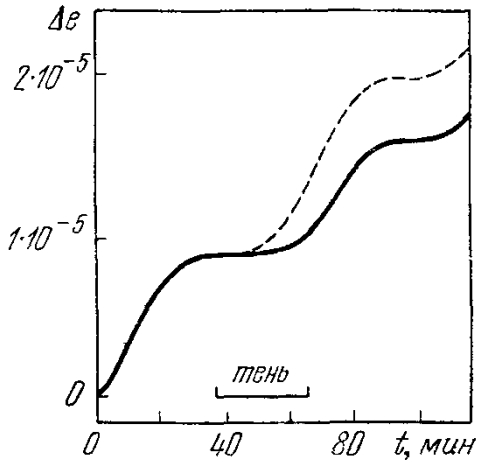


Рис. 48. Изменение элемента $e$ за один оборот спутника «Эхо-1».

Сравнение теоретических результатов с данными наблюдений для спутника «Эхо-1» показано также на рис. 49 и 50. На этих рисунках штрихованная линия дает изменения элементов без учета влияния светового давления, сплошная — изменения с учетом светового давления. Точки означают данные, полученные из наблюдений.

Как и в случае сопротивления атмосферы, возмущения от светового давления пропорциональны отношению $A/m_0$. Поэтому (и это подтверждают приведенные здесь численные результаты) возмущения от светового давления дости-

гают значительной величины для спутников — баллонов «Эхо-1», «Эхо-2», «Шагеос»), для которых это отношение велико (порядка 100 $см^2/г$). Для большинства спутников

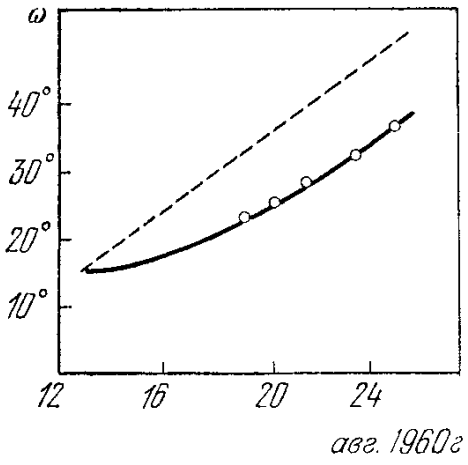


Рис. 49. Изменение элемента ω спутника «Эхо-1».

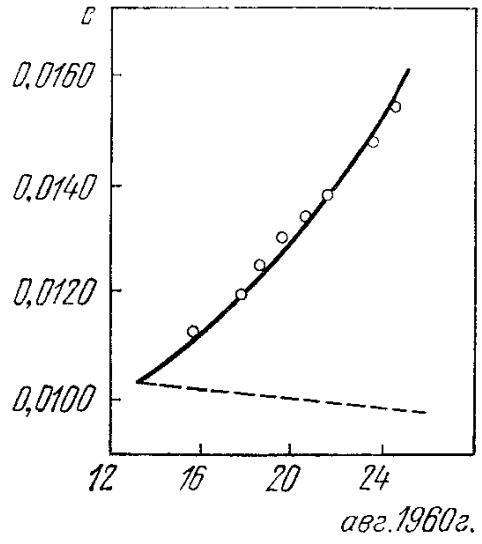


Рис. 50. Изменение элемента $e$ спутника «Эхо»-1».

величина $A/m_0$ имеет порядок 0,1 $см^2/г$. Поэтому возмущения таких спутников малы. Однако при точных исследованиях и они должны приниматься во внимание.

## § 9.9. Замечания

Первые теоретические работы по исследованию возмущений от светового давления на движение искусственных спутников принадлежат П. Мюзену [9], Паркинсону, Джонсу, Шапиро [10]. Они были связаны с изучением движения спутника «Авангард-1». Оказалось, что теория движения этого спутника, учитывающая гравитационные возмущения (гравитационное поле Земли, притяжение Луны и Солнца), не давала должного согласия с наблюдениями. В этих работах были определены в первом приближении важнейшие возмущения. При этом пренебрегалось эффектом тени и предполагалось, что поверхность спутника зеркально отражает солнечные лучи.

На рис. 51 показано поведение высоты перигея $h_p$ спутника «Авангард-1» на промежутке времени около

600 суток. Пунктирная кривая на этом рисунке соответствует лунно-солнечным возмущениям, сплошная кривая построена с учетом светового давления.

Дальнейшие исследования влияния светового давления были стимулированы запуском спутников-баллонов («Эхо-1», «Эхо-2», «Пагеос»). Возмущения в движении этих спутников, вызываемые солнечной радиацией, достигают значительной величины и определяются из наблюдений с высокой точностью. В связи с этим появилась

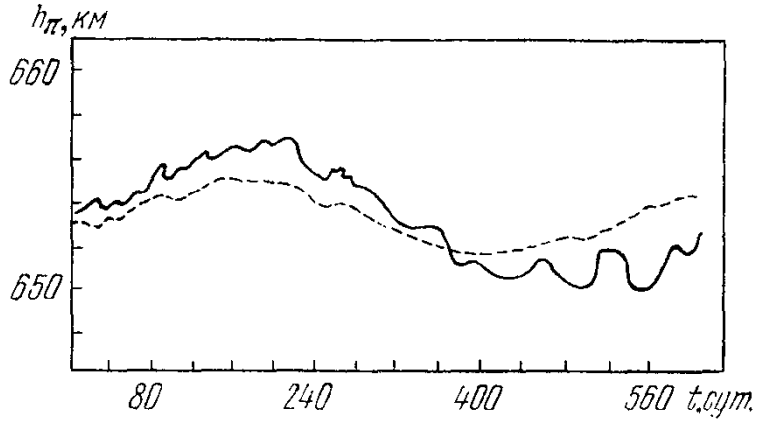


Рис. 51. Изменение высоты перигея спутника «Авангард-1».

необходимость более точного изучения светового давления и прежде всего эффекта экранирования солнечных лучей Землей. В 1961 г. И. Козаи [11] выводит формулы для возмущений с учетом теневого эффекта, Брайянт [12] для определения возмущений использует метод осреднения Крылова — Боголюбова, Задунайский и др. [13] изучают возмущения в движении «Эхо-1», И. Козаи при определении коэффициентов геопотенциала учитывает эффекты светового давления.

Новый этап в развитии теории связан с идеей Ферраз-Мелло о введении теневой функции. Как уже отмечалось в § 9.4, Ферраз-Мелло предложил разложить теневую функцию в ряд Фурье [4], [5]. Позже П. Лала и Л. Сехнал [6] и С. Н. Вашковьяк [7] дали несколько другие представления этой функции.

Ферраз-Мелло [14] развил общую теорию возмущений с учетом нескольких первых членов разложения теневой функции. П. Лала и Л. Сехнал [6], [8] разработали

подробную полуаналитическую теорию короткопериодических возмущений. С. Н. Вашковьяк [15], [16] построила теорию долгопериодических возмущений с учетом любого числа членов теневой функции. Эти две теории с успехом могут быть использованы для практических расчетов.

Заканчивая эту главу, нужно упомянуть еще о возмущениях, связанных с отражением солнечных лучей от поверхности Земли. Эти эффекты, которые значительно меньше возмущений, вызываемых прямым солнечным давлением, рассматривались в работах Л. Сехнала [17], [18], Уайятта [19] и Бейкера [1].

ГЛАВА X

# ДРУГИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫХ КООРДИНАТ СПУТНИКА

## § 10.1. Введение

Помимо несферичности Земли, притяжения Луны и Солнца, сопротивления атмосферы и светового давления на движение спутника действует целый ряд других возмущающих факторов. К ним относятся прецессия и нутация экваториальной плоскости Земли, приливная деформация Земли, электромагнитные силы, притяжение атмосферы и релятивистские эффекты. Все эти факторы вызывают малые возмущения в движении спутника, которые, однако, при некоторых исследованиях нужно принимать во внимание.

В предыдущих главах мы предполагали, что положение плоскости экватора Земли как основной координатной плоскости является фиксированным в пространстве. Но вследствие прецессии и нутации система координат, связанная с экваториальной плоскостью, не является инерциальной и в результате в движении спутника появляются дополнительные возмущения. Эти возмущения могут рассматриваться как косвенные лунно-солнечные возмущения.

Влияние прецессии и нутации было рассмотрено в работах И. Козаи [1] и К. Ламбека [2]. Наиболее полные результаты получены в прекрасной работе И. Козаи и Х. Киноширы [3]. Авторами были выведены формулы, дающие возмущения элементов орбиты спутника с весьма высокой точностью. Они подтвердили тот вывод, что в практике исследования движения искусственных спутников наиболее удобной системой координат является координатная система, предложенная Г. Вайсом и К. Муром. Наклон орбиты и аргумент перигея в этой системе отсчитываются от экватора даты (момента наблюдения), а долгота узла измеряется от точки весеннего равноденствия эпохи (скажем, 1950.0) вдоль фиксированного экватора до линии

узлов экватора даты, а затем вдоль экватора даты (см. рис. 52).

Потенциал земного притяжения изменяется с временем также под действием приливной деформации Земли. Это приводит к возмущениям орбиты спутника. Формулы для этих возмущений были получены в работах И. Козаи

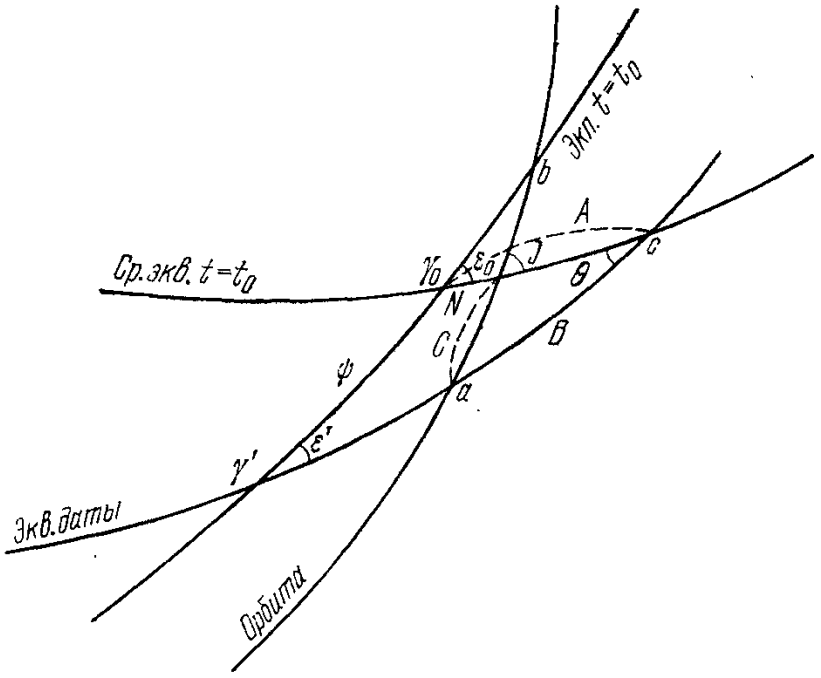


Рис. 52. Система координат Вайса — Мура.

[4], В. Каулы [5] и П. Мюзена [6], [7]. Наиболее значительными возмущениями, вызываемыми приливной деформацией Земли, являются вековые и долгопериодические возмущения с периодом около 18 лет. Точность современных наблюдений ИСЗ позволяет выявить эти возмущения из наблюдений.

Возмущения, обусловленные электромагнитными силами, изучались в работах Г. Вестермана [8] и Л. Сехнала [9]. Л. Сехнал подробно исследовал возмущения наклона орбиты. Им показано, что эти возмущения очень малы. Для того чтобы их можно было обнаружить из наблюдений, необходим потенциал спутника в 100—1000 вольт. Однако, как отмечают в своей работе Д. Бирд и Ф. Джонсон [10], спутник при движении в атмосфере приобретает

потенциал в несколько десятых долей вольта. Эти оценки подтверждаются измерениями на ракетах.

На движение искусственного спутника оказывает влияние не только сила сопротивления атмосферы, но и сила ее притяжения. Потенциал притяжения атмосферы подобно потенциалу притяжения Земли можно представить рядом по сферическим функциям. Поэтому задача о возмущениях элементов орбиты от притяжения атмосферы сводится к определению коэффициентов этого ряда. Если бы атмосфера была стационарной, то эти коэффициенты были бы постоянными и тогда их можно рассматривать как некоторые добавки к соответствующим коэффициентам геопотенциала. И все было бы просто. Однако плотность атмосферы зависит от времени. Поэтому зависят от времени и коэффициенты потенциала притяжения атмосферы. Сезонные изменения этих коэффициентов были исследованы В. Г. и Е. Б. Шкодровыми [11]. Ими изучены также соответствующие возмущения долготы узла и аргумента перигея орбиты спутника.

Большой интерес представляет исследование релятивистских эффектов. Как известно, в теории движения планет наибольшими поправками к ньютоновскому движению являются поправки к вековым изменениям перигелиев орбит. Подобные эффекты имеют место и в случае движения спутников. Здесь следует также изучить аналогичные поправки к изменениям долгот узлов.

В этой главе мы рассмотрим все эти малые возмущения. При этом более подробно будет изложена теория возмущений, связанных с прецессией и нутацией экваториальной плоскости и приливной деформацией Земли. Эта теория представляет большой интерес как в практическом, так и в теоретическом отношении. Что касается теории остальных возмущений, то ее мы рассмотрим в более краткой форме.

## § 10.2. Возмущения, вызываемые прецессией и нутацией экваториальной плоскости Земли

Выберем прямоугольную геоцентрическую систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость $xy$ совпадала с плоскостью среднего экватора эпохи $t = t_0$, ось $Ox$ была направлена в среднюю точку весны той же эпохи, ось $Oz$

направлена в северный полюс, а ось $Oy$ дополняла систему до правой. Наклон, долготу узла и аргумент перигея относительно этой системы координат обозначим через $J$, $N$ и Ф. Элементы орбиты, отнесенные к мгновенному экватору и точке весны эпохи $t = t_0$, обозначим через $i$, $\Omega$ и $\omega$.

Рассмотрим теперь рис. 52. На нем $\theta$ означает угол между средним экватором эпохи $t = t_0$ и мгновенным экватором, $\psi$ — дуга эклиптики эпохи $t = t_0$ между ними, а $\varepsilon_0$ и $\varepsilon'$ — их наклоны к этой эклиптике; $A$, $B$, $C$ — вспомогательные дуги, причем

$$\Omega = A - B, \quad C = \omega - \Phi. \tag{10.2.1}$$

Из сферических треугольников на рис. 52 имеем следующие формулы, которые связывают элементы $J$, $N$, Ф с элементами $i$, $\Omega$, $\omega$:

$$\frac{\sin(A-\Omega)}{\sin J} = \frac{\sin(A-N)}{\sin i} = \frac{\sin C}{\sin\theta}, \tag{10.2.2}$$

$$\sin\theta\cos(A-N) = \sin(J-i) + 2\sin^2\frac{C}{2}\sin i\cos J, \tag{10.2.3}$$

$$\sin C\cos J = \sin(N-\Omega) + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin(A-\Omega)\cos(A-N), \tag{10.2.4}$$

$$\cos i = \cos\theta\cos J + \sin\theta\sin J\cos(A-N), \tag{10.2.5}$$

$$\sin i\cos C = \cos\theta\sin J - \sin\theta\cos J\cos(A-N), \tag{10.2.6}$$

$$\sin\theta\cos(A-\Omega) = -\cos J\sin i + \sin J\cos i\cos C, \tag{10.2.7}$$

$$\cos(A-N) = \cos C\cos(A-\Omega) + \sin C\cos i\sin(A-\Omega). \tag{10.2.8}$$

Система координат $Oxyz$ обладает тем свойством, что направления ее осей фиксированы в пространстве. Поэтому в этой системе координат имеют силу дифференциальные уравнения для элементов, которые были получены в гл. IV. Для описания движения спутника мы возьмем уравнения (4.9.1). Применительно к обозначениям

настоящего параграфа они запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M},\\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \Phi},\\
\frac{dJ}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} J}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Phi} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin J}\frac{\partial R}{\partial N},\\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{d\Phi}{dt} &= n' + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} J}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial J},\\
\frac{dN}{dt} &= n'' + \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin J}\frac{\partial R}{\partial J}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.9)$$

Поскольку рассматриваемые здесь возмущения заведомо малы, мы в коэффициентах при производных возмущающей функции по элементам отбросили члены, пропорциональные $\varepsilon$, и положили

$$fm = n^2a^3.$$

Перейдем теперь в уравнениях (10.2.9) от элементов $J$, $N$, $\Phi$ к элементам $i$, $\Omega$ и $\omega$. Прежде всего мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= \frac{\partial i}{\partial J}\frac{dJ}{dt} + \frac{\partial i}{\partial N}\frac{dN}{dt} + \frac{\partial i}{\partial \Phi}\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial i}{\partial t},\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial \omega}{\partial J}\frac{dJ}{dt} + \frac{\partial \omega}{\partial N}\frac{dN}{dt} + \frac{\partial \omega}{\partial \Phi}\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial \omega}{\partial t},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial J}\frac{dJ}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial N}\frac{dN}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi}\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.10)$$

Для частных производных $R$ по элементам $J$, $N$, $\Phi$ также находим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial J} &= \frac{\partial R}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial J} + \frac{\partial R}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial J} + \frac{\partial R}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial J},\\
\frac{\partial R}{\partial N} &= \frac{\partial R}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial N} + \frac{\partial R}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial N} + \frac{\partial R}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial N},\\
\frac{\partial R}{\partial \Phi} &= \frac{\partial R}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial \Phi} + \frac{\partial R}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} + \frac{\partial R}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \Phi}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.11)$$

Далее формулы (10.2.2) — (10.2.8) дают

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial i}{\partial J}=\cos C, \quad \frac{\partial i}{\partial N}=-\sin J\sin C, \quad \frac{\partial i}{\partial \Phi}=0,\\
&\frac{\partial \omega}{\partial J}=-\sin C\operatorname{ctg} i,\\
&\frac{\partial \omega}{\partial N}=\cos J-\sin J\operatorname{ctg} i\cos C, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \Phi}=1,\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial J}=\frac{\sin C}{\sin i}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial N}=\frac{\sin J\cos C}{\sin i}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.12)$$

Подставляя формулы (10.2.9) и (10.2.12) в уравнения (10.2.10) и учитывая (10.2.11), мы после простых преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M},\\
&\frac{de}{dt}=\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial M}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
&\frac{di}{dt}=\frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega}-\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}+\frac{\partial i}{\partial t},\\
&\frac{dM}{dt}=n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
&\frac{d\omega}{dt}=n'+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{\partial \omega}{\partial t},\\
&\frac{d\Omega}{dt}=n''+\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{\partial \Omega}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.13)$$

При этом предполагается, что $R$ выражена через элементы $i$, $\Omega$, $\omega$, которые отнесены к мгновенному экватору и средней точке весны для $t=t_0$.

Уравнения (10.2.13) показывают, что в результате прецессии и нутации в уравнениях для $i$, $\omega$ и $\Omega$ появляются дополнительные члены, а именно $\frac{\partial i}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ и $\frac{\partial \Omega}{\partial i}$ соответственно, а остальные члены имеют ту же форму, что и в уравнениях (10.2.9). Это — весьма интересный результат, который был получен И. Козаи и Х. Киношитой в 1972 г. [3].

Из уравнений (10.2.13) прежде всего следует, что элементы $a$ и $e$ не подвержены возмущениям от прецессии и нутации. Возмущения остальных элементов определятся

из уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\delta i}{dt} &= \frac{\partial i}{\partial t}, \\
\frac{d\delta M}{dt} &= \frac{\partial n}{\partial i}\delta i, \\
\frac{d\delta\omega}{dt} &= \frac{\partial n'}{\partial i}\delta i + \frac{\partial \omega}{\partial t}, \\
\frac{d\delta\Omega}{dt} &= \frac{\partial n''}{\partial i}\delta i + \frac{\partial \Omega}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.14)$$

Формулы (4.5.15) нам дают

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial i} &= 3n\mu\sqrt{1-e^2}\sin i, \\
\frac{\partial n'}{\partial i} &= 5n\mu\sin i, \\
\frac{\partial n''}{\partial i} &= -n\mu\operatorname{tg} i,
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.15)$$

где $n\mu = \dot{\Omega}$ есть среднее движение узла спутника.

Найдем теперь выражения для $\frac{\partial i}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ и $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$. Из формул (10.2.2) — (10.2.8) с точностью до $\theta^2$ включительно имеем

$$\left.\begin{aligned}
i &= J - \theta\cos(A-N) + \frac{\theta^2}{2}\operatorname{ctg} J\sin^2(A-N), \\
\Omega &= N - \theta\operatorname{ctg} J\sin(A-N) - \\
&\qquad - \frac{\theta^2}{4}(1+2\operatorname{ctg}^2 J)\sin 2(A-N), \\
\omega &= \Phi + \theta\operatorname{cosec} J\sin(A-N) + \\
&\qquad + \frac{\theta^2}{2}\operatorname{ctg} i\operatorname{cosec} J\sin 2(A-N).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.16)$$

Дифференцируя эти формулы частным образом по $t$ и выражая затем $J$ и $N$ через $i$ и $\Omega$, получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial i}{\partial t} &= -\frac{d(\theta\cos A)}{dt}\cos\Omega - \frac{d(\theta\sin A)}{dt}\sin\Omega, \\
\frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{1}{\sin i}\left[\frac{d(\theta\sin A)}{dt}\cos\Omega - \frac{d(\theta\cos A)}{dt}\sin\Omega\right], \\
\frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -\operatorname{ctg} i\left[\frac{d(\theta\sin A)}{dt}\cos\Omega - \frac{d(\theta\cos A)}{dt}\sin\Omega\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{d(\theta\sin A)}{dt}\theta\cos A - \frac{d(\theta\cos A)}{dt}\theta\sin A\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.17)$$

Рассмотрим снова рис. 52. Из сферического треугольника $\gamma'\gamma_0 C$ имеем

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta\sin A &= \sin\varepsilon'\sin\psi,\\ \sin\theta\cos A &= \sin\varepsilon_0\cos\varepsilon' - \cos\varepsilon_0\sin\varepsilon'\cos\psi.\end{aligned}\right\} \quad (10.2.18)$$

С другой стороны, теория прецессии и нутации нам дает [3].

$$\begin{aligned}\psi = {} & 50'',3733T - 17'',24\sin\Omega_L + 0'',21\sin 2\Omega_L - \\ & - 1'',27\sin 2L_S + 0'',13\sin l_S - 0'',05\sin(2L_S + l_S) + \\ & + 0'',02\sin(2L_S - l_S) - 0'',20\sin 2L_L + \\ & + 0'',07\sin l_L - 0'',03\sin(2L_L - \Omega_L) - \\ & - 0'',03\sin(2L_L + l_L), \qquad (10.2.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon' - \varepsilon_0 = {} & 0'',468T + 0'',01\cos(2L_L + l_L) + \\ & + 9'',21\cos\Omega_L - 0'',09\cos 2\Omega_L + 0'',55\cos 2L_S + \\ & + 0'',02\cos(2L_S + l_S) - 0'',01\cos(2L_S - l_S) + \\ & + 0'',09\cos 2L_L + 0'',02\cos(2L_L - \Omega_L), \qquad (10.2.20)\end{aligned}$$

где $\Omega_L$ — долгота восходящего узла Луны, отнесенная к эклиптике, $L_S$ и $l_S$ — средняя долгота и средняя аномалия Солнца, $L_L$ и $l_L$ — средняя долгота и средняя аномалия Луны, $T$ — время в годах от начальной эпохи $t = t_0$.

В формулах (10.2.19) и (10.2.20) сохранены все периодические члены, превосходящие 0″,01.

Из равенств (10.2.18) с достаточной точностью находим

$$\left.\begin{aligned}\theta\sin A &= (0{,}3979 + \varepsilon' - \varepsilon_0)\sin\psi,\\ \theta\cos A &= 0{,}3651\,(1 - \cos\psi) - (\varepsilon' - \varepsilon_0),\end{aligned}\right\} \quad (10.2.21)$$

$$\frac{d(\theta\sin A)}{dt} = \frac{d\varepsilon'}{dt}\cos\varepsilon'\sin\psi + \frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\cos\psi,$$

$$\frac{d(\theta\cos A)}{dt} = -\frac{d\varepsilon'}{dt}(\sin\varepsilon_0\sin\varepsilon' + \cos\varepsilon_0\cos\varepsilon'\cos\psi) +$$

$$+ \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon_0\sin\varepsilon'\sin\psi.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(\theta\sin A)}{dt} &= 0{,}9175\sin\psi\frac{d\varepsilon'}{dt}+0{,}3979\cos\psi\frac{d\psi}{dt},\\ \frac{d(\theta\cos A)}{dt} &= -(0{,}1583+0{,}8418\cos\psi)\frac{d\varepsilon'}{dt}+\\ &\quad +0{,}3651\sin\psi\frac{d\psi}{dt}.\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.22)$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{d(\theta\sin A)}{dt}\cos\Omega-\frac{d(\theta\cos A)}{dt}\sin\Omega,\\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{d(\theta\sin A)}{dt}\sin\Omega-\frac{d(\theta\cos A)}{dt}\cos\Omega,\\ \frac{dK}{dt} &= \frac{1}{2}\left[\frac{d(\theta\sin A)}{dt}\theta\cos A-\frac{d(\theta\cos A)}{dt}\theta\sin A\right].\end{aligned}\right\} \qquad (10.2.23)$$

Подставим в (10.2.23) формулы (10.2.21) и (10.2.22), а затем (10.2.19) и (10.2.20) и проинтегрируем результат. Тогда получим

$$\begin{aligned}H = &-\frac{7'',34\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L-\dot\Omega}\sin(\Omega_L-\Omega-\psi)-\frac{0'',67\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L-\dot\Omega}\sin(\Omega_L-\Omega)-\\ &-\frac{0'',32\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L+\dot\Omega}\sin(\Omega_L+\Omega-\psi)+\frac{0'',77\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L+\dot\Omega}\sin(\Omega_L+\Omega)+\\ &+\frac{0'',67\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L+\dot\Omega}\sin(\Omega_L+\Omega)+\frac{0'',17\dot\Omega_L}{2\dot\Omega_L-\dot\Omega}\sin(2\Omega_L-\Omega-\psi)-\\ &-\frac{0'',97n_S}{2n_S-\dot\Omega}\sin(2L_S-\Omega-\psi)-\frac{0'',08n_S}{2n_S-\dot\Omega}\sin(2L_S-\Omega)-\\ &-\frac{0'',04n_S}{2n_S+\dot\Omega}\sin(2L_S+\Omega-\psi)+\frac{0'',08n_S}{2n_S+\dot\Omega}\sin(2L_S+\Omega)+\\ &+\frac{0'',02n_S}{n_S-\dot\Omega}\sin(l_S-\Omega-\psi)+\frac{0'',02n_S}{n_S+\dot\Omega}\sin(l_S+\Omega+\psi)-\\ &-\frac{0'',06n_S}{3n_S-\dot\Omega}\sin(2L_S+l_S-\Omega-\psi)-\\ &-\frac{0'',16n_L}{2n_L-\dot\Omega}\sin(2L_L-\Omega-\psi)-\end{aligned}$$

$$-\frac{0'',02n_L}{2n_L-\dot\Omega_L-\dot\Omega}\sin(2L_L-\Omega_L-\Omega-\psi)-$$
$$-\frac{0'',03n_L}{3n_L-\dot\Omega}\sin(2L_L+l_L-\Omega-\psi)+$$
$$+\frac{3'',08n_S}{\dot\Omega}\sin(\Omega+\psi)+\frac{0'',13n_S}{\dot\Omega}\sin(\Omega-\psi)+$$
$$+\frac{0'',07n_S}{\dot\Omega}\cos(\Omega+\psi), \qquad (10.2.24)$$

$$I=\frac{7'',34\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L-\dot\Omega}\cos(\Omega_L-\Omega-\psi)+\frac{0'',67\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L-\dot\Omega}\cos(\Omega_L-\Omega)-$$
$$-\frac{0'',32\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L+\dot\Omega}\cos(\Omega_L+\Omega-\psi)+\frac{0,77\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L+\dot\Omega}\cos(\Omega_L+\Omega+\psi)+$$
$$+\frac{0'',67\dot\Omega_L}{\dot\Omega_L+\dot\Omega}\cos(\Omega_L+\Omega)-\frac{0'',17\dot\Omega_L}{2\dot\Omega_L-\dot\Omega}\cos(2\Omega_L-\Omega-\psi)+$$
$$+\frac{0'',97n_S}{2n_S-\dot\Omega}\cos(2L_S-\Omega-\psi)+\frac{0'',08n_S}{2n_S-\dot\Omega}\cos(2L_S-\Omega)-$$
$$-\frac{0'',04n_S}{2n_S+\dot\Omega}\cos(2L_S+\Omega-\psi)+\frac{0'',08n_S}{2n_S+\dot\Omega}\cos(2L_S+\Omega)-$$
$$-\frac{0'',02n_S}{n_S-\dot\Omega}\cos(l_S-\Omega-\psi)+\frac{0'',02n_S}{n_S+\dot\Omega}\cos(l_S+\Omega+\psi)+$$
$$+\frac{0'',06n_S}{3n_S-\dot\Omega}\cos(2L_S+l_S-\Omega-\psi)+$$
$$+\frac{0'',16n_L}{2n_L-\dot\Omega}\cos(2L_L-\Omega-\psi)-$$
$$-\frac{0'',02n_L}{2n_L-\dot\Omega_L-\dot\Omega}\cos(2L_L-\Omega_L-\Omega-\psi)+$$
$$+\frac{0'',03n_L}{3n_L-\dot\Omega}\cos(2L_L+l_L-\Omega-\psi)+$$
$$+\frac{0'',07n_S}{\dot\Omega}\sin(\Omega+\psi)+$$
$$+\frac{3'',08n_S}{\dot\Omega}\cos(\Omega+\psi)+\frac{0'',13n_S}{\dot\Omega}\cos(\Omega-\psi), \qquad (10.2.25)$$

$$K=0'',92\sin(\Omega_L+\psi)-0'',92\sin(\Omega_L-\psi), \qquad (10.2.26)$$

Здесь $\dot{\Omega}_L$ — среднее движение узла лунной орбиты, $n_S$ и $n_L$ — средние движения Солнца и Луны соответственно.

Равенства (10.2.14), (10.2.15), (10.2.17) и (10.2.23) позволяют записать формулы для возмущений в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \delta i &= I, \\ \delta\Omega &= -H \operatorname{ctg} i + K - G \operatorname{tg} i, \\ \delta\omega &= H \operatorname{cosec} i + 5G \sin i, \\ \delta M &= 3G\sqrt{1-e^2}\sin i, \end{aligned}\right\} \qquad (10.2.27)$$

где

$$G = \int \dot{\Omega} I \, dt.$$

Выражение для $G$ можно легко получить, если проинтегрировать формулу (10.2.25), в которой все аргументы суть известные линейные функции времени.

Для того чтобы составить представление о величине возмущений, вызываемых прецессией и нутацией, рассмотрим один пример. Пусть $i = 45°$ и $\dot{\Omega} = -3$ *град/сут*. Тогда

$$\begin{aligned} \delta i &= 1'',0\cos\Omega + 0'',2\cos(\Omega - 2L_S) - 0'',1\cos(\Omega_L - \Omega), \\ \delta\Omega &= -2'',0\sin\Omega - 0'',3\sin(\Omega - 2L_S) + 0'',2\sin(\Omega - \Omega_L), \\ \delta\omega &= 4'',9\sin\Omega + 0'',6\sin(\Omega - 2L_S) - 0'',5\sin(\Omega - \Omega_L), \\ \delta M &= \sqrt{1-e^2}\,[2'',1\sin\Omega + 0'',2\sin(\Omega - 2L_S) - \\ &\qquad - 0'',\ 2\sin(\Omega - \Omega_L)]. \end{aligned}$$

Нужно заметить, что возмущения элементов $i$, $\Omega$, $\omega$ существенно меньше возмущений элементов $J$, $N$ и $\Phi$, отнесенных к фиксированному экватору. Возмущения последних, как показывает И. Козаи [1], могут достигать величины порядка 20″. Следовательно, система координат, связанная с мгновенным экватором, более удобна, чем система координат, в которой за основную плоскость принимается фиксированная плоскость экватора какой-нибудь эпохи. Поэтому на практике пользуются системой координат, предложенной Г. Вайсом и К. Муром. Именно в этой системе координат и получены возмущения, даваемые формулами (10.2.27).

## § 10.3. Возмущения от приливной деформации Земли

В результате притяжения внешнего тела (Луны, Солнца) на каждый элемент Земли действует сила, возмущающий потенциал которой на поверхности Земли согласно (7.1.4) определяется формулой

$$\hat{R} = \frac{fm'}{r'}\left(\frac{r_0}{r'}\right)^2 P_2(\cos H),$$

где $m'$ и $r'$ — масса и геоцентрический радиус-вектор внешнего тела, $r_0$ — средний радиус Земли; $H$ — угол между направлениями на внешнее тело и на рассматриваемый элемент. Здесь, как и раньше, мы отбросили параллактические члены.

Эта сила и вызывает приливную деформацию в теле Земли. Вследствие этой деформации притяжение Земли изменяется, возникают дополнительные силы, которые характеризуются дополнительным потенциалом $R$. Ляв показал, что на поверхности Земли [12]

$$R = k_2 \frac{fm'}{r'}\left(\frac{r_0}{r'}\right)^2 P_2(\cos H),$$

где $k_2$ — постоянная, называемая числом Лява. Во внешнем пространстве $R$ определится формулой

$$R = k_2 \frac{fm'}{r'}\left(\frac{r_0}{r'}\right)^2\left(\frac{r_0}{r'}\right)^3 P_2(\cos H), \qquad (10.3.1)$$

где $r$ — радиус-вектор внешней точки *).

Постоянная $k_2$ характеризует упругие свойства Земли. Ее численные значения приводятся в табл. 31.

Итак, в результате приливной деформации, вызываемой Луной и Солнцем, на спутник действует сила с

---

*) Согласно общей теории потенциала при переходе во внешнее пространство каждую гармонику $n$-го порядка нужно умножить на $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}$. Поскольку в данном случае речь идет о второй гармонике, этот множитель равен $\left(\frac{r_0}{r}\right)^3$.

Таблица 31

**Значение коэффициента $k_2$**

| Автор | $k_2$ |
|---|---|
| Молоденский [13] | 0,302 |
| Козаи [14] | 0,39±0,05 |
| Ньютон [15] | 0,311±0,028 |

возмущающей функцией, равной

$$R = k_2 \frac{fm_L r_0^5}{r_L^3 r^3} P_2(\cos H_L) + k_2 \frac{fm_S r_0^5}{r_S^3 r^3} P_2(\cos H_S),$$

где индекс «$L$» относится к Луне, а «$S$» — к Солнцу.

Приступим теперь к выводу формул для возмущений. Для этого воспользуемся уравнениями (4.11.13). Поскольку формула (10.3.1) по своей структуре напоминает формулу (7.1.4), мы можем использовать при этом некоторые результаты гл. VII.

Предполагая, что орбита внешнего тела является круговой, мы из (10.3.1) находим

$$R' = k^2 \frac{m'}{m} \frac{r_0^5}{a'^3 r^3} P_2(\cos H), \qquad (10.3.2)$$

где $a'$ — радиус орбиты внешнего тела, а $m$ — масса Земли.

Далее имеем

$$F' = \beta \frac{\gamma}{r} P_2(\cos H), \qquad (10.3.3)$$

где

$$\beta = k_2 \frac{m'}{m} \left(\frac{r_0}{a'}\right)^3, \quad \gamma = \left(\frac{r_0}{p}\right)^2. \qquad (10.3.4)$$

Параметр $\beta$ характеризует численно возмущающую функцию. Для Луны и Солнца он равен соответственно

$$\beta_L = 0{,}1681 \cdot 10^{-7}, \quad \beta_S = 0{,}7740 \cdot 10^{-8}.$$

Подставим в (10.3.3) формулу (7.2.4) и равенство

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v.$$

Тогда, если отбросить короткопериодические члены, получим

$$F' = \frac{\gamma}{p} \sum (k, h) \cos (ku' + h\widetilde{\Omega}), \qquad (10.3.5)$$

где суммирование ведется по следующим $k$ и $h$: $k = 0$; $h = 0, 1, 2$ и $k = 2$; $h = 0, \pm 1, \pm 2$.

Коэффициенты $(k, h)$ равны:

$$\left.\begin{aligned}
(0, 0) &= \frac{1}{16}(2 - 3s^2)(2 - 3s'^2), \\
(0, 1) &= \frac{3}{4} s\alpha s'\alpha', \\
(0, 2) &= \frac{3}{16} s^2 s'^2, \\
(2, 0) &= \frac{3}{16}(2 - 3s^2) s'^2, \\
(2, -1) &= -\frac{3}{8} s\alpha s'(1 + \alpha'), \\
(2, 1) &= \frac{3}{8} s\alpha s'(1 - \alpha'), \\
(2, -2) &= \frac{3}{32} s^2 (1 + \alpha')^2, \\
(2, 2) &= \frac{3}{32} s^2 (1 - \alpha')^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.3.6)$$

Здесь, как и раньше,

$$s = \sin i, \quad \alpha = \cos i, \quad s' = \sin i', \quad \alpha' = \cos i',$$

где штрих относится к внешнему телу.

Что касается $u'$ и $\Omega$, то они равны

$$u' = M' + \omega', \quad \widetilde{\Omega} = \Omega - \Omega', \qquad (10.3.7)$$

где $M'$, $\omega'$ и $\Omega'$ — средняя аномалия, аргумент перигея и долгота узла внешнего тела, отнесенные к экватору Земли.

Заметим, что формула (10.3.5) имеет структуру, аналогичную (7.2.18), но она содержит только восемь членов.

Так как мы ограничимся только вековыми и долгопериодическими членами и так как $F'$ не содержит $u$, то из

уравнений (4.11.13) следует, что

$$\delta a = 0, \quad \delta e = 0,$$

т. е. большая полуось и эксцентриситет орбиты спутника не подвержены вековым и долгопериодическим возмущениям от приливной деформации Земли.

Формулы для возмущений остальных элементов находятся аналогично тому, как это делалось в случае лунно-солнечных возмущений. Здесь мы подробно рассмотрим возмущения наклона $i$ и долготы узла $\Omega$. Формулы для возмущений элементов $\omega$ и $M$ можно найти в работе И. Козаи [4].

В соответствии с (4.11.13) для $i$ и $\Omega$ имеем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{di}{dv} &= -\frac{p}{s}\frac{\partial F'}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\Omega}{dv} &= \mu + \frac{p\alpha}{s}\frac{\partial F'}{\partial s}, \end{aligned}\right\} \tag{10.3.8}$$

где

$$\mu = -\frac{3}{2}\varepsilon^2\alpha. \tag{10.3.9}$$

Поскольку $\mu$ зависит от $i$, то возмущения $\Omega$ определятся из уравнения

$$\frac{d\,\delta\Omega}{dv} = \frac{\partial \mu}{\partial i}\delta i + \frac{p\alpha}{s}\frac{\partial F'}{\partial s}. \tag{10.3.10}$$

При интегрировании уравнений (10.3.8) и (10.3.10) мы, очевидно, можем считать, что $u'$, $\Omega$ и $\Omega'$ являются линейными функциями $v$, т. е. *)

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{n'}{n}v + u'_0, \\ \Omega &= \mu v + \Omega_0, \\ \Omega' &= \frac{\dot{\Omega}'}{n}v + \Omega'_0, \end{aligned}\right\} \tag{10.3.11}$$

где $u'_0$, $\Omega_0$ и $\Omega'_0$ — постоянные величины, $n$ — среднее движение спутника, $\dot{\Omega}'$ — среднее движение узла внеш-

*) См. § 7.4.

него тела, $n'$ — среднее движение внешнего тела, а $\mu$ дается формулой (10.3.9).

Подставляя теперь формулу (10.3.5) в уравнения (10.3.8) и (10.3.10) и интегрируя при условии (10.3.11), легко находим

$$\delta i = \beta\gamma \sum \frac{a_{k,h}}{k\lambda' + h\mu'} \cos(ku' + h\widetilde{\Omega}), \tag{10.3.12}$$

$$\delta\Omega = \Delta\mu \cdot v + \frac{\beta\gamma}{s} \sum \frac{b_{k,h}}{k\lambda' + h\mu'} \sin(ku' + h\widetilde{\Omega}) + \\ + \frac{3}{2}\varepsilon^2\beta\gamma s \sum \frac{a_{k,h}}{(k\lambda' + h\mu')^2} \sin(ku' + h\widetilde{\Omega}). \tag{10.3.13}$$

Здесь

$$\Delta\mu = -\frac{3}{8}\beta\gamma\alpha(2 - 3s'^2), \tag{10.3.14}$$

$$\lambda' = \frac{n'}{n}, \quad \mu' = \mu - \frac{\dot{\Omega}'}{n}, \quad \varepsilon = \frac{c}{p}, \tag{10.3.15}$$

где $c \approx 210$ *км*, а $p$ — параметр орбиты спутника.

Коэффициенты $a_{k,h}$ и $b_{k,h}$ приводятся в табл. 32.

Таблица 32

**Коэффициенты $a_{k,h}$ и $b_{k,h}$**

| $k$, $h$ | $a_{k,h}$ | $b_{k,h}$ |
|---|---|---|
| 0, 1 | $-\frac{3}{4}s'\alpha'\alpha$ | $\frac{3}{4}s'\alpha'(1-2s^2)$ |
| 0, 2 | $-\frac{3}{8}s'^2 s$ | $\frac{3}{8}s'^2 s\alpha$ |
| 2, 0 | 0 | $-\frac{9}{8}s'^2 s\alpha$ |
| 2, −1 | $-\frac{3}{8}s'(1+\alpha')\alpha$ | $-\frac{3}{8}s'(1+\alpha')(1-2s^2)$ |
| 2, 1 | $-\frac{3}{8}s'(1-\alpha')\alpha$ | $\frac{3}{8}s'(1-\alpha')(1-2s^2)$ |
| 2, −2 | $\frac{3}{16}(1+\alpha')^2 s$ | $\frac{3}{16}(1+\alpha')^2 s\alpha$ |
| 2, 2 | $-\frac{3}{16}(1-\alpha')^2 s$ | $\frac{3}{16}(1-\alpha')^2 s\alpha$ |

Рассмотрим теперь некоторые параметры, входящие в формулы для возмущений. При этом нам необходимо учесть эффект, связанный с запаздыванием приливов. Дело в том, что приливное трение смещает прилив приблизительно на величину $n_\oplus \Delta t$ в направлении вращения Земли, где $n_\oplus$ — угловая скорость вращения Земли, а $\Delta t$ — время запаздывания прилива. В результате максимум приливного горба в данном месте запаздывает по времени относительно прохождения внешнего тела через местный меридиан. Этот эффект можно учесть следующим образом. Рассмотрим некоторое фиктивное внешнее тело. Пусть оно движется по орбите, восходящий узел которой, отнесенный к плоскости экватора, смещен на величину $n_\oplus \Delta t$ и пусть аргумент широты его равен аргументу широты истинного внешнего тела для момента $t - \Delta t$. Тогда в момент $t$ фиктивное внешнее тело будет находиться точно над вершиной прилива. Поэтому полученные формулы для возмущений будут учитывать запаздывание приливов, если в них элементы $\Omega'$ и $u'$ заменить элементами $\Omega^*$ и $u^*$, относящимися к фиктивному внешнему телу, так чтобы

$$\Omega^* = \Omega' + n_\oplus \Delta t,$$
$$u^* = u' - n' \Delta t,$$

где $\Omega'$ и $u'$ — долгота узла и аргумент перигея истинного внешнего тела.

В случае Солнца мы имеем

$$i' = \varepsilon', \quad \Omega^* = n_\oplus \Delta t,$$
$$\theta = \Omega - n_\oplus \Delta t, \quad u^* = L_S - n_S \Delta t,$$

где $\varepsilon'$ — наклон эклиптики к экватору, $L_S$ и $n_S$ — средняя долгота и среднее движение Солнца.

Так как рассматриваемые возмущения малы, то мы можем пренебречь наклоном орбиты Луны к плоскости эклиптики. Тогда в случае Луны будем иметь

$$i' = \varepsilon', \quad \Omega^* = n_\oplus \Delta t,$$
$$\theta = \Omega - n_\oplus \Delta t, \quad u^* = L_L - n_L \Delta t,$$

где $L_L$ и $n_L$ — средняя долгота и среднее движение Луны.

При этих допущениях формулы для возмущений существенно упрощаются. Так, коэффициенты $a_{k,h}$ и $b_{k,h}$ будут общими для Луны и Солнца. Их значения приводятся в табл. 33.

Таблица 33

**Коэффициенты $a_{k,h}$ и $b_{k,h}$**

| $k$, $h$ | $a_{k,h}$ | $b_{k,h}$ |
|---|---|---|
| 0, 1 | $-0{,}2738 \cos i$ | $0{,}2738 (1-2\sin^2 i)$ |
| 0, 2 | $-0{,}0594 \sin i$ | $0{,}0594 \sin i \cos i$ |
| 2, 0 | 0 | $-0{,}1781 \sin i \cos i$ |
| 2, −1 | $-0{,}2861 \cos i$ | $-0{,}2861 (1-2\sin^2 i)$ |
| 2, 1 | $-0{,}0123 \cos i$ | $0{,}0123 (1-2\sin^2 i)$ |
| 2, −2 | $0{,}6894 \sin i$ | $0{,}6894 \sin i \cos i$ |
| 2, 2 | $-0{,}0013 \sin i$ | $0{,}0013 \sin i \cos i$ |

Согласно спутниковым определениям время и фаза запаздывания равны

$$\Delta t = 20 \text{ мин}, \quad n_\oplus \Delta t = 5^\circ.$$

Чтобы составить представление о величине возмущений, приведем один пример. Пусть орбита спутника такова, что

$$a = 8270 \text{ км}, \quad e = 0{,}1, \quad i = 33^\circ.$$

Тогда наибольшие возмущения элементов $i$ и $\Omega$ будут равны

$$\delta i = 0^\circ{,}24 \cdot 10^{-3} \cos(\Omega - n_\oplus \Delta t),$$
$$\delta\Omega = 0^\circ{,}25 \cdot 10^{-3} \sin(\Omega - n_\oplus \Delta t).$$

Определение подобных возмущений из наблюдений позволяет найти величины $k_2$ и $\Delta t$. Этой задачей занимались И. Козаи [14] и Р. Ньютон [15]. Результаты их исследований приведены в табл. 31.

Замечание. При выводе формул для возмущений мы предполагали, что наклон орбиты Луны к плоскости экватора не изменяется с временем. Поэтому полученными формулами можно пользоваться на промежутках времени около одного года. Если же учесть изменения наклона лунной орбиты, то мы придем к дополнительным

долгопериодическим возмущениям с периодом около 18,6 года (период обращения линии узлов орбиты Луны). Теорию этих возмущений разработал И. Козаи [4]. Для них он нашел следующие формулы:

$$\delta\Omega = -G\cos i, \quad \delta\omega = G\left(2 - \frac{5}{4}\sin^2 i\right),$$

$$\delta M = -G(1-e^2)^{1/2}(1+e^2)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right),$$

где

$$G = F(227^\circ \sin N - 1^\circ \sin 2N),$$

$$F = \frac{k_2}{n(1-e^2)^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)^5,$$

а $N$ — долгота узла орбиты Луны в эклиптике.

Эти выражения очень важны для анализа движения спутника на больших промежутках времени. Такой анализ, в частности, имеет непосредственное отношение к определению коэффициентов геопотенциала. Если мы определяем эти коэффициенты по наблюдениям, охватывающим промежуток времени около года, то полученные результаты будут обременены эффектами приливной деформации, ибо почти вековые неравенства, обусловленные приливами, не могут быть отделены от вековых неравенств, вызываемых несферичностью Земли. Поэтому коэффициенты потенциала должны изменяться с периодом около 18,6 лет. И. Козаи нашел, что амплитуда изменения коэффициента $J_2$ с этим периодом равна примерно $0{,}8\cdot 10^{-6}$.

## § 10.4. Влияние притяжения атмосферы

Потенциал притяжения $U$ во внешней точке можно представить в виде

$$U = U_0 + U',$$

где $U_0$ — потенциал притяжения Земли, а $U'$ — потенциал притяжения атмосферы. Представляя $U_0$ и $U'$ в виде рядов по сферическим функциям, мы для коэффициентов разложения $U$ будем иметь (см. § 1.6)

$$C_{nk} = C_{nk}^{(0)} + C'_{nk}, \quad S_{nk} = S_{nk}^{(0)} + S'_{nk},$$

где $C_{nk}^{(0)}$ и $S_{nk}^{(0)}$ — коэффициенты разложения $U_0$, а $C'_{nk}$ и $S'_{nk}$ — соответствующие коэффициенты $U'$.

Зная распределение плотности атмосферы, можно вычислить коэффициенты $C'_{nk}$ и $S'_{nk}$. В. Г. и Е. Б. Шкодровы [11] определили эти коэффициенты на основе данных Центрального института прогнозов. Используя наблюдательный материал за 1958 г., они вычислили все коэффициенты до четвертого порядка на каждый месяц этого года.

Поведение коэффициентов $J'_2 = -C'_{20}$ и $J'_4 = -C'_{40}$ показано на рис. 53. Как и следовало ожидать, эти коэффициенты существенно изменяются с временем. Так, $J'_2$ изменяется в диапазоне от $0{,}06 \cdot 10^{-9}$ до $2{,}00 \cdot 10^{-9}$, а $J'_4$

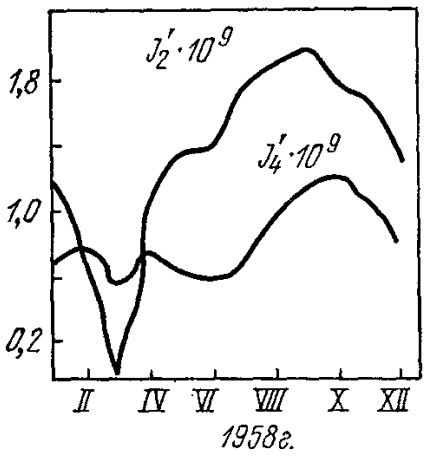


Рис. 53. Коэффициенты $J'_2$ и $J'_4$.

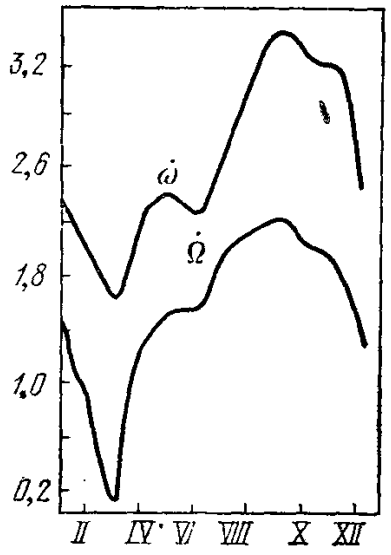


Рис. 54. Суточные изменения элементов $\Omega$ и $\omega$ (в единицах $10^{-4}$ *град*).

от $0{,}51 \cdot 10^{-9}$ до $1{,}24 \cdot 10^{-9}$. Аналогичным изменениям подвержены и другие коэффициенты. Таким образом, различные вариации плотности атмосферы и связанные с ними изменения коэффициентов $C'_{nk}$ и $S'_{nk}$ могут наложить определенные ограничения на точность определения коэффициентов разложения геопотенциала по наблюдениям искусственных спутников.

В работе В. Г. и Е. Б. Шкодровых вычислены вековые возмущения, вызываемые притяжением атмосферы. На рис. 54 приведены суточные изменения элементов $\Omega$ и $\omega$ для спутника с $a = 7390$ *км*, $e = 0{,}15$, $i = 50°$. Соответствующие линейные смещения спутника достигают величины порядка 100 *м*.

## § 10.5. Влияние электромагнитных сил

Пусть спутник обладает электрическим зарядом, равным $Q$. Тогда при движении в магнитном поле Земли на него будет действовать сила $\boldsymbol{F}$, определяемая формулой

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\Phi}), \tag{10.5.1}$$

где $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости спутника, а $\boldsymbol{\Phi}$ — вектор магнитной напряженности.

Компоненты вектора $\boldsymbol{\Phi}$ можно найти из выражения для потенциала магнитного поля $W$, который подобно потенциалу гравитационного поля может быть разложен в ряд по сферическим функциям, так что

$$W = \frac{r_0^3}{r^2}\{g_1^{(0)}P_1(\cos\theta) + \\ + P_1^{(1)}(\cos\theta)[g_1^{(1)}\cos\lambda + h_1^{(1)}\sin\lambda] + \ldots\}, \tag{10.5.2}$$

где $r$ — радиус-вектор, $\lambda$ — долгота и $\theta$ — дополнение до широты спутника; $r_0$ — средний радиус Земли, $g_1^{(0)}$, $g_1^{(1)}$, $h_1^{(1)}$ и т. д.— коэффициенты, характеризующие магнитное поле Земли. Так, например,

$$g_1^{(0)} = -0{,}3 \text{ (гаусса)}. \tag{10.5.3}$$

Здесь мы, следуя работе Л. Сехнала [9], рассмотрим влияние лишь первого члена в формуле (10.5.2). Заметим, однако, что слагаемые в $W$, содержащие долготу $\lambda$, не будут вызывать вековых возмущений и возмущений большого периода.

Введем в соответствии с § 4.10 компоненты возмущающего ускорения $S$, $T$, $B$. Поскольку

$$V_S = \dot{r}, \quad V_T = r\dot{v}, \quad V_B = 0,$$

где $v$ означает истинную аномалию, то с помощью формул (10.5.1) и (10.5.2) легко находим

$$\left.\begin{aligned} S &= -\frac{Q}{m_0}g_1^{(0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\cos i\cdot r\dot{v}, \\ T &= \frac{Q}{m_0}g_1^{(0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\cos i\cdot\dot{r}, \\ B &= -\frac{Q}{m_0}g_1^{(0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\sin i\,[\dot{r}\cos u + 2r\dot{v}\sin u], \end{aligned}\right\} \tag{10.5.4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} u &= v + \omega = (1+\nu)\,v + \omega_0, \\ r\dot{v} &= \sqrt{\frac{fm}{p}}\,(1 + e\cos v), \\ \dot{r} &= \sqrt{\frac{fm}{p}}\,e\sin v, \end{aligned}\right\} \qquad (10.5.5)$$

причем $m$ — масса Земли, $m_0$ — масса спутника и $f$ — постоянная притяжения.

Формулы (10.5.4) и (10.5.5) позволяют легко составить дифференциальные уравнения для элементов. Для этого нужно воспользоваться уравнениями § 4.10, отбросив в них члены с $\varepsilon$ и $\sigma$. Однако в силу малости ожидаемых эффектов мы не будем делать это для всех элементов. Как и в работе [9], мы ограничимся лишь рассмотрением изменений наклона орбиты $i$.

Согласно (4.10.15) с принятой точностью имеем

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{r}{a}\cos u \cdot B. \qquad (10.5.6)$$

Примем теперь, что заряд спутника вследствие изменения ионизации атмосферы с высотой определяется формулой

$$Q = Q_0 \left(\frac{h}{h_p}\right)^k, \qquad (10.5.7)$$

где $Q_0$ и $k$ — некоторые постоянные, а

$$h = r - r_0, \quad h_p = a\,(1 - e) - r_0. \qquad (10.5.8)$$

Подставляя равенства (10.5.4), (10.5.7) и (10.5.5) в (10.5.6) и отбрасывая короткопериодические члены, мы при $k = 1$ придем к следующему уравнению для $i$:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{Q_0 g_1^{(0)}}{8m_0}\,e^2\,(1+e^2)\sin i \left(\frac{r_0}{a}\right)^3 \frac{a}{h_p}\sin 2\omega. \qquad (10.5.9)$$

Поскольку правая часть содержит $\sin 2\omega$, то интегрирование этого уравнения даст нам долгопериодическое возмущение с периодом, равным половине периода обращения перигея орбиты спутника.

Оценим теперь правую часть (10.5.9). Для простоты примем, что поверхность спутника представляет собой сферу радиуса $\rho$. Тогда, если через $U$ обозначить потен-

циал спутника в вольтах, то в согласии с (10.5.3) будем иметь

$$\frac{Q_0 g_1^{(0)}}{m_0} = -\frac{1}{3}\cdot 10^{-13}\,\frac{\rho U}{m_0},$$

где $\rho$ должно измеряться в сантиметрах, а $m_0$ — в граммах.

Пусть далее орбита спутника такова, что

$$a = 9500\ км, \quad e = 0{,}3, \quad i = 90°.$$

Тогда уравнение (10.5.9) нам даст

$$\frac{di}{dt} = 2°\cdot 10^{-13}\,\frac{\rho U}{m_0}\sin 2\omega. \qquad (10.5.10)$$

После интегрирования (10.5.10) мы получим периодическое неравенство, амплитуда которого равна примерно $1°10^{-6}\,U\rho m_0^{-1}$.

Следовательно, такое неравенство можно обнаружить из наблюдений только в том случае, если потенциал спутника будет составлять величину порядка 100 вольт. Однако, как уже отмечалось, в работе Д. Бирда и Ф. Джонсона [10] было показано, что спутник при своем движении в атмосфере может приобрести потенциал лишь в несколько десятых долей вольта. Такой потенциал свидетельствует о малом влиянии электромагнитных сил на движение спутника. Во всяком случае до настоящего времени не обнаружено каких-либо невязок, которые можно было бы интерпретировать как электромагнитные влияния. Но нужно признать также, что теория электромагнитных возмущений не является совершенной и заведомо нельзя отрицать, что в некоторых случаях эти возмущения нужно принимать во внимание.

## § 10.6. Релятивистские эффекты

Наибольшие релятивистские поправки к движению спутника в ньютоновском гравитационном поле сводятся к поправкам к вековым изменениям перигея и узла орбиты. В соответствии с общей теорией относительности релятивистские эффекты в средних движениях элементов $\Omega$ и $\omega$

определяются формулами [16]

$$\dot{\Delta\Omega} = \frac{4}{5} \frac{n\gamma}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{r_0^2 \rho}{a^3},$$

$$\dot{\Delta\omega} = \frac{3n}{1-e^2} \cdot \frac{\rho}{a} - 3\dot{\Delta\Omega} \cos i,$$

где

$$\rho = \frac{fm}{c_1^2}, \quad \gamma = \frac{n_\oplus}{n}.$$

Здесь $f$ — постоянная притяжения; $m$, $r_0$ и $n_\oplus$ — масса, средний радиус и угловая скорость вращения Земли; $c_1$ — скорость света, $n$ — среднее движение спутника.

В таблице 34 приводятся суточные значения $\dot{\Delta\omega}$ и $\dot{\Delta\Omega}$ некоторых спутников ($e_0 = 0{,}2$; $i_0 = 0°$).

Таблица 35

**Релятивистские поправки**

| $a$ (км) | $\dot{\Delta\omega}$ (град) | $\dot{\Delta\Omega}$ (град) | $a$ (км) | $\dot{\Delta\omega}$ (град) | $\dot{\Delta\Omega}$ (град) |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 000 | $0{,}42 \cdot 10^{-5}$ | $0{,}55 \cdot 10^{-7}$ | 30 000 | $0{,}27 \cdot 10^{-6}$ | $0{,}21 \cdot 10^{-8}$ |
| 20 000 | $0{,}75 \cdot 10^{-6}$ | $0{,}69 \cdot 10^{-8}$ | 40 000 | $0{,}13 \cdot 10^{-6}$ | $0{,}87 \cdot 10^{-9}$ |

Из этой таблицы следует, что релятивистские поправки весьма малы и едва ли их можно в ближайшем будущем обнаружить из наблюдений.

## § 10.7. Определение возмущенных координат спутника

Рассмотрим, наконец, общую схему вычисления возмущенных координат спутника.

Элементы орбиты. Примем за основную систему произвольных постоянных теории следующие величины:

$$n_0,\ e_0,\ i_0,\ M_0,\ \omega_0,\ \Omega_0, \tag{10.7.1}$$

где $n_0$ есть среднее аномалистическое движение спутника. Элемент $a_0$ определяется формулой

$$a_0 = \hat{a}\left[1 - \frac{c^2 \cos^2 i_0}{\hat{a}^2 (1-e_0^2)}\right], \tag{10.7.2}$$

в которой

$$\hat{a} = \left(\frac{fm}{n_0^2}\right)^{1/3},$$

а постоянные $fm$ и $c$ равны (см. § 1.8 и 1.9)

$$fm = 3{,}986013 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{сек}^2, \quad c = 209{,}729 \text{ км}.$$

Соотношение (10.7.2) есть результат обращения формулы (3.8.7), связывающей $n_0$ с постоянными $a_0$, $e_0$, $i_0$.

Помимо системы (10.7.1) будем рассматривать также систему элементов:

$$a,\ e,\ i,\ M,\ \omega,\ \Omega,$$

которые характеризуют промежуточную орбиту. Эти элементы уже являются функциями времени.

Рассмотрим теперь элементы $l$, $g$, $h$, которые входят аргументами в периодические возмущения. Они даются формулами

$$\left.\begin{aligned} l &= n(t-t_0) + l_0, \\ g &= n'(t-t_0) + g_0, \\ h &= n''(t-t_0) + h_0, \end{aligned}\right\} \tag{10.7.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= M_0 + \lambda M, \\ g_0 &= \omega_0 + \nu M_0, \\ h_0 &= \Omega_0 + \mu M_0, \end{aligned}\right\} \tag{10.7.4}$$

а коэффициенты $n$, $n'$ и $n''$ равны

$$n = n_0(1+\lambda),\ n' = \nu n,\quad n'' = \mu n. \tag{10.7.5}$$

Заметим, что $n'$ и $n''$ являются соответственно средним движением перигея и средним движением узла орбиты спутника.

Определение вековых возмущений. Обозначим через $a'$, $e'$, $i'$, $\Omega'$, $\omega'$, $M'$ значения элементов $a$, $e$, $i$, $\Omega$, $\omega$, $M$ с учетом только вековых возмущений.

Тогда

$$a' = a_0 + \dot{a}(t - t_0),$$
$$e' = e_0 + \dot{e}(t - t_0),$$
$$i' = i_0 + \dot{i}(t - t_0),$$
$$M' = M + n_0(t - t_0) + \frac{\hat{k}}{2}(t - t_0)^2,$$
$$\omega' = \omega_0 + \nu\psi + \nu'(\psi - \psi_0)^2,$$
$$\Omega' = \Omega_0 + \mu\psi + \mu'(\psi - \psi_0)^2.$$

Здесь $\dot{a}$, $\dot{e}$, $\dot{i}$, $\hat{k}$, $\nu'$ и $\mu'$ характеризуют возмущения от сопротивления атмосферы; они даются формулами (8.9.8) — (8.9.12). Так, например,

$$\dot{a} = -\frac{2}{3} a_0 \frac{\hat{k}}{n_0} \{1 + 2\varepsilon_0^2 \alpha_0^2 (1 - e_0)\}.$$

Величины $\nu$ и $\mu$ характеризуют возмущения от несферичности Земли и притяжения Луны и Солнца; они могут быть представлены в виде

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu_z + \Delta\nu_L + \Delta\nu_S,$$
$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu_z + \Delta\mu_L + \Delta\mu_S,$$

где $\nu_0$ и $\mu_0$ — это значения $\nu$ и $\mu$ в промежуточном движении, т. е.

$$\nu_0 = \frac{\varepsilon_0^2}{4}(1 + \sigma^2)(12 - 15s_0^2) +$$
$$+ \frac{\varepsilon_0^4}{64}[288 - 1296s_0^2 + 1035s_0^4 - e_0^2(144 + 288s_0^2 - 510s_0^4)],$$
$$\mu_0 = -\frac{3}{2}\varepsilon_0^2(1 + \sigma^2)\alpha_0 - \frac{3}{16}\varepsilon_0^4\alpha_0(6 - 17s_0^2 - 24e_0^2 s_0^2),$$

причем

$$\alpha_0 = \cos i_0, \quad s_0 = \sin i_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{c}{a_0(1 - e_0^2)},$$
$$\sigma = -0{,}035647.$$

Что касается величин $\Delta\nu_z$ и $\Delta\mu_z$, $\Delta\nu_L$ и $\Delta\mu_L$, $\Delta\nu_S$ и $\Delta\mu_S$, то они представляют собой коэффициенты вековых

возмущений, вызываемых соответственно зональными гармониками геопотенциала, притяжением Луны и Солнца. Выражения для них приводятся в § 5.13 и 7.4. Так, например, для $\Delta\mu_z$ имеем

$$\Delta\mu_z = \frac{\alpha_0}{s_0} \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{2n} M_{2n-1}^{(0)} \frac{dL_{2n}^{(0)}}{ds_0},$$

где

$$\gamma_{2n} = j_{2n} \left(\frac{r_0}{p_0}\right)^{2n}, \quad p_0 = a_0 (1 - e_0^2),$$

а величина $\Delta\mu_L$ определяется формулой

$$\Delta\mu_L = -\frac{3}{16} \beta_L^2 \frac{2 + 3e_0^2}{\sqrt{1 - e_0^2}} (2 - 3s_L^2) \alpha_0, \qquad (10.7.6)$$

где

$$\beta_L^2 = \frac{m_L}{m} \left(\frac{a_0}{a_L}\right)^3, \qquad (10.7.7)$$

причем через $m_L$, $a_L$ и $s_L$ обозначены масса, большая полуось и синус наклона орбиты Луны.

Если в формулах (10.7.6) и (10.7.7) заменить индекс «$L$» на «$S$» и под $m_S$, $a_S$ и $s_S$ понимать массу, большую полуось и наклон орбиты Солнца, то они дадут величину $\Delta\mu_S$.

Определение долгопериодических возмущений. Формулы для возмущенных значений элементов можно представить в виде

$$a = a' + \delta a, \quad M = M' + \delta M,$$
$$e = e' + \delta e, \quad \omega = \omega' + \delta\omega,$$
$$i = i' + \delta i, \quad \Omega = \Omega' + \delta\Omega,$$

где $a'$, $e'$, . . ., $\Omega'$ означают элементы с учетом только вековых неравенств, а $\delta a$, $\delta e$, . . ., $\delta\Omega$ — суммарные периодические возмущения. Так, например,

$$\delta e = \delta e_z + \delta e_t + \delta e_L + \delta e_S + \ldots$$

Здесь индексы «$z$», «$t$», «$L$», «$S$» относятся соответственно к зональным гармоникам, тессеральным и секториальным гармоникам геопотенциала, Луне и Солнцу.

Возмущения от зональных гармоник даются формулами § 5.9. Например, для $\delta e_z$ имеем

$$\delta e_z = -\frac{1-e_0^2}{\nu e_0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kg',$$

где

$$a_{2m} = 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_{2n} M_{2n-1}^{(2m)} L_{2n}^{(2m)},$$

$$a_{2m+1} = 2 \sum_{n=m+2}^{\infty} \gamma_{2n+1} M_{2n}^{(2m+1)} L_{2n+1}^{(2m+1)},$$

причем

$$\gamma_k = j_k \left(\frac{r_0}{p_0}\right)^k,$$

аргумент $g'$ определяется формулой

$$g' = g - \frac{\pi}{2},$$

где $g$ дается равенством (10.7.3).

Формулы для возмущений от низших тессеральных и секториальных гармоник приводятся в § 6.2 и 6.3. Так, для возмущения $\delta i_t$, обусловленного второй секториальной гармоникой, мы имеем

$$\delta i_t = \frac{3}{2} \gamma_{22} s_0 \cos 2\Omega_{22},$$

где

$$\gamma_{22} = \frac{J_{22}}{\gamma} \left(\frac{r_0}{p_0}\right)^2, \quad \gamma = \frac{n_\oplus}{n_0},$$
$$\Omega_{22} = h - S - \lambda_{22}.$$

Здесь $J_{22}$ и $\lambda_{22}$ — коэффициенты, характеризующие вторую секториальную гармонику, $S$ — звездное гринвичское время, а $h$ определяется третьей формулой (10.7.3).

В общем случае аргументы возмущений даются формулой (см. § 6.7).

$$\theta = kg + q(h - S - \lambda_{nq}) + pl,$$

где $k$, $q$, $p$ — целые числа, а $l$, $g$, $h$ определяются равенствами (10.7.3).

Формулы для лунно-солнечных возмущений приводятся в § 7.5—7.9. Аргументами лунных возмущений являются величины $g$, $h$, средняя долгота $\lambda_{\leftmoon}$ и долгота узла $\Omega_{\leftmoon}$ Луны, а аргументами солнечных возмущений — величины $g$, $h$ и средняя долгота Солнца $\lambda_{\odot}$.

Аналогичным образом учитываются остальные возмущения: возмущения от светового давления, возмущения, обусловленные прецессией и нутацией земной оси и т. д. Аргументами этих возмущений будут величины $g$, $h$ и элементы Луны и Солнца.

Определение прямоугольных координат. Прямоугольные координаты $x$, $y$, $z$ должны быть вычислены по формулам промежуточного движения. Сводка этих формул приведена в § 3.14.

Замечание. Если в основу теории положить кеплеровы элементы, то прямоугольные координаты нужно вычислять по формулам кеплерова движения (см. § 3.15), но в этом случае к указанным здесь возмущениям необходимо добавить возмущения, обусловленные второй и третьей зональными гармониками геопотенциала, а в формулах (10.7.5) положить $\lambda = \mu = \nu = 0$.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 35

**Коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник (полностью нормированные)**

| $n, k$ | $\bar{C}_{nk} \cdot 10^8$ | $\bar{S}_{nk} \cdot 10^8$ | $n, k$ | $\bar{C}_{nk} \cdot 10^8$ | $\bar{S}_{nk} \cdot 10^8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7,2 | 28,306 | 15,645 | 7,3 | 20,285 | —23,448 |
| 7,4 | —19,727 | —11,390 | 7,5 | —0,087024 | 9,8461 |
| 7,6 | —25,847 | 10,209 | 7,7 | 15,916 | —6,7710 |
| 8,1 | 3,1254 | 2,5696 | 8,2 | 4,8161 | 8,4140 |
| 8,3 | —5,7444 | 1,8086 | 8,4 | —15,378 | 7,5264 |
| 8,5 | —5,6733 | 6,1636 | 8,6 | —5,3903 | 25,930 |
| 8,7 | 3,4390 | 8,9168 | 8,8 | —7,7364 | 6,7607 |
| 9,1 | 13,823 | —1,6100 | 9,2 | 0,66741 | —8,1733 |
| 9,3 | —9,6463 | —11,817 | 9,4 | 5,7125 | 11,183 |
| 9,5 | —0,61435 | 0,33551 | 9,6 | 2,4186 | 22,028 |
| 9,7 | —5,0450 | —12,700 | 9,8 | 23,359 | 5,7239 |
| 9,9 | —8,2490 | 9,2326 | 10,1 | 11,251 | —10,167 |
| 10,2 | —3,1225 | —10,450 | 10,3 | —2,3346 | —14,137 |
| 10,4 | —4,8185 | —4,3248 | 10,5 | —8,0004 | —14,279 |
| 10,6 | —3,2486 | —20,153 | 10,7 | 5,4961 | 3,2003 |
| 10,8 | 7,3957 | —7,9706 | 10,9 | —0,68563 | 0,62498 |
| 10,10 | 12,377 | —2,5885 | 11,1 | 0,43900 | 2,9751 |
| 11,2 | 4,8900 | —9,1994 | 11,3 | —6,3247 | —13,109 |
| 11,4 | —3,0193 | 5,4317 | 11,5 | 3,2523 | 13,215 |
| 11,6 | 3,7517 | 0,69005 | 11,7 | 4,5726 | —1,3862 |
| 11,8 | 6,4546 | —1,6993 | 11,9 | 11,750 | —0,99451 |
| 11,10 | —11,736 | —1,8900 | 11,11 | 11,785 | —4,0688 |
| 12,1 | —4,5955 | —3,1000 | 12,2 | 2,7481 | 7,5986 |
| 12,3 | 5,8386 | 5,4784 | 12,4 | —4,3649 | —2,2262 |
| 12,5 | 2,3375 | 4,2637 | 12,6 | —2,3868 | —0,066770 |

Продолжение табл. 35

| $n, k$ | $\bar{C}_{nk} \cdot 10^8$ | $\bar{S}_{nk} \cdot 10^8$ | $n, k$ | $\bar{C}_{nk} \cdot 10^8$ | $\bar{S}_{nk} \cdot 10^8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 12,7 | 1,4507 | 9,9784 | 12,8 | —0,57854 | 3,3752 |
| 12,9 | —3,2232 | 4,2858 | 12,10 | —1,8590 | 0,48382 |
| 12,11 | —4,4921 | —4,8206 | 12,12 | —1,9407 | —5,7771 |
| 13,1 | —5,6042 | 2,6288 | 13,2 | —4,7456 | 1,7367 |
| 13,3 | 2,3833 | —2,8930 | 13,4 | —1,9980 | 5,7030 |
| 13,5 | 9,6637 | —4,7760 | 13,6 | —8,3417 | 5,9782 |
| 13,7 | —5,2217 | —0,32562 | 13,8 | —4,1759 | —2,0231 |
| 13,9 | —2,5623 | 10,767 | 13,10 | 8,6589 | —1,0528 |
| 13,11 | —3,3749 | 5,8541 | 13,12 | —0,13229 | 8,2192 |
| 13,13 | —7,0288 | 7,4643 | 14,1 | —2,3090 | 4,9664 |
| 14,2 | 3,2120 | —4,5289 | 14,3 | 1,9042 | 0,11919 |
| 14,4 | 0,78017 | —3,7527 | 14,5 | —2,5958 | —2,3344 |
| 14,6 | 1,9140 | —5,8721 | 14,7 | 1,1061 | 0,84132 |
| 14,8 | —3,0273 | —6,0838 | 14,9 | 4,9539 | 9,2345 |
| 14,10 | 5,3732 | —4,3168 | 14,11 | 2,7833 | —8,1637 |
| 14,12 | 1,2481 | —5,7314 | 14,13 | 5,1554 | 4,5453 |
| 14,14 | —5,2082 | —1,2840 | 15,1 | —0,35971 | 4,0142 |
| 15,2 | —4,4833 | —1,6056 | 15,3 | 0,83016 | —0,57218 |
| 15,4 | 1,3916 | 6,6644 | 15,5 | 3,1684 | 0,18250 |
| 15,6 | 7,0020 | —11,872 | 15,7 | 11,856 | 4,2690 |
| 15,8 | —9,7657 | —3,5710 | 15,9 | 2,2064 | 2,6632 |
| 15,10 | —2,0648 | 0,053724 | 15,11 | —3,2585 | 9,4052 |
| 15,12 | 1,0524 | 0,68726 | 15,13 | —3,7348 | 0,40249 |
| 15,14 | 1,2193 | —2,6786 | 15,15 | 0,14515 | —1,4802 |
| 16,1 | —2,3789 | 7,6413 | 16.2 | 2,1327 | 3,0669 |
| 16,3 | —4,7358 | 3,2610 | 16,4 | —1,1591 | 4,3001 |
| 16,5 | —4,4201 | 3,2230 | 16,6 | —5,8439 | —4,2809 |
| 16,7 | 10,591 | 0,81008 | 16,8 | —8,4738 | —0,24677 |
| 16,9 | 0,90001 | —10,628 | 16,10 | —2,9849 | —0,052467 |
| 16,11 | 0,68502 | —7,0765 | 16,12 | 2,2834 | —3,4087 |
| 16,13 | 3,5475 | 2,0683 | 16,14 | —0,73590 | —2,2626 |
| 16,15 | —3,5485 | 0,084126 | 16,16 | —2,9522 | 0,86217 |
| 17,12 | 8,3097 | 0,35424 | 17,13 | 3,2749 | 0,042920 |
| 17,14 | —1,6058 | 2,7286 | 18,12 | 1,1662 | 0,84724 |
| 18,13 | 0,46903 | —3,5547 | 18,14 | —2,7446 | —4,8376 |
| 19,12 | 6,7115 | —0,82623 | 19,13 | 3,3201 | —6,3128 |
| 19,14 | —0,39779 | —2,3817 | 20,13 | 5,8374 | 3,3320 |
| 20,14 | 1,1130 | —1,6183 | 21,13 | 0,36928 | —1,6288 |
| 21,14 | 5,2067 | 3,0801 | 22,14 | —8,0549 | 2,6440 |

Таблица 36

**Значения плотности воздуха $\left(\rho\left(\frac{г}{см^3}\right)\right)$ для $\overline{F}=75$**

| $h$ (км) \ $t$ | $0^h$ | $4^h$ | $8^h$ | $12^h$ | $16^h$ | $20^h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | $2{,}18\cdot10^{-12}$ | $2{,}16\cdot10^{-12}$ | $2{,}12\cdot10^{-12}$ | $2{,}09\cdot10^{-12}$ | $2{,}12\cdot10^{-12}$ | $2{,}16\cdot10^{-12}$ |
| 160 | 1,24 | 1,20 | 1,16 | 1,18 | 1,12 | 1,25 |
| 170 | $7{,}47\cdot10^{-13}$ | $7{,}09\cdot10^{-13}$ | $6{,}78\cdot10^{-13}$ | $7{,}14\cdot10^{-13}$ | $7{,}60\cdot10^{-13}$ | $7{,}70\cdot10^{-13}$ |
| 180 | 4,68 | 4,35 | 4,16 | 4,58 | 4,97 | 4,96 |
| 190 | 3,03 | 2,76 | 2,66 | 3,07 | 3,39 | 3,31 |
| 200 | 2,00 | 1,80 | 1,76 | 2,13 | 2,38 | 2,26 |
| 210 | 1,36 | 1,20 | 1,20 | 1,52 | 1,72 | 1,58 |
| 220 | $9{,}39\cdot10^{-14}$ | $8{,}18\cdot10^{-14}$ | $8{,}43\cdot10^{-14}$ | 1,11 | 1,26 | 1,12 |
| 230 | 6,59 | 5,69 | 6,04 | $8{,}26\cdot10^{-14}$ | $9{,}44\cdot10^{-14}$ | $8{,}09\cdot10^{-14}$ |
| 240 | 4,70 | 4,02 | 4,40 | 6,25 | 7,16 | 5,92 |
| 250 | 3,39 | 2,89 | 3,26 | 4,79 | 5,49 | 4,38 |
| 260 | 2,48 | 2,10 | 2,45 | 3,72 | 4,26 | 3,27 |
| 270 | 1,84 | 1,55 | 1,87 | 2,92 | 3,34 | 2,47 |
| 280 | 1,37 | 1,15 | 1,44 | 2,31 | 2,64 | 1,88 |
| 290 | 1,03 | $8{,}65\cdot10^{-15}$ | 1,12 | 1,87 | 2,10 | 1,45 |
| 300 | $7{,}83\cdot10^{-15}$ | 6,55 | $8{,}74\cdot10^{-15}$ | 1,48 | 1,68 | 1,12 |
| 320 | 4,61 | 3,84 | 5,48 | $9{,}76\cdot10^{-15}$ | 1,10 | $6{,}83\cdot10^{-15}$ |
| 340 | 2,77 | 2,30 | 3,51 | 6,57 | $7{,}31\cdot10^{-15}$ | 4,25 |
| 360 | 1,69 | 1,40 | 2,29 | 4,50 | 4,96 | 2,70 |
| 380 | 1,05 | $8{,}68\cdot10^{-16}$ | 1,52 | 3,13 | 3,41 | 1,73 |

Продолжение табл. 36

| $h$ (км) \ $t$ | $0^h$ | $4^h$ | $8^h$ | $12^h$ | $16^h$ | $20^h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 400 | $6{,}60\cdot10^{-16}$ | 5,44 | 1,02 | 2,20 | 2,37 | 1,13 |
| 420 | 4,15 | 3,42 | $6{,}85\cdot10^{-16}$ | 1,56 | 1,66 | $7{,}37\cdot10^{-16}$ |
| 440 | 2,66 | 2,19 | 4,68 | 1,11 | 1,18 | 4,89 |
| 460 | 1,72 | 1,42 | 3,22 | $8{,}04\cdot10^{-16}$ | $8{,}39\cdot10^{-16}$ | 3,27 |
| 480 | 1,13 | $9{,}30\cdot10^{-17}$ | 2,23 | 5,83 | 6,03 | 2,20 |
| 500 | $7{,}50\cdot10^{-17}$ | 6,19 | 1,56 | 4,26 | 4,36 | 1,50 |
| 520 | 5,06 | 4,20 | 1,10 | 3,13 | 3,17 | 1,03 |
| 540 | 3,48 | 2,90 | $7{,}84\cdot10^{-17}$ | 2,31 | 2,32 | $7{,}15\cdot10^{-17}$ |
| 560 | 2,44 | 2,05 | 5,64 | 1,72 | 1,70 | 5,03 |
| 580 | 1,75 | 1,49 | 4,11 | 1,28 | 1,26 | 3,59 |
| 600 | 1,29 | 1,11 | 3,03 | $9{,}64\cdot10^{-17}$ | $9{,}41\cdot10^{-17}$ | 2,60 |
| 620 | $9{,}79\cdot10^{-18}$ | $8{,}50\cdot10^{-18}$ | 2,27 | 7,29 | 7,06 | 1,92 |
| 640 | 7,62 | 6,70 | 1,72 | 5,56 | 5,34 | 1,45 |
| 660 | 6,09 | 5,42 | 1,33 | 4,27 | 4,07 | 1,11 |
| 680 | 4,98 | 4,48 | 1,05 | 3,31 | 3,14 | $8{,}77\cdot10^{-18}$ |
| 700 | 4,16 | 3,78 | $8{,}44\cdot10^{-18}$ | 2,59 | 2,44 | 7,05 |
| 720 | 3,54 | 3,24 | 6,91 | 2,05 | 1,92 | 5,78 |
| 750 | 3,06 | 2,81 | 5,75 | 1,64 | 1,53 | 4,84 |
| 760 | 2,67 | 2,47 | 4,86 | 1,32 | 1,23 | 4,11 |
| 780 | 2,36 | 2,18 | 4,17 | 1,08 | 1,01 | 3,55 |
| 800 | 2,09 | 1,94 | 3,63 | $8{,}98\cdot10^{-18}$ | $8{,}36\cdot10^{-18}$ | 3,10 |

Таблица 37

**Значения шкалы высот $H$ (км) для $\overline{F}=75$**

| $h$ (км) \ $t$ | $0^h$ | $4^h$ | $8^h$ | $12^h$ | $16^h$ | $20^h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 20,2 | 19,2 | 19,2 | 21,1 | 22,2 | 21,4 |
| 160 | 22,1 | 21,1 | 21,5 | 24,2 | 25,3 | 23,8 |
| 170 | 23,8 | 22,8 | 23,7 | 27,1 | 28,2 | 25,8 |
| 180 | 25,4 | 24,4 | 25,9 | 29,8 | 30,7 | 27,7 |
| 190 | 26,9 | 25,9 | 28,1 | 32,4 | 33,1 | 29,3 |
| 200 | 28,3 | 27,4 | 30,2 | 34,7 | 35,2 | 30,8 |
| 210 | 29,6 | 28,9 | 32,1 | 36,9 | 37,1 | 32,3 |
| 220 | 30,9 | 30,3 | 34,0 | 39,0 | 39,0 | 33,6 |
| 230 | 32,2 | 31,6 | 35,8 | 40,9 | 40,7 | 34,9 |
| 240 | 33,4 | 32,9 | 37,5 | 42,7 | 42,2 | 36,2 |
| 250 | 34,5 | 34,1 | 39,0 | 44,4 | 43,7 | 37,4 |
| 260 | 35,6 | 35,3 | 40,5 | 46,0 | 45,2 | 38,5 |
| 270 | 36,6 | 36,3 | 41,8 | 47,5 | 46,5 | 39,6 |
| 280 | 37,6 | 37,3 | 43,1 | 49,0 | 47,8 | 40,6 |
| 290 | 38,5 | 38,2 | 44,3 | 50,3 | 49,0 | 41,5 |
| 300 | 39,3 | 39,1 | 45,4 | 51,6 | 50,2 | 42,5 |
| 320 | 40,9 | 40,6 | 47,4 | 53,9 | 52,3 | 44.1 |
| 340 | 42,3 | 42,1 | 49,1 | 55,9 | 54,2 | 45,6 |
| 360 | 43,6 | 43,5 | 50,7 | 57,8 | 56,0 | 47,0 |
| 380 | 45,0 | 45,0 | 52,3 | 59,5 | 57,6 | 48,4 |
| 400 | 46,6 | 46,7 | 53,8 | 61,1 | 59,1 | 49,8 |
| 420 | 48,6 | 48,9 | 55,6 | 62,7 | 60,6 | 51,4 |
| 440 | 51,0 | 51,6 | 57,5 | 64,3 | 62,2 | 53,2 |
| 460 | 54,0 | 55,1 | 59,7 | 65,9 | 63,8 | 55,3 |
| 480 | 58,0 | 59,5 | 62,4 | 67,7 | 65,5 | 58,0 |
| 500 | 63,0 | 65,2 | 65,6 | 69,7 | 67,4 | 61,3 |
| 520 | 69,4 | 72,3 | 69,6 | 71,9 | 69,6 | 65,4 |
| 540 | 77,3 | 81,1 | 74,4 | 74,5 | 72,2 | 70,6 |
| 560 | 86,8 | 91,4 | 80,3 | 77,5 | 75,3 | 76,9 |
| 580 | 97,9 | 103,1 | 87,4 | 81,1 | 78,9 | 84,7 |
| 600 | 110,1 | 115,9 | 95,8 | 85,4 | 83,2 | 93,8 |
| 620 | 123,1 | 129,0 | 105,5 | 90,3 | 88,3 | 104,3 |
| 640 | 136,3 | 142,1 | 116,4 | 96,2 | 94,3 | 116,1 |
| 660 | 149,2 | 154,5 | 128,4 | 103,0 | 101,3 | 128,8 |
| 680 | 161,2 | 165,8 | 141,3 | 110,9 | 109,5 | 142,0 |
| 700 | 172,0 | 175,9 | 154,5 | 119,8 | 118,7 | 155,2 |
| 720 | 181,6 | 184,7 | 167,9 | 129,8 | 129,0 | 168,1 |
| 740 | 190,0 | 192,4 | 180,9 | 140,9 | 140,4 | 180,2 |
| 760 | 197,3 | 199,0 | 193,3 | 152,8 | 152,7 | 191,3 |
| 780 | 203,7 | 204,9 | 204,8 | 165,5 | 165,6 | 201,4 |
| 800 | 209,3 | 210,1 | 215,3 | 178,8 | 179,0 | 210,3 |

**Коэффициенты $M_n^{(k)}(e)$**

$$M_1^{(0)} = 1$$

$$M_2^{(0)} = \frac{1}{2}(2+e^2)$$

$$M_3^{(0)} = \frac{1}{2}(2+3e^2)$$

$$M_4^{(0)} = \frac{1}{8}(8+24e^2+3e^4)$$

$$M_5^{(0)} = \frac{1}{8}(8+40e^2+15e^4)$$

$$M_6^{(0)} = \frac{1}{16}(16+120e^2+90e^4+5e^6)$$

$$M_7^{(0)} = \frac{1}{16}(16+168e^2+210e^4+35e^6)$$

$$M_1^{(1)} = \frac{1}{2}e$$

$$M_2^{(1)} = e$$

$$M_3^{(1)} = \frac{3}{8}e(4+e^2)$$

$$M_4^{(1)} = \frac{1}{2}e(4+3e^2)$$

$$M_5^{(1)} = \frac{5}{16}e(8+12e^2+e^4)$$

$$M_2^{(2)} = \frac{1}{4}e^2$$

$$M_3^{(2)} = \frac{3}{4}e^2$$

$$M_4^{(2)} = \frac{1}{4}e^2(6+e^2)$$

$$M_5^{(2)} = \frac{5}{4}e^2(2+e^2)$$

$$M_3^{(3)} = \frac{1}{8}e^3$$

$$M_4^{(3)} = \frac{1}{2}e^3$$

$$M_5^{(3)} = \frac{5}{32}e^3(8+e^2)$$

$$M_4^{(4)} = \frac{1}{16}e^4$$

$$M_5^{(4)} = \frac{5}{16}e^4$$

$$M_5^{(5)} = \frac{1}{32}e^5$$

**Коэффициенты $L_n^{(k)}(s)$**

$$L_0^{(0)} = 1$$

$$L_2^{(0)} = -\frac{1}{4}(2-3s^2)$$

$$L_4^{(0)} = \frac{3}{64}(8-40s^2+35s^4)$$

$$L_6^{(0)} = -\frac{5}{256}(16-168s^2+378s^4-231s^6)$$

$$L_2^{(2)} = \frac{3}{8}s^2$$

$$L_4^{(2)} = -\frac{5}{32}s^2(6-7s^2)$$

$$L_6^{(2)} = \frac{105}{1024}s^2(16-48s^2+33s^4)$$

$$L_4^{(4)} = \frac{35}{128}s^4$$

$$L_6^{(4)} = -\frac{63}{512}s^4(10-11s^2)$$

$$L_6^{(6)} = \frac{231}{1024}s^6$$

$$L_1^{(1)} = \frac{1}{2}s$$

$$L_3^{(1)} = -\frac{3}{16}s(4-5s^2)$$

$$L_5^{(1)} = \frac{15}{128}s(8-28s^2+21s^4)$$

$$L_3^{(3)} = \frac{5}{16}s^3$$

$$L_5^{(3)} = -\frac{35}{256}s^3(8-9s^2)$$

$$L_5^{(5)} = \frac{63}{256}s^5$$

## ЛИТЕРАТУРА

### К ГЛАВЕ I


1. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, М., 1961.
2. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968.
3. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 3, Гостехиздат, М., 1949.
4. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, М., 1946.
5. Гобсон Е., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ., М., 1952.
6. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, т. 2, Физматгиз, М., 1963.
7. Пеллинен Л. П., Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов. Итоги науки, серия Космонавтика, М., 1972.
8. Geodetic parameters for a 1966 Smithsonian institution Standard Earth, Edited by C. A. Lundquist and G. Veis, Smithsonian institution Astrophysical Observatory, Spec. Rep. № 200, 1966.
9. Стандартная Земля, под редакцией К. Лундквиста и Г. Вейса (перевод с английского), «Мир», М., 1969.
10. Kozai Y., Revised values for Coefficients of Zonal Harmonics in the Geopotential, Smithsonian Astrophysical Observatory, Spec. Rep., № 295, 1969.
11. Gaposchkin E. M., Lambeck K., 1969 Smithsonian Standard Earth (II), Smithsonian Astrophysical Observatory, Spec. Rep. № 315, 1970.
12. Holshevnikov K. W., Le développement du potentiel dans le cas d'une densité analytique, Cel. Mech., v. 3, № 2. 1971.
13. Аксенов Е. П., Механическая интерпретация силовой функции обобщенной задачи двух неподвижных центров, Астрон. ж., т. 45, № 4, 1968, стр. 858.
14. Kozai Y., New determination of zonal harmonics coefficients of the Earth's gravitational potential, Publications of the Astronomical Society of Japan, v. 16, p. 263, 1964.
15. Грушинский Н. П., Теория фигуры Земли, Физматгиз, стр. 252, 1963.
16. Doubochine G. N., Sur le Développement du Potentiel de la Terre par les Fonctions de Lamé, Trajectories des Corps Céleste Artificiels, Berlin — New York, p. 68, 1966.
17. Савров Л. А., Разложение аномалий силы тяжести в ряды по эллипсоидальным функциям Ламме, Труды Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 38, 1972.

18. Balmino G., Contribution à l'amelioration du potentiel terrestre, CNES Groupe de Recherches de Geodesie Spatiale Bull., № 12, p. 1, 1974.
19. Vinti J. P., Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy. Journ. Res. Nat. Bur. Standards, v. 63 B, № 3, p. 105, 1959.
20. Кислик М. Д., Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, 1960.
21. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, стр. 64, 1961.
22. Брауэр Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики (перевод с английского), «Мир», М., 1964.
23. Яров-Яровой М. С., Работы в области небесной механики в МГУ за 50 лет (1917—1967 гг.), История и методология естественных наук, вып. 7, Астрономия и радиофизика, Изд-во Московск. ун-та, стр. 86, 1968.
24. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников Земли, Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», Изд-во АН СССР, стр. 92, 1963.
25. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли, Астрон. ж., т. 40, вып. 2, стр. 363, 1963.
26. Barrar R. B., Some remarks on the motion of a satellite of an oblate planet, Astron. Journ., v. 66, № 1, 1961.
27. Cook A. H., The motion of artificial satellites in the gravitational field of Earth, Bologna, p. 96, 1967.
28. Бурштейн Е. И., О решениях уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах и их вырождениях, удовлетворяющих условиям теоремы Штеккеля, № 4577, деп. 1972. Реферативный журнал «Астрономия», № 11, 1972.
29. Козлов И. С., Задача четырех неподвижных центров и ее приложения к теории движения небесных тел, Астрон., ж., т. 52, № 3, 1975.
30. Newton R., Motion of a satellite around an unsymmetrical central body, Journ. Appl. Phys., v. 30, № 2, 1959.
31. Бадалян Г., О проблеме двух неподвижных центров, Астрон. ж., т. 11, вып. 4, 1934.
32. Демин В. Г., Об орбитах задачи двух неподвижных центров, Астрон., ж., т. 37, вып. 6, стр. 1068, 1960.
33. Коман Г. Г., Промежуточные орбиты искусственных спутников Луны, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 186, стр. 3, 1973.
34. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Основы теории специальных функций, «Наука», М., 1974.

## К ГЛАВЕ II


1. Аксенов Е. П., Канонические уравнения движения спутника, Астрон. ж., т. 45, № 6, стр. 1284, 1968.
2. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли, Астрон. ж., т. 40, № 2, стр. 363, 1963.
3. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, стр. 64, 1961.
4. Аксенов Е. П., Асимметричные промежуточные орбиты искусственных спутников Земли, Сообщения Гос. астрон., ин-та им. П. К. Штернберга, № 155, стр. 3, 1968.
5. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Качественный анализ форм движения в задаче о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, стр. 173, 1963.
6. Алексеев В. М., Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений, Бюлл. Ин-та теор. астрон., т. 10, № 4, стр. 117, 1965.
7. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Траектории параболического класса в задаче о движении материальной частицы в нормальном поле притяжения Земли, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 123, стр. 22, 1962.
8. Чепурова В. М., Качественный анализ движений в гиперболическом случае задачи двух неподвижных центров, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 154, стр. 14, 1968.
9. Гиричев В. П., Параболический случай в обобщенной задаче двух неподвижных центров, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 160, стр. 35, 1971.
10. Носков Б. Н., Орбиты гиперболического типа в задаче двух неподвижных центров, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 159, стр. 14, 1969.
11. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., О полярных орбитах искусственных спутников Земли, Вестник Москов. гос. ун-та, сер. II, Физ., астр., стр., № 5, стр. 81, 1962.
12. Уральская В. С., Полярные орбиты искусственных небесных тел, Вестник Москов. гос. ун-та, сер. Физ., астр., № 4, 1964.
13. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Об устойчивости некоторых классов орбит искусственных спутников Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, стр. 163, 1963.
14. Дегтярев В. Г., Об устойчивости движения в обобщенной задаче двух неподвижных центров, ПММ, т. 26, вып. 6, 1965.
15. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения, «Наука», М., стр. 190, 1968.
16. Белецкий В. В., Очерки о движении космических тел, «Наука», М., стр. 57, 1972.

## К ГЛАВЕ III


1. Сикорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ, 1936.
2. Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, «Наука», М., 1970.
3. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, изд. 2-е, «Наука», М., 1976.
4. Kozai Y., New determination of zonal harmonics coefficients of the Earth's gravitational potential. Publ. of the Astronomical Society of Japan, v. 16, p. 263, 1964.
5. Аксенов Е. П., Вашковьяк С. Н., Емельянов Н. В., Определение элементов орбит ИСЗ по фотографическим и лазерным наблюдениям, Сб. «Наблюдения искусств. спутников Земли», вып. 16, 1977.
6. Аксенов Е. П., Ограниченные решения обобщенной задачи двух неподвижных центров, Вестник МГУ, сер. физ., астр., № 6, стр. 68, 1967.
7. Аксенов Е. П., Движение искусственных спутников в нормальном поле притяжения Земли, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 137, стр. 3, 1965.
8. Насонова Л. П., О вековых возмущениях третьего порядка в движении спутников планет, Астрон. ж., т. 48, вып. 1, стр. 194, 1971.
9. Аксенов Е. П., Промежуточные орбиты искусственных спутников Земли, Космические исследования, т. 2, вып. 1, стр. 3, 1964.
10. Аксенов Е. П., О промежуточных орбитах искусственных спутников Земли, Вестник МГУ, сер. физ. астр., № 3, стр. 36, 1965.
11. Аксенов Е. П., Промежуточные орбиты искусственных спутников Земли с малым эксцентриситетом, Космические исследования, т. 2, вып. 1, стр. 14, 1964.
12. Аксенов Е. П., Определение элементов орбиты ИСЗ по начальным данным, Труды Гос. астр. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 35, стр. 36, 1966.
13. Izsak I. G., A theory of satellite motion about on oblate planet, 1, A second-order solution of Vinti's dynamical problem, Smithsonian Inst. Astrophys. Obs., Spec. Rep., № 52, p. 54, 1960.
14. Кислик М. Д., Анализ интегралов движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли, сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 13, стр. 24, 1960.
15. Marchal Ch., Mouvement des satellites artificiels. Calcul à partir des solutions exactes du problème des deux centres fixes. Publication ONERA n° 111, 1964.
16. Тимошкова Е. И., Об определении постоянных интегрирования в обобщенной задаче двух неподвижных центров, Вестник Ленинградского гос. ун-та, т. 13, вып. 3, 1966.

17. Вашковьяк М. А., Почти круговые орбиты искусственных спутников Земли, Вестник Москов. гос. ун-та, сер. физ., астр., № 3, стр. 58, 1964.
18. Вашковьяк С. Н., Промежуточные орбиты спутников Марса, Вестник Москов. гос. ун-та, сер. физ. астр. № 3, 1968.
19. Уральская В. С., Полярные орбиты искусственных небесных тел, Вестник Москов. гос. ун-та, сер. физ., астр., № 4, 1964.
20. Аксенов Е. П., Доможилова Л. М., Вычисление симметричной промежуточной орбиты ИСЗ, Труды Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 38, вып. 2, стр. 52, 1972.
21. Аксенов Е. П., Доможилова Л. М., Вычисление асимметричной промежуточной орбиты ИСЗ, Труды Гос. астр. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 38, вып. 2, стр. 67, 1972.

## К ГЛАВЕ IV

1. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию, «Наука», М., 1968.
2. Шарлье К., Небесная механика (перевод с немецкого), «Наука», М., стр. 85, 1966.
3. Арнольд В. И., Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике, Проблемы движения искусственных небесных тел., Изд-во АН СССР, стр. 7, 1963.
4. Брауэр Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики (перевод с английского), «Мир», М., 1964.
5. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Новые качественные методы в небесной механике, «Наука», М., 1971.
6. Аксенов Е. П., Носков Б. Н., Одна форма дифференциальных уравнений возмущенного движения спутника, Астрон. ж., т. 49, стр. 1292, 1972.
7. Аксенов Е. П., Канонические уравнения движения спутника, Астрон. ж., т. 45, № 6, стр. 1284, 1968.
8. Тимошкова Е. И., Уравнения возмущенного движения спутника, Астрон. ж., т. 48, стр. 1061, 1971.
9. Аксенов Е. П., Один вид дифференциальных уравнений движения спутника, Труды Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 35, стр. 44, 1966.

## К ГЛАВЕ V

1. Аксенов Е. П., Движение спутника осесимметричной планеты, Труды Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 35, стр. 59, 1966.
2. Brouwer D., Solution of the problem of the artificial satellite theory without drag, Astron. J., v. 64, № 1274, p. 378, 1959.
3. Kozai Y., Second-order solution of artificial satellite theory without air drag, Astron., J., v. 67, № 1302, p. 446, 1962.
4. Проскурин В. Ф., Батраков Ю. В., Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли, Бюлл. ин-та теор. астрон., т. 7, № 7 (90), стр. 537, 1960.

5. K a u l a W., Analysis of gravitational and geometric aspects of geodetic utilization of satellites, Geophys. J., v. 5, № 2, p. 104, 1961.
6. G a r f i n k e l B., The disturbing function for an artificial satellits, Astron. J., № 9, p. 699, 1965.
7. О р л о в А. А., Вековые и долгопериодические возмущения в движении спутника несферической планеты, Бюлл. Ин-та теор. астрон., т. 10, № 1, стр. 6, 1965.
8. А к с е н о в Е. П., Вековые и долгопериодические возмущения спутника осесимметричной планеты, Труды Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 36, стр. 161, 1967.
9. А к с е н о в Е. П., Осредненная ограниченная круговая задача трех тел, Труды университета Дружбы народов, т. 21, Математика, вып. 2, стр. 184, 1967.
10. G u d i n g R. H., A recurrence relation for inclination functions, Royal Aircraft Establishment, Technical Report, № 70074, p. I, 1970.
11. Б а т р а к о в Ю. В., Возмущения орбитальных элементов спутника Земли от зональных гармоник произвольного порядка, Бюлл. Ин-та теор. астрон., т. 12, № 9 (142), стр. 813, 1971.
12. K o z a i Y., Motion of a particle with critical inclination in the gravitational field of a spheroid, Smithsonian contributions to astrophysics, v. 5, № 5, p. 53, 1961.
13. H a g i h a r a Y., Libration of an Earth satellite with critical inclination, Smithsonian contributions to astrophysics, v. 5, № 5, p. 39, 1961.
14. А к с е н о в Е. П., П р о х о р о в а И. П., О вековых возмущениях в движении искусственных спутников Земли, Астрон. ж., т. 49, стр. 630, 1972.
15. А к с е н о в Е. П., П р о х о р о в а И. П., Вековые и долгопериодические возмущения в движении искусственных спутников Земли, Сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 13, стр. 18, 1973.
16. Н а с о н о в а Л. П., Вековые возмущения третьего порядка относительно сжатия от всех зональных гармоник гравитационного потенциала планеты, Астрон., ж., т. 50, стр. 849, 1973.
17. С о р о к и н Н. А., Долгопериодические возмущения второго порядка в движении искусственных спутников, Сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 16, 1977.
18. С о р о к и н Н. А., Короткопериодические возмущения от зональных гармоник в движении ИСЗ, сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 13, стр. 42, 1973.

## К ГЛАВЕ VI

1. K o z a i Y., Tesseral harmonics of the potential of the Earth as derived from satellite motions, Smithsonian Inst., Astrophys. Obs., Special Report, № 72, p. 1, 1961.
2. C h a l l e A. et L a c l a v e r i e J. J., Fonction perturbatrice et représentation analytique du mouvement d'un satellite, Astron. and Astrophys., vol. 3, p. 15, 1969.

3. Tisserand F., Traité de Mécanique Céleste, Paris, vol. I, p. 249, 1889.
4. O' Keefe I. A., and Batchlor C. D., Perturbations of a close satellite by the equatorial ellipticity of the Earth, Astron. J., vol. 62, p. 183, 1957.
5. Sehnal L., The influence of the equatorial ellipticity of the Earth's gravitational field on the motion of a close satellite, Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia, v. 11, p. 3, 1960.
6. Аксенов Е. П., О движении искусственного спутника в нецентральном поле тяготения Земли, Бюлл. Ин-та теор. астрон., т. 7, стр. 850, 1960.
7. Аксенов Е. П., Влияние тессеральных и секториальных гармоник земного потенциала на движение искусственных спутников, Труды Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 35, стр. 75, 1966.
8. Kaula W. M., Analysis of gravitational and geometric aspects of geodetic utilization of satellites, Geophys. J. of the R.A.S., vol. 5, p. 104, 1961.
9. Яшкин С. Н., Возмущения элементов орбиты ИСЗ от тессеральных и секториальных гармоник потенциала Земли, Астрон. ж., т. 47, № 5, 1970.
10. Батраков Ю. В., Филенко Л. Л., Движение спутника Земли под действием возмущений от тессеральных гармоник, Бюлл. Ин-та теор. астрон., т. 13, стр. 73, 1972.
11. Филенко Л. Л., Буквенная теория движения ИСЗ в поле тессеральных гармоник потенциала притяжения Земли при малых эксцентриситетах, Бюлл. Ин-та теор. астрон., т. 13, стр. 246, 1972.
12. Sehnal L., The perturbations of the orbit of the stationary satellite of the Earth, Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia, vol. 11, p. 4, 1960.
13. Morando B., Libration d'un satellite de 24h., C. r. Acad. Sci., 254, p. 635, 1962.
14. Morando B., Orbites de résonance des satellite de 24h., Bull. Astron., 24, p. 47, 1963.
15. Morando B., Recherches sur les orbits de resonance. Use Artific. Sat. geod., Amsterdam, N. Holland Publ. Co., p. 42, 1965.
16. Allan R. R., Perturbations of a geostationary satellite by the longitude — dependent terms in the Earth's gravitational field, Planet and Space Sci., vol. 11, p. 1325, 1963.
17. Журавлев С. Г., Аналитическая теория движения суточного спутника. Часть I. Промежуточная орбита, Проблемы механики управляемого движения, вып. 1, стр. 68, Пермь, 1972.
18. Журавлев С. Г., Аналитическая теория движения суточного спутника. Часть II. Вековые, долгопериодические и короткопериодические возмущения, Проблемы механики управляемого движения, вып. 1, стр. 85, Пермь, 1972.
19. Вашковьяк М. А., Возмущенное движение стационарного искусственного спутника Земли на коротком интервале времени, «Космические исследования», т. 7, вып. 6, 1969.

20. Вашковьяк М. А., О методе приближенного расчета движения стационарного искусственного спутника Земли, «Космические исследования», т. 10, вып. 2, 1972.
21. Яшкин С. Н., Случаи резонансов в элементах орбиты ИСЗ, Астрон. ж., т. 47, № 6, 1970.
22. Allan R. R., Resonance effects due to the longitude dependence of the gravitational field of a rotating primary, Planet and Space Sci., vol. 15, p. 53, 1967.

## К ГЛАВЕ VII

1. Смарт У. М., Небесная механика (перевод с английского), «Мир», М., 1965.
2. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», М., стр. 184, 1971.
3. Аксенов Е. П., Лунно-солнечные возмущения в движении искусственных спутников Земли, Труды Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 35, стр. 93, 1966.
4. Kozai Y., A new method to compute lunisolar perturbations in satellite motions, Smithsonian Astrophys. Obs., Spec. Rep., № 349, 1973.
5. Уральская В. С., Лунно-солнечные возмущения околополярных спутников, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 165, 1970.
6. Musen P., On the long-period lunar and solar effects on the motion of an artificial satellite, J. Geophys. Res., vol. 66, № 9, p. 2797, 1961.
7. Вашковьяк С. Н., Влияние Солнца на движение спутников Марса, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 160, 1969.
8. Егорова А. В., Влияние притяжения Луны и Солнца на движение искусственного спутника Земли. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, стр. 46, 1961.
9. Долгачев В. П., О движении далеких ИСЗ в гравитационном поле Земли и Луны, Вестн. Москов. ун-та, сер. физ. астрон., № 1, 1968.
10. Лидов М. Л., Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, стр. 5, 1961.
11. Моисеев Н. Д., О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек. Труды Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, т. 15, стр. 75, 1945.

## К ГЛАВЕ VIII

1. Арнольд В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, Успехи матем. наук, т. 18, вып. 6 (114), стр. 91, 1963.
2. Кинг-Хили Д., Теория орбит искусственных спутников в атмосфере, «Мир», М., стр. 33, 1966.

3. CIRA 1965, Akademie — Verlag, Berlin, 1969.
4. CIRA 1972, Akademie — Verlag, Berlin, 1972.
5. Jacchia L. G. A variable atmospheric — density model from satellite accelerations, Journ. Geophys. Res., vol. 65, p. 2775, 1960.
6. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», М., стр. 416, 1965.
7. Аксенов Е. П., Носков Б. Н., О вековых возмущениях в движении искусственных спутников, вызываемых сопротивлением атмосферы, Астрон. ж., т. 50, № 3, 1973.
8. Sehnal L., Mills S. B., The short-period drag perturbations of the orbits of artificial satellites, Smithsonian Institution Astrophysical Observatory, Special Report, № 223, p. 1, 1970.
9. Cook G. E., King-Hele D. G., The contraction of satellite orbits under the influence of air drag. IV. With scale high depended of altitude, Proc. Roy. Soc., A 275, № 1362, p. 357, 1963.
10. Ньютон И., Математические начала натуральной философии. См. Акад. А. И. Крылов. Собрание трудов, т. 7, 1936.
11. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П., Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений, Успехи физ. наук, т. 63, 1а, 1957.
12. Эльясберг П. Е., Зависимость вековых изменений элементов орбит от сопротивления воздуха. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 3, стр. 54, 1959.
13. Батраков Ю. В., Проскурин В. Ф., О возмущениях орбит искусственных спутников, вызываемых сопротивлением воздуха, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 3, стр. 39, 1959.
14. Гребеников Е. А., О вековых возмущениях в теории движения искусственных спутников Земли, Астрон. ж., т. 36, № 6, 1959.
15. King-Hele D. G., The descent of an Earth-satellite through the upper atmosphere, J. Brit. Interpl. Soc., vol. 15, p. 314, 1956.
16. Таратынова Г. П., О движении искусственного спутника в нецентральном поле тяготения Земли при наличии сопротивления атмосферы, Успехи физич. наук, т. 63, 1а, 1957.
17. Bosanquet C. H., Change of the inclination of satellite orbits. Nature, 182, p. 4648, 1958.
18. Sterne T. E., Effect of the Rotation of a Planetary Atmosphere upon the Orbit of a Close Satellite, A.R.S. J., 29, 10, 1959.
19. Cook G. E., Plimmer R. N. A., The Effect of Atmosphere Rotation on the Orbital Plane of Near-Earth Satellite, Proc. Roy. Soc., A 258, p. 1295, 1960.
20. Bosanquet C. H., Scale Height of the Upper Atmosphere, Nature, 182, p. 4641, 1958.
21. Эльясберг П. Е., Ястребов В. Д., Определение плотности верхней атмосферы по результатам наблюдений за полетом третьего советского искусственного спутника Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, 1960.

22. Cook G. E., King-Hele D. G., Walker D. M. C., Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag. Proc. Roy. Soc., A 264, p. 88, 1961.
23. Фоминов А. М., Движение спутников Земли в атмосфере с несферическим распределением плотности, зависящим от высоты, Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, т. 10, № 9 (122), 1966.
24. Фоминов А. М., Движение искусственного спутника Земли в несферической атмосфере. Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, т. 9, 185, 1963.
25. Фоминов А. М., Вековые и долгопериодические возмущения первого порядка в движении искусственных спутников, вызываемые сопротивлением атмосферы, Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, т. 13, № 7, 1973.
26. Фоминов А. М., Возмущения второго порядка в большой полуоси и наклоне орбиты спутника, вызываемые сжатием Земли и сопротивлением атмосферы. Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, т. 11, стр. 507, 1968.
27. Chong-Hung Zee, Trajectories of Satellites under the Combined Influences of Earth Oblateness and Air Drag., Celestial Mechanics, vol. 3, p. 148, 1971.
28. Izsak I. G., Periodic drag perturbations of artificial satellites. Astron. Journ., vol. 65, p. 355, 1960.
29. Носков Б. Н., Вековые и короткопериодические возмущения элементов промежуточной орбиты, Сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 13, стр. 110, 1973.
30. Носков Б. Н., Долгопериодические возмущения в движении ИСЗ, вызываемые комбинированным влиянием сопротивления атмосферы и сжатия Земли, Астрон. ж., т. 52, № 4, 1975.
31. Носков Б. Н., Долгопериодические возмущения элементов промежуточной орбиты ИСЗ, Сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 14, 1975.
32. Носков Б. Н., Вековые возмущения в движении ИСЗ, обусловленные вращением атмосферы Земли, Сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 15, 1976.
33. Носков Б. Н., Долгопериодические возмущения в движении ИСЗ, обусловленные вращением атмосферы Земли, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 210, 1977.
34. Носков Б. Н., Вековые возмущения элементов промежуточной орбиты ИСЗ, вызываемые сжатием атмосферы, Сообщения Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, № 210, 1977.
35. Эльясберг П. Е., Кугаенко Б. В., Влияние суточного эффекта в распределении плотности атмосферы на торможение ИСЗ, Сб. Математические методы моделирования в космических исследованиях, «Наука», М., 1971.
36. King-Hele D. G. and Wolker D. M. C., The change in satellite orbital inclination caused by a rotating atmosphere with day-to-night density variation, Celestial Mech., v. 5, № 1, 1972.

## К ГЛАВЕ IX


1. Baker R. M. L., Radiation on a Satellite in the Presence of Partly Diffuse and Partly Specular Reflecting Body. Trajectories of Artificial celestial bodies. Springer—Verlag, p. 85, 1966.
2. Ландсберг Г. С., Оптика, Изд. 3-е, переработанное, Гостехиздат, 1952.
3. Полякова Е. Н., Световое давление и движение спутников Земли. Бюлл. Ин-та теоретич. астрон., т. 9, стр. 15, 1963.
4. Ferraz-Mello S., Action de la Pression de Radiation sur le Mouvement d'un Satellite Artificial de la Terre. XIX$^{e}$-Congress IAF, Paris, p. 41, 1963.
5. Ferraz-Mello S., Sur le problème de la pression de radiations dans la theorie des satellites artificiels. C. R. Acad. Sc., Paris, 258, p. 463, 1964.
6. Lala P., Sehnal L., The Earth's shadowing effects in the short-periodic perturbations of satellite orbits, Bulletin of the astronomical institutes of Czechoslovakia, 20, p. 328, 1969.
7. Вашковьяк С. Н., Функция тени в задаче о влиянии светового давления на движение ИСЗ, Вестн. Москов. ун-та, сер. физ., астр., № 5, стр. 584, 1974.
8. Lala P., Semi-analytical theory of solar pressure perturbations of satellite orbits during short time intervals, Bulletin of the astronomical institutes of Czechoslovakia, vol. 22, p. 63, 1971.
9. Musen P., The influeence of the solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite, Journ. Geophys. Res., v. 65, p. 1391, 1960.
10. Parkinson R. W., Jones H. M., Shapiro I. I., The effect of solar radiation pressure on Earth satellite orbits, Science, 131, p. 920, 1960.
11. Kozai Y., Effects of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite, Smithsonian Astrophys. Obs., Special Report, 56, 1961.
12. Bryant R. W., The effect of solar Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite, Astron. J, 66, p. 430, 1961.
13. Zadunaisky P. E., Shapiro J. I., Jones H. M., Experimental and Theoretical Results on the Orbit of Echo I, Smithsonian Astrophys. Obs. Spec. Rep., № 61, 1961.
14. Ferraz-Mello S., Analytical study of the Earth's shadowing effects on satellite orbits, Celestial Mechanics, № 5, 1973.
15. Вашковьяк С. Н., Влияние светового давления на движение ИСЗ, Сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 13, стр. 124, 1973.
16. Вашковьяк С. Н., Изменение орбит спутников-баллонов под действием светового излучения, Астрон. ж., т. 53, № 5, 1976.
17. Sehnal L., The Perturbations of the Orbital Elements caused by the Pressure of the Radiation Reflected from the Earth's, Trajectories of Artificial Celestial Bodies. Springer—Verlag, p. 80, 1966.
18. Sehnal L., Radiation pressure effects in the motion of artificial satellites, Dynamics of satellites, Springer—Verlag, p. 262, 1970.
19. Wyatt S., The effect of Terrestrial Radiation Pressure on Satellite Orbits. Dynamics of Satellites, Springer—Verlag, p. 180, 1963.

## К ГЛАВЕ X

1. Kozai Y., Effects of Precession and Nutation on the Orbital elements of a close Earth Satellite, Astronomical Journ., v. 65, No. 10, p. 621, 1960.
2. Lambeck K., Precession, nutation and the choice of reference system for close Earth satellite orbits, Celestial Mechanics, v. 7, No. 2, p. 139, 1973.
3. Kozai Y., Kinoshita H., Effects of motion of the equatorial plane on the orbital elements of an Earth satellite, Celestial Mechanics, v. 7, No. 3, p. 356, 1973.
4. Kozai Y., Effects of the tidal deformation of the Earth on the motion of close Earth satellites, Publ's. Astron. Soc. Japan, v. 17, No. 4, p. 395, 1965.
5. Kaula W., Tidal friction with dependent amplitude and phase angle, Astron. Journ., v. 74, No 9, p. 1108, 1969.
6. Musen P., Estes R., On the tidal effects in motion of artificial satellites, Celestial Mechanics, v. 6, No 1, p. 4, 1972.
7. Musen P., Felstentreger T., On the determination of the long period tidal perturbation in the elements of artificial Earth satellites, Celestial Mechanics, v. 7, No 2, p. 256, 1973.
8. Westerman H., Perturbation approach to the effect of geomagnetic field on a charged satellite, ARS Journ., v. 30, p. 204, 1960.
9. Sehnal L., The motion of a chaged satellite in the Earth's magnetic field, Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report, No 271, p. 1, 1968.
10. Beard D., Johnson F., Charge and magnetic field interaction with satellites. J. Geophys., Res., v. 65, p. 1, 1960.
11. Шкодров В. Г., Шкодрова Е. Б., Вековые возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые притяжением атмосферы, Сб. «Наблюдения искусственных спутников Земли», № 9, стр. 27, 1969.
12. Парийский Н. Н., Земные приливы и внутреннее строение Земли, Известия АН СССР, серия геофиз., № 2, стр. 193, 1963.
13. Молоденский М. С., Крамер М. В., Числа Лява для статических земных приливов 2-го и 3-го порядков. Земные приливы и нутация Земли, Изд. АН СССР, 1961.
14. Kozai Y., Love's number of the Earth derived from satellite observations, Publ. Astron. Soc. Japan, v. 20, No 1, p. 24, 1968.
15. Newton R., An observation of the satellite perturbation produced by the solar tide, J. Geophys. Res., v. 70, No 24, p. 5983, 1965.
16. Брумберг В. А., Релятивистская небесная механика, «Наука», М., 1972.

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ


Абалакин В. К. 102, 219
Аксенов Е. П. 36, 45, 66, 67, 102, 106, 109, 134, 148, 179, 186, 187, 211, 219, 237, 257, 267, 279
Алексеев В. М. 67
Аллан Р. (Allan R.R.) 211
Аллен (Allen C. W.) 281
Арнольд В. И. 125, 239, 241
Ахиезер Н. И. 68

Бадалян Г. 46
Балмино Г. (Balmino G.) 44
Баррар Р. (Barrar R.B.) 45
Батраков Ю. В. 186, 211, 278
Бейкер (Baker R.M.L.) 308
Белецкий В.В. 67
Бессель (Bessel F.W.) 247, 248, 255, 267
Бирд Д. (Beard D.) 310, 331
Боголюбов Н. Н. 307
Бозанке К. (Bosanquit C.H.) 278
Брайянт (Bryant R.W.) 307
Брауэр Д. (Brouwer D.) 8, 45, 126, 186
Брумберг В. А. 332
Бурштейн Е. И. 45
Бэтчлор (Batchlor C.D.) 211

Вайс Г. (Veis G.) 309, 319
Ватсон Дж. Н. (Watson J.N.) 14
Вашковьяк М. А. 109, 211
Вашковьяк С. Н. 10, 106, 109, 147, 238, 291, 293, 302, 307, 308
Вестерман Г. (Westerman H.) 310
Винти (Vinti J.P.) 45

Гамильтон (Hamilton W.R.) 50, 66
Ганзен (Hansen P.A.) 204, 205
Гарфинкель Б. (Garfinkel B.) 186
Гаусс К. (Gauss C.F.) 142
Гейсканен (Heiskanen W.A.) 42
Гельмерт (Helmert F.R.) 42
Гиричев В. П. 67
Гобсон Е. (Gobson E.) 14, 17
Гольдер (Golder F.) 12
Гребеников Е. А. 10, 45, 66, 67, 102, 126, 219, 278
Грушинский Н. П. 42
Гудинг Р. (Guding R.H.) 186

Дегтярев В. Г. 67
Делоне (Delaunay C.) 111, 129, 143, 186
Демин В. Г. 10, 45, 46, 66, 67, 102
Джонс (Jones H.M.) 306
Джонсон Ф. (Johnson F.S.) 281, 310, 331
Дирихле (Dirichlet P.G.L.) 13
Долгачев В. П. 238
Доможилова Л. М. 109
Дубошин Г. Н. 11, 44

Егорова А. В. 238
Емельянов Н. В. 10

Журавлев С. Г. 211

Задунайский Е. П. 307

Ижак И. (Izsak I.G.) 109

Кассинис (Cassinis G.) 42
Каула В. (Kaula W.) 186, 211, 310
Кинг-Хили (King-Hele D.G.) 241, 273, 278, 279
Киношита Х. (Kinoshita H.) 309, 314
Кислик М. Д. 45, 109
Клеменс Дж. (Clemence G.) 8, 45, 126
Козаи И. (Kozai Y.) 40, 102, 186, 187, 196, 211, 237, 238, 307, 309, 310, 314, 319, 321, 323, 326, 327
Козлов И. С. 46
Колмогоров А. Н. 239
Коман Г. Г. 46
Крылов Н. М. 307
Кугаенко Б. В. 279
Кук А. (Cook A.H.) 45
Кук Г. (Cook G.E.) 278

Лагранж Ж. Л. (Lagrange J.L.) 125, 129, 136, 137
Лаклавери И. (Laclaverie J.J.) 203, 211
Лала П. (Lala P.) 291, 307
Ламбек К. (Lambeck K.) 309
Ламберт (Lambert J.) 283
Ламе (Lame G.) 44
Ландсберг Г. С. 283
Лаплас (Laplace P.S.) 12, 15, 126, 127
Лебедев П. Н. 280

Лежандр (Legendre A.M.) 13—18, 20, 25, 26, 68, 157, 158, 200, 296
Лидов М. Л. 238
Ляв (Love A.A.) 320

Маршал К. (Marchal Ch.) 109
Миллс С. (Mills S.B.) 268, 279
Моисеев Н. Д. 238
Молоденский М. С. 321
Морандо Б. (Morando B.) 211
Мун (Moon P.) 281
Мур К. (Moore K.) 309, 319
Мюзен П. (Musen P.) 237, 306, 310

Насонова Л. П. 109, 147, 187
Никифоров А. Ф. 14
Носков Б. Н. 10, 67, 147, 257, 279
Ньюком (Newcomb S.) 126
Ньютон И. (Newton I.) 129, 141, 142, 147, 277
Ньютон Р. (Newton R.) 46, 321, 326

О'Киф (O'Keefe I.A.) 211
Олдрич (Aldrich L.B.) 281
Орлов А. А. 186
Охоцимский Д. Е. 278

Парийский Н. Н. 320
Паркинсон (Parkinson R.W.) 306
Пеллинен Л. П. 29
Плиммер Р. (Plimmer R.N.A.) 278
Поляхова Е. Н. 290
Проскурин В. Ф. 186, 278
Прохорова И. П. 10, 187
Пуанкаре А. (Poincare H.) 111, 144
Пуассон (Poisson S.D.) 12

Родриг (Rodrigues O.) 13
Рябов Ю. А. 102, 126, 219

Савров Л. А. 44
Сехнал Л. (Sehnal L.) 211, 268, 279, 291, 292, 295, 307, 308, 310, 329
Сикорский Ю. С. 68
Смарт У. (Smart W.M.) 212
Сорокин Н. А. 187
Сретенский Л. Н. 11
Стаир (Stair R.) 281
Субботин М. Ф. 11, 111, 126, 127

Таратынова Г. П. 278
Тимошкова Е. И. 109, 147
Тиссеран (Tisserand F.) 204

Уайятт (Wyatt S.) 308
Уваров В. Б. 14
Уиттекер Э. Т. (Whittaker E.T.) 14
Уокер D. (Wolker D.M.C.) 278, 279
Уральская В. С. 10, 67, 109, 237

Ферраз-Мелло (Ferraz-Mello S.) 291, 307
Филенко Л. Л. 211
Фоминов А. М. 279
Фурье (Fourier J.B.J.) 291, 307

Хагихара И. (Hagihara Y.) 187
Холшевников К. В. 31

Цейпель (Zeipel H.) 126, 186

Чеботарев Г. А. 8
Чепурова В. М. 10, 67
Чонг-Ханг Зи 279

Шаль А. (Challe A.) 203, 204, 206, 211
Шапиро (Shapiro I.I.) 306
Шарлье К. (Charlier C.) 112, 113
Шкодров В. Г. 311, 328
Шкодрова Е. Б. 311, 328
Штерн Т. (Sterne T.E.) 278

Эйлер Л. 99
Эльясберг П. Е. 248, 278, 279
Энеев Т. М. 278

Якоби (Jacobi K.G.J.) 50, 66, 68, 69, 111
Ястребов В. Д. 278
Яшкин С. Н. 211

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Амплитуда (функция) 69
Аномалия истинная 101, 214
— средняя 100, 216, 322
— — в эпоху 101
— эксцентрическая 100
Аргумент перигея 100, 322, 325
— широты 101, 214, 325
Атмосфера стандартная 243

Вариации плотности атмосферы 328
Вектор магнитной напряженности 329
— скорости 329
Влияние вращения атмосферы 263
Возмущения вековые 150, 180, 220, 323, 328
— долгопериодические 151, 210, 323, 327
— короткопериодические 151, 209, 268
— лунно-солнечные 212, 337
— от гармоник третьего порядка 193
— от прецессии и нутации экваториальной плоскости Земли 311, 337
— от приливной деформации Земли 320
— от светового давления 337
— от секториальных гармоник 188
— от тессеральных гармоник 188
— от электромагнитных сил 329
— первого порядка 146
— резонансные 210, 211
— релятивистские 331
Время запаздывания прилива 325, 326
— звездное гринвичское 47
— регуляризующее 66

Гармоники зональные 8, 27, 202, 337
— секториальные 9, 29, 211, 338
— тессеральные 9, 28, 211, 338
Геоид 36
— промежуточный 36
Геопотенциал 8, 211, 327, 328
Гиперболоид вращения однополостный 63, 64
Горб приливной 325
Гравитационное поле Земли 8, 11

Давление света 281
Движение возмущенное 9, 110, 111
— кеплерово 99, 111, 337
Движение невозмущенное 100
— плоское 65
— полюса 7
— промежуточное 49, 58, 66, 99, 110, 111, 207, 337
— среднее 216, 323—325
— — аномалистическое 102, 123, 207
— — драконическое 123
— — перигея 102, 207, 216
— — сидерическое 123
— — узла 102, 207, 216, 323
— условно-периодическое 64, 105
— эйлерово 99, 100
Дельта амплитуды 69
Деформация приливная Земли 323
Долгота восходящего узла 100
— средняя 325, 337
— узла 214, 216, 322, 325, 337
— — орбиты Луны 327

Задача двух неподвижных центров 35, 99
— — — — обобщенная 8, 35, 99
Запаздывание приливов 325
Заряд электрический 329
Земля стандартная 30

Импульсы обобщенные 111
Интеграл общий 51
— площадей 53
— полный 51
— эллиптический первого рода 69
— — — — полный 69, 72
— энергии 50

Координаты обобщенные 111
— сфероидальные 49, 106, 168
Косинус эллиптический 69
Коэффициент лобового сопротивления 246
Коэффициенты Ганзена 204, 205, 298
Критические значения наклона 235

Меридиан гринвичский 24
— местный 325
Метод вариации произвольных постоянных 111
— Гамильтона — Якоби 49, 66
— последовательных приближений 98, 107, 166
Модель атмосферы аналитическая 242

Модель атмосферы динамическая 243
— — локальная 244
— — статическая 244
Моменты инерции 22

Наклон 214
— критический 235, 290
— к эклиптике 325
— орбиты 100, 326
— эклиптики к экватору 325
Невязки 103
Неравенства вековые 97, 102, 327
— долгопериодические 184, 209, 210
— короткопериодические 209, 210
— периодические 9
— резонансные 206, 210, 211
— с периодом около суток 210
Несферичность Земли 7, 327
Нутация экваториальной плоскости 9

Операция основная 131
Орбита кеплерова 101, 112
— круговая 321
— промежуточная 8, 9, 49, 99, 101—103, 105, 110
— эйлерова 99, 102
Орбиты круговые 65, 66
— полярные 66
— эллипсоидальные 65
— эллиптические 65, 66

Параллакс 213
Параметр орбиты 324
Перигей 100
Период аномалистический 122
— драконический 122
— обращения линии узлов орбиты Луны 327
— сидерический 123
Плоскость экватора 325
Плотность атмосферы 240, 328, 340
Площадь миделева сечения 246
Поле гравитационное Земли 29
— — нормальное 44
— — промежуточное 34
— Земли магнитное 329
Полиномы Лежандра 13, 14, 18, 24
Полуось большая 100, 216, 323
Постоянная притяжения 11
— солнечная 281
Постоянные гравитационного поля Земли 30, 31
Потенциал аномальный 44
— возмущающий 42
— магнитного поля 329
— притяжения 8, 11, 13, 327, 329
Преобразование каноническое 112
Прецессия экваториальной плоскости 9
Приливы лунно-солнечные 7, 9, 325, 327
Притяжение атмосферы 9, 327, 328
— внешнего тела 212
— Луны и Солнца 8
— объемного тела 11

Продолжительность жизни спутника 273, 276

Радиус средний экваториальный 21, 24
Разложение возмущающей функции 197
— потенциала 19
Релятивистский эффект 9
Решение условно-периодическое 112
Ряд тригонометрический 71, 103—105
— Фурье 216

Световое давление 8, 9
Сила тяжести 41
Силы электромагнитные 9
Синус эллиптический 69
Скобки Лагранжа 136
Скорость вращения Земли угловая 47, 188, 207, 325
Сопротивление атмосферы 8, 9
Спутник суточный 211

Тело возмущающее 212, 213, 216
Теневой эффект 9
Теорема Виета 60, 62
— Дирихле 13
— Лапласа 127
— сложения 17
Теория условно-периодических движений 112
Точка весеннего равноденствия 212
Трение приливное 325

Угловое расстояние перигея от узла 216
Узел восходящий 325
Уравнение Гамильтона — Якоби 50
— Лапласа 12
— Лежандра 15
— Пуассона 12
Уравнения возмущенного движения 48
— дифференциальные промежуточного движения 9, 49
— для возмущений эйлеровых элементов 218
— — эйлеровых элементов 110
— — элементов промежуточного движения 9, 207
— канонические 111
— Лагранжа 141
— невозмущенного движения 49
— Ньютона 142
Условие Гольдера 12
Устойчивость движения спутника 122, 125

Фаза запаздывания прилива 326
Формула Лапласа 15
— Родрига 13

Формулы для прямоугольных координат спутника 92
— — скорости спутника 94
Функции Бесселя мнимого аргумента 247
— наклона 200, 202, 203, 211
— сферические 8, 13, 327, 329
— эксцентриситета 199, 204, 206, 211
— эллиптические 68, 103
Функция возмущающая 48, 110, 149, 206, 207, 211—213, 285, 321
— Лежандра 17
— — присоединенная 15
— — — нормированная 18, 24
— — — полностью нормированная 18
— производящая 15
— силовая 8, 11, 110
— сферическая 16
— тени 9, 291

Шкала высот 244, 342

Эксцентриситет 64, 100, 211, 214, 216, 323
Электромагнитные силы 329
Элементы Делоне 111, 143
— канонические 111, 112, 121
— — Якоби 111
— кеплеровы 58, 101, 337
— Луны и Солнца 233
— неугловые 239
— орбиты 58, 106, 216
— промежуточной орбиты 99, 110, 216
— Пуанкаре 111, 144
— средние 102
— угловые 239
— эйлеровы 101, 110
Эллипс 100
Эллипсоид вращения сжатый 63—65
Эффект приливной деформации 327
— суточный 241
— широтный 269
Эффекты резонансные 211

# ОГЛАВЛЕНИЕ


Предисловие . . . . . 7

Глава I. **Гравитационное поле Земли** . . . . . 11

§ 1.1. Притяжение объемного тела . . . . . 11
§ 1.2. Основные сведения о полиномах Лежандра . . 13
§ 1.3. Присоединенные функции Лежандра. Общее выражение для сферической функции . . . . 15
§ 1.4. Нормированные и полностью нормированные присоединенные функции Лежандра . . . . 17
§ 1.5. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям . . . . . 19
§ 1.6. Различные формулы для потенциала притяжения Земли . . . . . 24
§ 1.7. Зональные, тессеральные и секториальные гармоники . . . . . 27
§ 1.8. Постоянные гравитационного поля Земли. Стандартная Земля . . . . . 29
§ 1.9. Промежуточное гравитационное поле Земли 32
§ 1.10. Геоид . . . . . 36
§ 1.11. Сила тяжести . . . . . 41
§ 1.12. Возмущающий потенциал . . . . . 42
§ 1.13. Замечания . . . . . 43

Глава II. **Первые интегралы уравнений промежуточного движения** . . . . . 47

§ 2.1. Дифференциальные уравнения движения искусственного спутника . . . . . 47
§ 2.2. Интегрирование уравнений промежуточного движения . . . . . 49
§ 2.3. Первые интегралы . . . . . 52
§ 2.4. Исследование первых интегралов . . . . . 54
§ 2.5. Постоянные $a$, $e$, $\delta$ . . . . . 58
§ 2.6. Корни многочленов $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ . . . . . 60
§ 2.7. Качественная картина . . . . . 62
§ 2.8. Частные случаи . . . . . 65
§ 2.9. Замечания . . . . . 66

Глава III. **Формулы промежуточного движения** . . . . 68

§ 3.1. Эллиптические функции Якоби . . . . . 68
§ 3.2. Определение координаты $\eta$ . . . . . 71
§ 3.3. Определение координаты $\xi$ . . . . . 73

§ 3.4. Связь между переменными $\theta$ и $\psi$ . . . . . 75
§ 3.5. Определение координаты $w$ . . . . . 77
§ 3.6. Связь между временем $t$ и переменными $\theta$ и $\psi$ 83
§ 3.7. Постоянная $i$ . . . . . 87
§ 3.8. Определение $\psi$ для заданного момента времени $t$ . . . . . 90
§ 3.9. Формула для определения долготы $w$ . . . . 91
§ 3.10. Формулы для прямоугольных координат . . . 92
§ 3.11. Формулы для скорости . . . . . 94
§ 3.12. Оценки периодических членов второго порядка 95
§ 3.13. Вековые члены третьего порядка . . . . . 97
§ 3.14. Сводка формул . . . . . 98
§ 3.15. Эйлерово и кеплерово движения. Элементы орбиты . . . . . 99
§ 3.16. Вековые неравенства . . . . . 102
§ 3.17. Разложение эллиптических функций в тригонометрические ряды . . . . . 103
§ 3.18. Определение элементов орбиты по начальным условиям . . . . . 105
§ 3.19. Замечания . . . . . 109

Глава IV. **Дифференциальные уравнения для эйлеровых элементов промежуточной орбиты** . . . . . 110

§ 4.1. Введение . . . . . 110
§ 4.2. Канонические элементы $A_k$ и $B_k$ . . . . . 112
§ 4.3. Вычисление величины $A_1$ . . . . . 113
§ 4.4. Вычисление величины $A_2$ . . . . . 115
§ 4.5. Элементы $L$, $G$, $H$, $l$, $g$, $h$ . . . . . 118
§ 4.6. Некоторые другие системы канонических элементов . . . . . 121
§ 4.7. Задача об устойчивости движения спутника 122
§ 4.8. Аналог теоремы Лапласа . . . . . 126
§ 4.9. Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов, аналогичные уравнениям Лагранжа . . . . . 127
§ 4.10. Дифференциальные уравнения, аналогичные уравнениям Ньютона . . . . . 129
§ 4.11. Еще одна форма дифференциальных уравнений для элементов . . . . . 134
§ 4.12. Случай кеплеровых элементов . . . . . 141
§ 4.13. Постановка задачи о возмущениях элементов промежуточной орбиты . . . . . 144
§ 4.14. Замечания . . . . . 147

Глава V. **Возмущения от зональных гармоник** . . . . 149

§ 5.1. Возмущающая функция . . . . . 149
§ 5.2. Коэффициенты $M_n^{(k)}(e)$ . . . . . 152
§ 5.3. Коэффициенты $N_n^{(k)}(e)$ . . . . . 155
§ 5.4. Коэффициенты $L_n^{(k)}(s)$ . . . . . 157
§ 5.5. Выражения для $R'$, $F'$, $\Phi'$ . . . . . 164
§ 5.6. Элементы как функции $v$ . . . . . 165

§ 5.7. Соотношение между $t$ и $v$ . . . . . 168
§ 5.8. Возмущения элемента $M$ . . . . . 171
§ 5.9. Сводка формул для возмущений . . . . . 172
§ 5.10. Возмущения от гармоники $m$-го порядка . . . 175
§ 5.11. Влияние третьей гармоники . . . . . 176
§ 5.12. Возмущения от гармоник четвертого и пятого порядков . . . . . 178
§ 5.13. Вековые возмущения . . . . . 180
§ 5.14. Случай малых $e$ . . . . . 182
§ 5.15. Важнейшие долгопериодические неравенства 184
§ 5.16. Дальнейшее развитие теории . . . . . 186

**Глава VI. Возмущения от тессеральных и секториальных гармоник** . . . . . 188

§ 6.1. Постановка задачи . . . . . 188
§ 6.2. Возмущения от второй секториальной гармоники . . . . . 191
§ 6.3. Возмущения от гармоник третьего порядка 193
§ 6.4. Разложение возмущающей функции в общем случае . . . . . 197
§ 6.5. Функции наклона $A^k_{nq}(i)$ . . . . . 200
§ 6.6. Функции эксцентриситета $B^k_{nq}(e)$ . . . . . 204
§ 6.7. Структура возмущений. Резонансные неравенства . . . . . 206
§ 6.8. Замечания . . . . . 211

**Глава VII. Лунно-солнечные возмущения** . . . . . 212

§ 7.1. Постановка задачи . . . . . 212
§ 7.2. Выражения для $R'$, $F'$, $\Phi'$ . . . . . 214
§ 7.3. Дифференциальные уравнения для возмущений эйлеровых элементов . . . . . 218
§ 7.4. Вековые возмущения . . . . . 220
§ 7.5. Долгопериодические возмущения первого класса . . . . . 221
§ 7.6. Долгопериодические возмущения второго класса 223
§ 7.7. Долгопериодические возмущения третьего класса . . . . . 225
§ 7.8. Долгопериодические возмущения четвертого класса . . . . . 227
§ 7.9. Возмущения элемента $M$ . . . . . 230
§ 7.10. Определение элементов Луны и Солнца . . . 232
§ 7.11. Некоторые свойства возмущений . . . . . 234
§ 7.12. Замечания . . . . . 237

**Глава VIII. Возмущения от сопротивления атмосферы** 239

§ 8.1. Введение . . . . . 239
§ 8.2. Плотность атмосферы . . . . . 240
§ 8.3. Сила сопротивления атмосферы . . . . . 246

§ 8.4. Функции Бесселя мнимого аргумента . . . . 247
§ 8.5. Уравнения для возмущений элементов $a$, $p$, $i$ 248
§ 8.6. Уравнения для вековых возмущений элементов $a$, $p$, $i$ . . . . . 251
§ 8.7. Асимптотические формулы для возмущений элементов $a$, $p$, $e$, $i$, $n$ . . . . . 255
§ 8.8. Вывод уравнений для возмущений угловых элементов . . . . . 257
§ 8.9. Сводка окончательных результатов . . . . . 259
§ 8.10. Комбинированное влияние сопротивления атмосферы и сжатия Земли . . . . . 261
§ 8.11. Влияние вращения атмосферы . . . . . 263
§ 8.12. Другие возмущения от сопротивления атмосферы . . . . . 267
§ 8.13. Формулы для определения плотности воздуха 271
§ 8.14. Продолжительность жизни спутника . . . . 273
§ 8.15. Общий обзор. Дальнейшее развитие теории 277

Глава IX. **Возмущения от светового давления** . . . . . 280

§ 9.1. Давление света . . . . . 280
§ 9.2. Возмущающая функция . . . . . 285
§ 9.3. Возмущения элементов без учета влияния тени 287
§ 9.4. Теневая функция . . . . . 290
§ 9.5. Выражение $P_n(\cos\lambda)$ через элементы орбиты 296
§ 9.6. Выражение $P_n(\cos\Phi)$ через элементы орбиты 299
§ 9.7. Уравнения для возмущений элементов с учетом тени . . . . . 301
§ 9.8. Влияние светового давления на движение спутников . . . . . 303
§ 9.9. Замечания . . . . . 306

Глава X. **Другие возмущения. Вычисление возмущенных координат спутника** . . . . . 309

§ 10.1. Введение . . . . . 309
§ 10.2. Возмущения, вызываемые прецессией и нутацией экваториальной плоскости Земли . . . 311
§ 10.3. Возмущения от приливной деформации Земли 320
§ 10.4. Влияние притяжения атмосферы . . . . . 327
§ 10.5. Влияние электромагнитных сил . . . . . 329
§ 10.6. Релятивистские эффекты . . . . . 331
§ 10.7. Определение возмущенных координат спутника 332

Приложение . . . . . 338
Литература . . . . . 344
Именной указатель . . . . . 356
Предметный указатель . . . . . 358

Е. П. АКСЕНОВ

# ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977